

УДК 517.977

## О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АФФИННОГО СТАБИЛИЗАТОРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. П. А. Точилин

Рассмотрена задача стабилизации системы нелинейных по фазовым переменным обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами. На допустимые значения позиционного управления наложены жёсткие поточечные ограничения. В предположении достаточной гладкости функций из правой части дифференциальных уравнений построена кусочно-аффинная система, аппроксимирующая исходную нелинейную систему на прямоугольной сетке в заданной области фазового пространства. Стабилизатор может быть найден также в кусочно-аффинной форме, ему соответствует непрерывная, но не везде дифференцируемая функция Ляпунова схожей структуры. Сформулирована и доказана основная теорема о достаточных условиях стабилизируемости системы при помощи кусочно-аффинного управления. Предложен алгоритм построения такого управления, а также функции Ляпунова в некоторой малой окрестности нулевого положения равновесия. Рассмотрен пример численного решения задачи стабилизации для конкретной модельной системы в трёхмерном пространстве.

DOI: 10.31857/S0374064122110097, EDN: MBOXCW

**Введение.** Работа посвящена приближённому решению задачи стабилизации для управляемой системы [1, с. 476–478], заданной при помощи нелинейных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью. Необходимо построить позиционное управление – стабилизатор, для которого заведомо выполнены жёсткие поточечные ограничения и который делает нулевое положение равновесия замкнутой им системы локально асимптотически устойчивым. Необходимо также оценить область притяжения положения равновесия для замкнутой системы.

Указанную задачу можно решать с помощью кусочной линеаризации исходных нелинейных уравнений на заданной сетке из многогранников в фазовом пространстве. На этой сетке необходимо построить кусочно-аффинную функцию Ляпунова, а также соответствующее ей кусочно-аффинное позиционное управление.

Кусочно-аффинные функции Ляпунова успешно используются для изучения устойчивости нелинейных (в частности, кусочно-аффинных) систем. Так, в работе [2] показано, что для системы дифференциальных уравнений с гладкой правой частью и экспоненциально устойчивым нулевым положением равновесия всегда можно построить локальную непрерывную кусочно-линейную функцию Ляпунова. Данная функция может быть далее достроена до непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова, позволяющей оценить область притяжения нулевого положения равновесия.

В работе [3] предложен алгоритм построения непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова для задачи синтеза управлений в нелинейной системе дифференциальных уравнений. Задача стабилизации сведена к проблеме исследования слабой асимптотической устойчивости для вспомогательного дифференциального включения. Функцию цены, определённую на совокупности симплексов в фазовом пространстве, предлагается определять за счёт решения вспомогательной задачи линейного программирования. При этом используется кусочно-постоянное позиционное управление, относительно которого априори неизвестно, будет ли оно *допустимым*, т.е. порождающим траектории рассматриваемой системы. В упомянутой работе этот вопрос остался неисследованным.

Статья [4] посвящена построению непрерывной кусочно-аффинной функции Ляпунова, а также кусочно-аффинного позиционного управления для задачи стабилизации системы с переключениями – гибридной системы [5]. Условия переключений между несколькими разными дифференциальными уравнениями (режимами функционирования) являются частью управления совокупной гибридной системой. Предложен алгоритм построения указанных функций

с разными областями притяжения положения равновесия замкнутой системы, получена оценка этой области. Обоснована допустимость построенного кусочно-аффинного управления.

В работе [6] рассмотрена задача оптимального управления нелинейной системой с интегральным функционалом на бесконечном отрезке времени. Для решения задачи использована функция цены, построенная на совокупности симплексов в фазовом пространстве, а искомое субоптимальное позиционное управление найдено в кусочно-аффинной форме. В отличие от предыдущих результатов здесь также предложен более общий подход к построению разрывной кусочно-аффинной функции цены. Этот метод может быть также применён и при решении задачи стабилизации для нелинейной системы.

В настоящей статье предложен альтернативный к упомянутым выше подход к параметризации кусочно-аффинных функций Ляпунова в задаче стабилизации нелинейной системы: вместо сетки из симплексов в фазовом пространстве используется совокупность прямоугольных параллелепипедов. Теперь функции цены и управления нельзя однозначно определить своими (независимыми) значениями в вершинах. В результате получаются другие формулы для расчёта указанных функций, более простые с точки зрения расчётов, поскольку не нужно вычислять матрицы перехода от глобальных декартовых координат к барицентрическим координатам в рамках каждого конкретного симплекса. При этом, однако, повышается размерность во вспомогательных задачах оптимизации, которые необходимо решать при построении функции цены. Для вычисления этой функции, а также позиционного управления, предложен алгоритм, основой которого является решение цепочки вспомогательных задач линейного программирования. Вычисления по такому алгоритму могут быть проведены достаточно эффективно, в том числе и для систем большой размерности. Работа этого алгоритма продемонстрирована на конкретном модельном примере.

