ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1515–1524

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СТРАТЕГИИ ПРИЦЕЛИВАНИЯ В НАПРАВЛЕНИИ КВАЗИГРАДИЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2022 г. Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Рассматривается задача оптимального управления, в которой движение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием, начальные условия определяются кусочно-непрерывной функций, оптимизируется показатель качества типа Больца. Предлагается конструкция позиционных стратегий управления, позволяющих получать кусочно-постоянные аппроксимации оптимального управления. В данных стратегиях используются квазиградиенты функционала оптимального результата. Стратегии вычисляются путём поиска точек экстремума на конечномерном множестве. Тот факт, что это множество может быть конечномерным, является основным результатом статьи.

DOI: 10.31857/S0374064122110073, EDN: MBCMGS

Введение. В задачах оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями установлено, что если функция оптимального результата непрерывно дифференцируема, то оптимальная позиционная стратегия может быть построена на базе прицеливания в направлении её градиента. Для случая, если гладкость этой функции не предполагается, рассматриваются различные подходы к построению оптимальных позиционных стратегий (см., например, [1–9]). Идея настоящей статьи основана на подходе из работы [6, с. 127], поскольку он представляется одним из наиболее общих с точки зрения достаточных условий. Согласно данному подходу почти оптимальные позиционные стратегии строятся с использованием квазиградиентов функции оптимального результата. Целью статьи является развитие этого подхода на системы с запаздыванием.

Отметим, что для систем с запаздыванием позиционные стратегии управления, использующие квазиградиенты, и близкие к ним изучались в статьях [10, 11]. Однако применение этих стратегий затруднительно, поскольку для их реализации необходимо искать точки экстремума на бесконечномерных множествах непрерывных функций – возможных историй движений системы. В настоящей работе предлагается способ построения почти оптимальных позиционных стратегий управления, использующих поиск точек экстремума лишь на конечномерном множестве возможных текущих состояний системы. Идеи, лежащие в основе этого результата, заключаются в следующем:

(i) Подобно [12] рассматриваются такие условия на систему и показатель качества, что функционал оптимального результата удовлетворяет определённому условию Липшица.

(ii) Следуя [13, 14], задача оптимального управления рассматривается на пространстве кусочно-непрерывных функций.

1. Задача оптимального управления. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Функция $x(\cdot)\colon [a,b]\mapsto\mathbb{R}^n$ называется *кусочно-непрерывной*, если существуют числа $a=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_l=b$ такие, что для каждого $i\in\in\overline{1,l-1}$ функция $x(\cdot)$ непрерывна на промежутке $[\xi_i,\xi_{i+1})$, и существует конечный предел $x(\xi)$ при ξ, стремящемся к ξ_{i+1} слева. Через $\mathrm{PC}([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство кусочно-непрерывных функций $x(\cdot)\colon [a,b]\mapsto\mathbb{R}^n$.

Пусть $t_0<\vartheta$ и $h>0$. Положим $\mathrm{PC}=\mathrm{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{PC}$. Определим следующие нормы на пространстве PC:

$$\|w(\cdot)\|_1=\int\limits_{-h}^{0}\|w(\xi)\|\,d\xi,\quad \|w(\cdot)\|_\infty=\sup_{\xi\in[-h,0)}\|w(\xi)\|.$$

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(\tau) = z, \quad x(t) = w(t-\tau), \quad t \in [\tau - h, \tau). \tag{2}$$

Здесь t – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния в момент времени t, $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$, $u(t) \in \mathbb{U}$ – текущее воздействие управления, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ – компактное множество.

Обозначим через $\Lambda(\tau, z, w(\cdot))$ множество функций $x(\cdot) \in \mathrm{PC}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих начальному условию (2) и условию Липшица на промежутке $[\tau, \vartheta]$. Обозначим через $\mathcal{U}_\tau$ множество измеримых функций $u(\cdot)\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$.

Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$. Движением $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2) называется функция $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, z, w(\cdot))$, которая удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: требуется минимизировать показатель качества типа Больца

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)) + \int\limits_{\tau}^{\vartheta} f^0(\xi, x(\xi), x(\xi - h), u(\xi))\, d\xi \tag{3}$$

по всем $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$, где $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2).

Обозначим

$$B(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

Предполагаем, что выполнены следующие условия:

(f_1) Функции $f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$ и $f^0(t, x, y, u) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$, непрерывны.

(f_2) Для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_f = \lambda_f(\alpha) > 0$ такое, что для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y, x', y' \in B(\alpha)$ и $u \in \mathbb{U}$ справедливо неравенство

$$\|f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u)\| + |f^0(t, x, y, u) - f^0(t, x', y', u)| \leqslant \lambda_f(\|x - x'\| + \|y - y'\|).$$

(f_3) Существует константа $c_f > 0$ такая, что для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{U}$ имеет место оценка

$$\|f(t, x, y, u)\| + |f^0(t, x, y, u)| \leqslant c_f(1 + \|x\| + \|y\|).$$

(σ_1) Для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\sigma(x) - \sigma(x')| \leqslant \lambda_\sigma \|x - x'\|, \quad x, x' \in B(\alpha).$$

(σ_2) Существует константа $c_\sigma > 0$ такая, что

$$|\sigma(x)| \leqslant c_\sigma(1 + \|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что при выполнении условий (f_1)–(f_3) для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ существует единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2). Этот факт может быть установлен путём применения метода шагов работы [15, гл. 1, раздел 2] с опорой на факт существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [16, раздел 1]).

Функционал оптимального результата $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ в задаче (3) определяется по формуле

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)). \tag{4}$$

Отметим, что этот функционал удовлетворяет условиям:

(ρ_1) Имеет место равенство

$$\rho(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z), \quad (z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{PC}.$$

(ρ_2) Для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $t \in [\tau, \vartheta]$ справедливо равенство

$$\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau} (\rho(t, x(t), x_t(\cdot)) + x^0(t)),$$

где $x(\cdot) = x(\,\cdot|\tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2), а функция $x^0(\cdot) = x^0(\,\cdot|\tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ определяется следующим образом:

$$x^0(t) = \int\limits_\tau^t f^0(\xi, x(\xi), x(\xi - h), u(\xi))\, d\xi, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{5}$$

(ρ_3) Функционал оптимального результата $\rho(\tau, z, w(\cdot))$ непрерывен по τ, и для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \rho(\tau, z', w'(\cdot))| \leqslant \lambda_\rho(\|z - z'\| + \|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_1)$$

для всех $(\tau, z, w(\cdot)), (\tau, z', w'(\cdot)) \in \mathbb{G}$, удовлетворяющих неравенству

$$\max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|, \|z'\|, \|w'(\cdot)\|\} \leqslant \alpha. \tag{6}$$

(ρ_4) Существует константа $c_\rho > 0$ такая, что

$$|\rho(\tau, z, w(\cdot))| \leqslant c_\rho(1 + \|z\| + \|w(\cdot)\|_1), \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}. \tag{7}$$

Функционал оптимального результата ρ удовлетворяет условию (ρ_1) в силу своего определения (4). Условие (ρ_2) может быть доказано, например, по схеме из монографии [17, с. 553]. Условие (ρ_3) доказано в статье [14]. Условие (ρ_4) доказывается в лемме 3 далее.

2. Позиционные стратегии в гладком случае. Пусть $U\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{U}$ и $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Определим разбиение промежутка $[\tau, \vartheta]$:

$$\Delta = \{t_i \in [\tau, \vartheta], i \in \overline{1, I}\colon t_i < t_{i+1}\}. \tag{8}$$

Обозначим

$$J(\tau, z, w(\cdot), U, \Delta) = J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)), \tag{9}$$

где $u(\cdot)$ определяется по пошаговому правилу

$$u(t) = U(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \in \overline{0, I-1}.$$

Тогда U называется *позиционной стратегией управления.*

Для того чтобы описать почти оптимальные позиционные стратегии в гладком случае, введём понятие коинвариантной дифференцируемости функционалов и подходящее понятие коинвариантной гладкости. Следуя работам [11] и [18, с. 20], функционал $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ называется *коинвариантно дифференцируемым* (*ci-дифференцируемым*) в точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если существуют $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любых $r \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) \in \Lambda(\tau, z, w(\cdot))$ и $t \in [\tau, \vartheta]$ выполняется соотношение

$$\rho(t, r, x_t(\cdot)) - \rho(\tau, z, w(\cdot)) = \partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))(t - \tau) + \langle r - z, \nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))\rangle + o(|t - \tau| + \|r - z\|),$$