**1. Задача стабилизации для нелинейной системы.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь гладкие функции  $f(x) \in C^2(\Omega)$ ,  $f(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$ ,  $g(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  определены при  $x \in \Omega = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Точка  $x = 0$  является внутренней для множества  $\Omega$ , т.е.  $a_i < 0 < b_i$  для любых  $i = \overline{1, n}$ .

На допустимые значения позиционного управления  $u = u(x) \in \mathbb{R}^m$  наложены жёсткие поточечные ограничения:  $u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ , где множество  $\mathcal{P}$  является выпуклым компактом.

*Допустимым управлением* назовём такую функцию  $u = u(x)$ , которая удовлетворяет указанному выше поточечному ограничению, а также порождает траектории системы (1), т.е. для любого начального условия  $x(0) = x_0 \in \Omega$  задача Коши для дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$  должна иметь единственное решение  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ , определённое при  $t \geq 0$ , по крайней мере до момента выхода траектории на границу  $\Omega$ . Эти условия, в частности, будут выполнены, если функция  $u(x)$  удовлетворяет условию Липшица при  $x \in \Omega$ . Также предположим, что для допустимого управления  $u(x)$  должно быть выполнено условие  $u(0) = 0$ . Будем далее рассматривать траектории замкнутой системы лишь до момента возможного выхода на границу  $\Omega$ , не накладывая в связи с этим никаких дополнительных априорных ограничений на допустимые управления.

Решаемая в данной работе задача стабилизации состоит в поиске таких множества  $\mathcal{X} \subset \Omega$  и допустимого управления  $u(x)$ , определённого при  $x \in \mathcal{X}$ , что система дифференциальных уравнений  $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$  будет обладать асимптотически устойчивым нулевым положением равновесия с областью притяжения  $\mathcal{X}$ , т.е. для любых  $x_0 \in \mathcal{X}$  и  $t \geq 0$  должно быть выполнено условие существования предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}\| = 0, \quad x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X},$$

где  $x(t, 0, x_0)|_{u(\cdot)}$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , – траектория системы  $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$ , выпущенная из начальной позиции  $x(0) = x_0$ . Заметим, что данное определение асимптотической устойчивости является более сильным, чем традиционное, так как здесь сочетаются требования инвариантности множества  $\mathcal{X}$  и принадлежности ему начальной позиции, т.е. не рассматриваются

траектории, которые стартуют вне  $\mathcal{X}$  и попадают в это множество в какой-то промежуточный момент времени. Данное ограничение связано с особенностями основного алгоритма, который будет приведён далее. Кроме того, это сильное требование позволяет не следить за возможным выходом траектории замкнутой системы за границу  $\Omega$  в какие-то промежуточные моменты времени, так как  $\mathcal{X} \subset \Omega$ .

Для решения задачи стабилизации далее воспользуемся традиционным подходом, предполагающим поиск наряду с управлением  $u(x)$  также соответствующей функции Ляпунова  $V(x)$ . Последняя может быть использована для доказательства асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия замкнутой системы.

**2. Кусочная линейаризация дифференциальных уравнений.** Каждый из отрезков  $[a_i, b_i]$  разобьём на  $N_i \in \mathbb{N}$  частей:

$$x_i \in [a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{N_i-1} [x_i^{(j)}, x_i^{(j+1)}], \quad x_i^{(0)} = a_i, \quad x_i^{(N_i)} = b_i.$$

Будем считать, что для каждого  $i = \overline{1, n}$  найдётся номер  $j_i^* \in \{1, \dots, N_i - 1\}$  такой, что  $x_i^{(j_i^*)} = 0$ , т.е. начало координат является одной из точек разбиения.

Для каждой пары индексов  $i, j$  введём обозначения

$$z_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j)} + x_i^{(j+1)}}{2}, \quad \delta_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}}{2}.$$

Для нумерации вершин и многогранных частей полученного разбиения области  $\Omega$  будем далее использовать мультииндексы

$$\bar{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{0, \dots, N_1\} \times \dots \times \{0, \dots, N_n\}.$$