где величина $o(\cdot)$ зависит от тройки $\{\tau, z, x(\cdot)\}$, причём $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$. Тогда $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))$ называется ci-производной ρ по $\{\tau, w(\cdot)\}$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))$ – градиент ρ по z. Функционал $\rho\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ называется *ci-гладким*, если он ci-дифференцируем в каждой точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, функционалы $\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot))$ и $\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot))$ непрерывны по τ, и для любого $\alpha > 0$ существует число $\lambda^*_\rho = \lambda^*_\rho(\alpha) > 0$ такое, что

$$|\partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \partial^{ci}_{\tau,w}\rho(\tau, z', w'(\cdot))| + |\partial^{ci}_{\tau,w}\nabla_z\rho(\tau, z, w(\cdot)) - \nabla_z\rho(\tau, z', w'(\cdot))| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_\rho^*(\|z - z'\| + \|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_1)$$

для всех $(\tau, z, w(\cdot)), (\tau, z', w'(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, удовлетворяющих неравенству (6).

По аналогии с [18, с. 123] рассмотрим предстратегию

$$p(t, x, y, s) = \arg\min_{u \in \mathbb{U}}(\langle f(t, x, y, u), s\rangle + f^0(t, x, y, u)).$$

В работе [13] было доказано, что если функционал оптимального результата ρ является ci-гладким, то для позиционной стратегии управления

$$U^\circ(\tau, z, w(\cdot)) = p(\tau, z, w(-h), \nabla_z \rho(\tau, z, w(\cdot)))$$

и для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta > 0$ существует разбиение Δ (см. (8)) такое, что

$$J(\tau, z, w(\cdot), U^0, \Delta) \leqslant \rho(\tau, z, w(\cdot)) + \zeta.$$

Ниже описывается построение почти оптимальной позиционной стратегии управления в случае, когда не предполагается, что функционал оптимального результата ρ удовлетворяет условию ci-гладкости.

3. Стратегии прицеливания в направлении квазиградиентов. Обозначим

$$\nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau) = (e^{-\lambda(\tau - t_0)} - \varepsilon)/\varepsilon, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad \lambda, \varepsilon > 0.$$

Пусть $\varepsilon_*(\lambda) > 0$ таково, что

$$\nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau) > c_\rho, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda)], \tag{10}$$

где c_ρ – константа из условия (ρ_4). Определим функцию

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z) = \nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)\mu^\varepsilon(z), \quad \mu^\varepsilon(z) = \sqrt{\varepsilon^4 + \|z\|^2}, \tag{11}$$

где $(\tau, z) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda > 0$. Отметим, что эта функция непрерывно дифференцируема и имеют место равенства

$$\partial\eta_\varepsilon^\lambda(\tau, z)/\partial\tau = -\lambda(\nu_\varepsilon^\lambda(\tau) + 1)\mu_\varepsilon(z), \quad \nabla_z\eta_\varepsilon^\lambda(\tau, z) = (\nu_\varepsilon^\lambda(\tau)/\mu_\varepsilon(z))z. \tag{12}$$

Рассмотрим функционал

$$r^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z, w(\cdot)) = \arg\min_{r \in \mathbb{R}^n}(\rho(\tau, r, w(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r)), \tag{13}$$

где $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda > 0$. Отметим, что этот функционал корректно определён в силу леммы 4 ниже. Определим величину

$$\nabla_z^{\lambda,\varepsilon}\rho(\tau, z, w(\cdot)) = \nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z, w(\cdot))).$$

Теорема. *Для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta > 0$ существуют $\lambda, \varepsilon > 0$ и разбиение Δ (см. (8)) такие, что для позиционной стратегии управления*

$$U^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z, w(\cdot)) = p(\tau, z, w(-h), \nabla_z^{\lambda,\varepsilon}\rho(\tau, z, w(\cdot))) \tag{14}$$

имеет место оценка

$$J(\tau, z, w(\cdot), U^{\lambda,\varepsilon}, \Delta) \leqslant \rho(\tau, z, w(\cdot)) + \zeta.$$

Доказательство теоремы приведено в п. 6.

4. Свойства динамической системы. Взяв константу c_f из условия (f_3), положим

$$\alpha(t,\tau,\alpha_0)=\frac{1}{2}((1+2\alpha_0)e^{2c_f(t-\tau)}-1). \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau\in[t_0,\vartheta]$ *и* $\alpha_0\geqslant 0$. *Тогда для любых* $(z,w(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times\mathrm{PC}$ *таких, что* $\max\{\|z\|,\|w(\cdot)\|_\infty\}\leqslant\alpha_0$, *и любого* $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ *движение* $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *системы (1), (2) и функция* $x^0(\cdot)=x^0(\cdot\mid t,z,w(\cdot),u(\cdot))$, *определяемая согласно (5), при всех* $t\in[\tau,\vartheta]$ *удовлетворяют оценкам*

$$\sup_{\xi\in[\tau-h,t]}\|x(\xi)\|\leqslant\alpha(t,\tau,\alpha_0),\quad |x^0(t)|\leqslant\alpha(t,\tau,\alpha_0). \tag{16}$$

Доказательство. В силу (1), (2) и условия (f_3) для $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ имеем

$$\|x(t)\|\leqslant\|z\|+\int\limits_\tau^t\|f(\xi,x(\xi),x(\xi-h),u(\xi),v(\xi))\|\,d\xi\leqslant\alpha_0+c_f\int\limits_\tau^t(1+2\sup_{\zeta\in[\tau-h,\xi]}\|x(\zeta)\|)\,d\xi$$

при всех $t\in[\tau,\vartheta]$. Тогда, принимая во внимание, что правая часть этих оценок монотонна по t, получаем, что функция

$$\psi(t)=1+2\sup_{\xi\in[\tau-h,t]}\|x(\xi)\|,\quad t\in[\tau,\vartheta], \tag{17}$$

удовлетворяет неравенству

$$\psi(t)\leqslant 1+2\alpha_0+2c_f\int\limits_\tau^t\psi(\xi)\,d\xi,\quad t\in[\tau,\vartheta].$$

Отсюда, применяя лемму Беллмана–Гронуолла (см., например, [19, с. 43]), выводим

$$\psi(t)\leqslant(1+2\alpha_0)e^{2c_f(t-\tau)},\quad t\in[\tau,\vartheta]. \tag{18}$$

Тогда в силу формул (15) и (17) получаем первую оценку в (16).

Для функции $x^0(\cdot)=x^0(\cdot\mid t,z,w(\cdot),u(\cdot))$ из условия (f_3) и соотношений (15), (17), (18) имеем

$$|x^0(t)|\leqslant\int\limits_\tau^t\|f^0(\xi,x(\xi),x(\xi-h),u(\xi),v(\xi))\|\,d\xi\leqslant c_f\int\limits_\tau^t\psi(\xi)\,d\xi\leqslant\alpha(t,\tau,\alpha_0)$$

при всех $t\in[\tau,\vartheta]$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha_*\geqslant 0$. *Пусть* $(\tau,z,w(\cdot))\in\mathbb{G}$ *и* $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ *таковы, что движение* $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *системы (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\|\leqslant\alpha_*,\quad t\in[\tau-h,\vartheta]. \tag{19}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|x(t)-x(t')\|\leqslant c_f(1+2\alpha_*)|t-t'|,\quad t,t'\in[\tau,\vartheta]. \tag{20}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t\leqslant t'$. Тогда в силу (1), (2) и условия (f_3) имеем

$$\|x(t)-x(t')\|\leqslant\int\limits_t^{t'}\|f(\xi,x(\xi),x(\xi-h),u(\xi))\|\,d\xi\leqslant c_f\int\limits_t^{t'}(1+\|x(\xi)\|+\|x(\xi-h)\|)\,d\xi.$$

Далее, используя неравенство (19), получаем (20). Лемма доказана.

5. Свойства функционала оптимального результата.

Лемма 3. *Функционал оптимального результата* ρ *удовлетворяет условию* (ρ_4).

Доказательство. Возьмём c_f и c_σ из условий (f_3) и (σ_2). Положим $c_x = e^{2c_f(\vartheta - t_0)}$, $c_\rho = (2c_\sigma + 1)c_x$.

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Обозначим $\alpha_0 = \max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\alpha_* = c_x(1+\alpha_0)$. Отметим, что $\alpha_* \geqslant 1$. Тогда в соответствии с (15) для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1), (2) удовлетворяет оценке

$$\max\{\|x(t)\|, |x^0(t)|\} \leqslant \alpha(t, \tau, \alpha_0) \leqslant \alpha_*, \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Таким образом, получаем

$$|\sigma(x(\vartheta)) + x^0(\vartheta)| \leqslant c_\sigma(1+\alpha_*) + \alpha_* \leqslant (2c_\sigma + 1)\alpha_* = c_\rho(1+\alpha_0) \leqslant c_\rho(1 + \|z\| + \|w(\cdot)\|_\infty).$$

Из этой оценки и выражения (4) выводим (7). Лемма доказана.

6. Доказательства.

Определим функционал

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z, w(\cdot)) = \min_{r \in \mathbb{R}^n}(\rho(\tau, r, w(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r)), \tag{21}$$

где $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(\lambda)]$ и $\lambda > 0$.

Лемма 4. *В соотношении (21) минимум достигается.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\tilde{\rho}(r) = \rho(\tau, r, w(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau, z - r), \quad r \in \mathbb{R}^n.$$

В силу условия (ρ_3) эта функция непрерывна. По условиям (σ_2) и (10) имеем

$$\tilde{\rho}(r) \geqslant -c_\rho(1 + \|r\|) + \nu^{\lambda,\varepsilon}(\tau)\|r - z\| \geqslant c_\rho(\|r\| - 1 - 2\|z\|).$$

Следовательно, функция $\tilde{\rho}_-$ ограничена снизу и $\tilde{\rho}(r) \to +\infty$ при $\|r\| \to \infty$. Это означает, что минимум достигается. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $\zeta_1, \lambda > 0$. *Существует число* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *и* $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *движение* $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ *системы (1), (2) удовлетворяет неравенству*

$$\|r^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)) - x(t)\| \leqslant \zeta, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_1, \lambda > 0$. Взяв константу c_ρ из леммы 3 и функцию α из (15), обозначим $\alpha_0 = \max\{\|z\|, \|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\theta = c_\rho(1 + (1+h)\alpha(\vartheta, \tau, \alpha_0))$. Согласно (11) можно выбрать $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_*(\lambda))$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0, 0) \leqslant \theta, \quad \nu^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta) \geqslant c_\varphi + 3\theta/\zeta, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$, $t \in [\tau, \vartheta]$, $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2). Обозначим

$$r = r^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)), \tag{23}$$

где $r^{\lambda,\varepsilon}$ определяется по формуле (13). Тогда с учётом (11), (21) и леммы 3, с одной стороны, имеем

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t), x_t(\cdot)) = \rho(t, r, x_t(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t, x(t) - r) \geqslant -c_\rho(1 + \|r\| + \|x_t(\cdot)\|_1) + \nu^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta)\|x(t) - r\| \geqslant$$

$$\geqslant -c_\rho(1 + \|x(t)\| + \|x_t(\cdot)\|_1) + 3\theta/\zeta\|x(t) - r\| \geqslant -\theta + 3\theta/\zeta\|x(t) - r\|,$$

а с другой –

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0,0) \leqslant c_\rho(1+\|x(t)\|+\|x_t(\cdot)\|_1) + \eta^{\lambda,\varepsilon}(t_0,0) \leqslant 2\theta.$$

Из этих оценок следует (22). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $\zeta_2,\lambda>0$. *Тогда существует число* $\varepsilon_2>0$ *такое, что для любых* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ *и* $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ *движение* $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *системы (1), (2) удовлетворяет неравенству*

$$|\rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot))| \leqslant \zeta, \quad t\in[\tau,\vartheta]. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_2,\lambda>0$. В соответствии с (15) и с условием (ρ_3) обозначим $\alpha_0=\max\{\|z\|,\|w(\cdot)\|_\infty\}$, $\alpha_*=\alpha(\vartheta,\tau,\alpha_0)+\zeta_2$ и $\lambda_\rho=\lambda_\rho(\alpha_*)$. Согласно (11) и лемме 5 можно выбрать число $\varepsilon_2>0$ так, чтобы для любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ и $t\in[\tau,\vartheta]$ выполнялись неравенства

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,0)\leqslant\zeta_2, \quad \nu^{\lambda,\varepsilon}(t)>0, \quad \|r^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot))-x(t)\|\leqslant\zeta_2/\max\{\lambda_\rho,1\}, \tag{25}$$

где $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – движение системы (1), (2).

Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$, $t\in[\tau,\vartheta]$. Введём обозначение r согласно (23). В силу леммы 1 и выбора α_* и ε имеем

$$\|x(t)\|\leqslant\alpha_*, \quad \|r\|\leqslant\|x(t)-r\|+\|x(t)\|\leqslant\alpha_*.$$

Тогда в соответствии с выбором λ_ρ и r и неравенств (25), с одной стороны, выводим

$$\rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho(t,r,x_t(\cdot)) - \eta^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t)-r) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_\rho\|x(t)-r\|\leqslant\zeta_2,$$

а с другой стороны, принимая во внимание (21), получаем

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t,x(t),x_t(\cdot)) - \rho(t,x(t),x_t(\cdot)) \leqslant \eta^{\lambda,\varepsilon}(\tau,0)\leqslant\zeta_2.$$

Таким образом, неравенство (24) доказано. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ *и* $\zeta_3>0$. *Тогда существуют* $\lambda,\varepsilon_3>0$ *такие, что выполняется следующее утверждение: для любого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ *существует разбиение* Δ *(см. (8)) такое, что если* $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ *определяется согласно пошаговому правилу*

$$u(t)=U^{\lambda,\varepsilon}(t_i,x(t_i),x_{t_i}(\cdot)), \quad t\in[t_i,t_{i+1}), \quad i\in\overline{1,k-1}, \tag{26}$$

где $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ *– движение системы (1), (2), а* $U^{\lambda,\varepsilon}$ *определяется согласно (14), то движение* $x(\cdot)$ *и функция* $x^0(\cdot)=x^0(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$, *определяемая согласно (5), удовлетворяют неравенству*

$$\rho^{\lambda,\varepsilon}(t_{i+1},x(t_{i+1}),x_{t_{i+1}}(\cdot))+x^0(t_{i+1})\leqslant\rho^{\lambda,\varepsilon}(t_i,x(t_i),x_{t_i}(\cdot))+x^0(t_i)+(t_{i+1}-t_i)\zeta_3, \quad i\in\overline{1,k-1}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $(\tau,z,w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ и $\zeta_3>0$. Определим $\alpha_0=\max\{\|z\|,\|w(\cdot)\|_\infty\}$. Взяв функцию α из формулы (15) и константу $c_f>0$ из условия (f_3), обозначим

$$\zeta_1=\zeta_3/6, \quad \alpha_*=\alpha(\vartheta,\tau,\alpha_0+\zeta_1), \quad \lambda_*=(1+2\alpha_*)c_f. \tag{28}$$

В согласии с условием (f_2) положим $\lambda=\lambda_f(\alpha_*)$. По числу ζ_1 определим $\varepsilon_3=\varepsilon_1$ в соответствии с леммой 5. Пусть $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$. Обозначим

$$\beta(t,x,y,s,u)=\langle f(t,x,y,u),\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s)\rangle+f^0(t,x,y,u). \tag{29}$$

В силу условия (f_1) и непрерывности $\nabla_z \eta^{\lambda,\varepsilon}$ (см. (12)) существует $\delta_\beta > 0$ такое, что для любых $t, t' \in [t_0, \vartheta]$, $x, x', y, y' \in B(\alpha_*)$, $s, s' \in B(2\alpha_*)$ и $u \in \mathbb{U}$, если

$$\max\{|t-t'|, \|x-x'\|, \|y-y'\|, \|s-s'\|\} \leqslant \delta_\beta,$$

справедливо неравенство

$$|\beta(t,x,y,s,u) - \beta(t',x',y',s',u)| \leqslant \zeta_1. \tag{30}$$

Поскольку $w(\cdot) \in \mathrm{PC}$, существуют $-h = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_l = 0$ такие, что функция $w(\cdot)$ равномерно непрерывна на каждом промежутке $[\xi_i, \xi_{i+1})$, $i \in \overline{1, l-1}$. Тогда существует $\delta_w > 0$ такое, что для любых $i \in \overline{1, l-1}$ и $\xi, \xi' \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, если $|\xi - \xi'| \leqslant \delta_w$,

$$\|w(\xi) - w(\xi')\| \leqslant \delta_\beta/2. \tag{31}$$

Выберем $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha_*)$ в согласии с условием (ρ_3). Положим

$$\delta = \min\{\delta_w, \delta_\beta, \delta_\beta/(2\lambda_*), h, \zeta_1/(2\lambda_\rho\lambda_*)\}. \tag{32}$$

Возьмём разбиение Δ (см. (8)) такое, что

$$t_{i+1} - t_i \leqslant \delta, \quad i \in \overline{1, k-1}, \tag{33}$$

и функция $w(\cdot)$ непрерывна на промежутках $[t_i - \tau - h, t_{i+1} - \tau - h) \bigcap [-h, 0)$, $i \in \overline{1, k-1}$.

Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ удовлетворяет (26). Пусть $x(\cdot) = x(\,\cdot \mid \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ – движение системы (1), (2). Пусть $i \in \overline{1, k-1}$. Из леммы 1 и (15), (28) имеем

$$\|x(\xi)\| \leqslant \alpha(\xi, \tau, \alpha_0) \leqslant \alpha_*, \quad \xi \in [\tau - h, \vartheta]. \tag{34}$$

Тогда в силу леммы 2 и (28), (32), (33) выводим

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leqslant \lambda_* |t - t_i| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{35}$$

В случае $t_i - h \geqslant \tau$ аналогичным образом можно получить оценки

$$\|x(t-h) - x(t_i - h)\| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{36}$$

а при $t_i - h < \tau$ это неравенство выполнено в силу выбора разбиения Δ и (31)–(33).

Обозначим

$$r_i = r^{\lambda,\varepsilon}(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot)), \tag{37}$$

где $r^{\lambda,\varepsilon}$ взято из (13). Тогда по выбору ε имеем

$$\|r_i - x(t_i)\| \leqslant \zeta_1. \tag{38}$$

Ввиду условия (ρ_2) существует $v(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_i}$ такое, что движение $y(\cdot) = x(\,\cdot \mid t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot), v(\cdot))$ системы (1), (2) и функция $y^0(\cdot) = x^0(\,\cdot \mid t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot), v(\cdot))$, определяемая согласно (5), удовлетворяют неравенству

$$\rho(t_{i+1}, y(t_{i+1}), y_{t_{i+1}}(\cdot)) + y^0(t_{i+1}) \leqslant \rho(t_i, r_i, x_{t_i}(\cdot)) + 2(t_{i+1} - t_i)\zeta_1. \tag{39}$$

В соответствии с (32), (33) справедливо равенство

$$y(t-h) = x(t-h), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{40}$$

Отметим также, что в силу (34), (38) и леммы 1, принимая во внимание (15) и (28), имеем

$$\|y(t)\| \leqslant \alpha(t, t_i, \alpha(t_i, \tau, \alpha_0) + \zeta_1) \leqslant \alpha_*, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{41}$$

Тогда в силу леммы 2 и (28), (32), (33) выводим

$$\|y(t)-y(t_i)\| \leqslant \lambda_*|t-t_i| \leqslant \delta_\beta/2, \quad t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{42}$$

Обозначая

$$s(t)=x(t)-y(t), \quad t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{43}$$

и учитывая (34), (35) и (41), (42), получаем оценки

$$\|s(t)\| \leqslant 2\alpha_*, \quad \|s(t)-s(t_i)\| \leqslant \delta_\beta, \quad t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{44}$$

Рассмотрим функцию

$$\kappa(t)=\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))+x^0(t)-y^0(t), \quad t\in[t_i,t_{i+1}].$$

Тогда, принимая во внимание (1), (12) и (29), имеем

$$\dot\kappa(t)=\partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),u(t))-\beta(t,y(t),y(t-h),s(t),v(t))$$

для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$. Из (26), (29), (30), (32)–(36) и (44) выводим

$$\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),u(t)) \leqslant \beta(t_i,x(t_i),x(t_i-h),s(t_i),u(t))+\zeta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \beta(t_i,x(t_i),x(t_i-h),s(t_i),v(t))+\zeta_1 \leqslant \beta(t,x(t),x(t-h),s(t),v(t))+2\zeta_1$$

для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$. Тогда в согласии с выбором λ и (29), (40), (43) получаем

$$\dot\kappa(t) \leqslant \partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\beta(t,x(t),x(t-h),s(t),v(t))-\beta(t,y(t),y(t-h),s(t),v(t))+2\zeta_1 \leqslant$$

$$\leqslant \partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\lambda(1+\|\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))\|)\|s(t)\|+2\zeta_1.$$

Далее из (12) для всех $t\in(t_i,t_{i+1})$ выводим $\partial\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))/\partial\tau+\lambda(1+\|\nabla_z\eta^{\lambda,\varepsilon}(t,s(t))\|)\|s(t)\| \leqslant 0$.

Таким образом справедливо неравенство

$$\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_{i+1},s(t_{i+1}))+x^0(t_{i+1})-y^0(t_{i+1})=\kappa(t_{i+1}) \leqslant \kappa(t_i)=\eta^{\lambda,\varepsilon}(t_i,s(t_i))+x^0(t_i)+2(t_{i+1}-t_i)\zeta_1. \tag{45}$$

В силу выбора λ_ρ и (32)–(35), (38), (40)–(42) имеем

$$|\rho(t,x(t),x_t(\cdot))-\rho(t,x(t),y_t(\cdot))| \leqslant \lambda_\rho\int\limits_{t_i}^{t}\|y(\xi)-x(\xi)\|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_\rho\lambda_*\delta(t-t_i)+\|r_i-x(t_i)\|(t-t_i) \leqslant 2(t-t_i)\zeta_1.$$

Тогда из (21), (28), (37), (39), (45) выводим (27). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $(\tau,z,w(\cdot))$ и $\zeta>0$. Пусть $\zeta_2=\zeta/3$ и $\zeta_3=\zeta/(3(\vartheta-\tau))$. В силу лемм 6 и 7 определим $\lambda,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$. Пусть $\varepsilon\in(0,\min\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}]$. В соответствии с леммой 7 возьмём разбиение Δ. Тогда, принимая во внимание (2), (3), (9) и условие (ρ_1), выводим

$$J(\tau,z,w(\cdot),U^{\lambda,\varepsilon},\Delta)=J(\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))=\sigma(x(\vartheta))+x^0(\vartheta)=\rho(\vartheta,x(\vartheta),x_\vartheta(\cdot))+x^0(\vartheta) \leqslant$$

$$\leqslant \rho^{\lambda,\varepsilon}(\vartheta,x(\vartheta),x_\vartheta(\cdot))+x^0(\vartheta)+\zeta/3 \leqslant \rho^{\lambda,\varepsilon}(\tau,z,w(\cdot))+2\zeta/3 \leqslant \rho(\tau,z,w(\cdot))+\zeta,$$

где функция $u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau$ определяется в соответствии с пошаговым правилом (26), $x(\cdot)=x(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – движение системы (1), (2), $x^0(\cdot)=x^0(\cdot\mid\tau,z,w(\cdot),u(\cdot))$ – функция, определяемая согласно (5). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
2. *Berkovitz L.* Optimal feedback controls // SIAM J. on Control and Optimiz. 1989. V. 27. № 5. P. 991–1006.
3. *Frankowska H.* Optimal trajectories associated with a solution of the contingent Hamilton–Jacobi equation // Appl. Math. and Optimiz. 1989. V. 19. P. 291–311.
4. *Rowland J.D.L., Vinter R.B.* Construction of optimal feedback controls // Syst. and Control Lett. 1991. V. 16. № 5. P. 357–367.
5. *Clarke F.H., Ledyaev Y.S., Subbotin A.I.* Universal feedback control via proximal aiming in problems of control under disturbance and differential games. Montreal, 1994 (Preprint/Centre de Recherches Mathematiques, Universitede Montreal, № 2386).
6. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Berlin, 1995.
7. *Swiech A.* Sub- and superoptimality principle of dynamic programming revisited // Nonlin. Anal. Theor., Methods and Appl. 1996. V. 26. № 8. P. 1429–1436.
8. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston, 1997.
9. *Nobakhtian S., Stern R.J.* Universal near-optimal feedbacks // J. of Optimiz. Theor. and Appl. 2000. V. 107. № 1. P. 89–122.
10. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
11. *Лукоянов Н.Ю.* Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. № 4. С. 629–643.
12. *Лукоянов Н.Ю.* Об условиях оптимальности гарантированного результата в задачах управления системами с запаздыванием // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 158–169.
13. *Plaksin A.R.* On Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation for time-delay systems // IFAC-Papers-OnLine. 2019. V. 52. № 18. P. 138–143.
14. *Plaksin A.R.* Minimax and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations for time-delay systems // J. Optimiz. Theor. Appl. 2020. V. 187. P. 22–42.
15. *Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 2 (104). С. 77–164.
16. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
17. *Evans L.* Partial Differential Equations. Rhode Island, 1998.
18. *Kim A.V.* Functional Differential Equations. Application of i-Smooth Calculus. Dordrecht, 1999.
19. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.
После доработки 01.06.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.