Множество всех таких индексов  $\bar{j}$  обозначим через  $\mathcal{J}$ . Кроме того, через  $\mathcal{J}_0$  обозначим совокупность всех мультииндексов  $\bar{j} \in \mathcal{J}$ , для которых  $j_i < N_i$  при любом  $i = \overline{1, n}$ . Мультииндекс, соответствующий нулевому положению равновесия, обозначим через  $\bar{j}^*$ . Пусть  $z^{(\bar{j})} \in \mathbb{R}^n$  – вектор с компонентами  $z_i^{(j_i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Аналогично  $\delta^{(\bar{j})} \in \mathbb{R}^n$  – вектор с компонентами  $\delta_i^{(j_i)}$ . Введём также обозначение для части области  $\Omega$ :

$$\Omega^{(\bar{j})} = [x_1^{(j_1)}, x_1^{(j_1+1)}] \times \dots \times [x_n^{(j_n)}, x_n^{(j_n+1)}] \quad \text{для любого } \bar{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{J}_0.$$

Точка  $x^{(\bar{j})} = (x_1^{(j_1)}, \dots, x_n^{(j_n)})$  является вершиной многогранника  $\Omega^{(\bar{j})}$ , обладающей наименьшими координатами.

Рассмотрим теперь линейаризованную систему (1):

$$\dot{x}_i = f_i(z^{(\bar{j})}) + (f'_i(z^{(\bar{j})}))^T(x - z^{(\bar{j})}) + g_i(z^{(\bar{j})})u + \nu_i^{(\bar{j})}(x), \quad \text{если } x_i \in [x_i^{(j_i)}, x_i^{(j_i+1)}], \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь  $f'_i(\cdot)$  – градиент функции  $f_i(\cdot)$ ,  $g_i(\cdot)$  –  $i$ -я строка матрицы  $g(\cdot)$ . Погрешность линейаризации  $\nu_i^{(\bar{j})}(x)$ , далее интерпретируемую как неопределённость, можно оценить следующим образом:

$$\nu_i^{(\bar{j})}(x) \in [R_{i,-}^{(\bar{j})}, R_{i,+}^{(\bar{j})}], \tag{2}$$

$$R_{i,-}^{(\bar{j})} = \frac{1}{2} \|\delta^{(\bar{j})}\|^2 \min_{\xi \in \Omega^{(\bar{j})}} \lambda_{\min}(f''_i(\xi)) - \|\delta^{(\bar{j})}\| \sum_{k=1}^m \max_{\eta \in \Omega^{(\bar{j})}} \|g'_{ik}(\eta)\| \rho(\mathbf{e}_k | \mathcal{P}),$$

$$R_{i,+}^{(\bar{j})} = \frac{1}{2} \|\delta^{(\bar{j})}\|^2 \max_{\xi \in \Omega^{(\bar{j})}} \lambda_{\max}(f''_i(\xi)) + \|\delta^{(\bar{j})}\| \sum_{k=1}^m \max_{\eta \in \Omega^{(\bar{j})}} \|g'_{ik}(\eta)\| \rho(\mathbf{e}_k | \mathcal{P}).$$

Здесь  $f_i''(\cdot)$  – матрица из вторых производных функции  $f_i(\cdot)$ ,  $\lambda_{\min}(Q)$ ,  $\lambda_{\max}(Q)$  – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения некоторой симметричной матрицы  $Q$ ,  $\rho(l|\mathcal{P})$  – значение опорной функции ко множеству  $\mathcal{P}$  в направлении  $l \in \mathbb{R}^m$ , а  $e_k$  –  $k$ -й орт в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

**3. Кусочно-аффинные функции  $V(x)$  и  $u(x)$ .** Для решения задачи стабилизации далее используем непрерывную кусочно-аффинную функцию Ляпунова, которая может быть задана следующей формулой:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha^{(j_i)}(x_i)v_i^{(j_i)} + (1 - \alpha^{(j_i)}(x_i))v_i^{(j_i+1)}), \quad \text{если } x_i \in [x_i^{(j_i)}, x_i^{(j_i+1)}], \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Здесь

$$\alpha^{(j_i)}(x_i) = \frac{x_i^{(j_i+1)} - x_i}{x_i^{(j_i+1)} - x_i^{(j_i)}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j_i = \overline{0, N_i - 1},$$

а параметры  $v_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{0, N_i}$ , будут найдены далее. Эти величины однозначно задают непрерывную кусочно-аффинную функцию  $V(x)$  на совокупности областей  $\Omega^{(\bar{j})}$ ,  $\bar{j} \in \mathcal{J}_0$ . Данная функция является дифференцируемой по любому направлению в любой точке  $x \in \text{int } \Omega$ . На границах множеств  $\Omega^{(\bar{j})}$  эта функция может быть недифференцируема в обычном смысле.

На величины  $v_i^{(j)}$  наложим следующие ограничения:

$$v_i^{(j_i^*)} = 0 \quad \text{для любого } i = \overline{1, n}, \quad \text{т.е. } V(x^{(\bar{j}^*)}) = V(0) = 0, \quad (4)$$

$$V(x^{(\bar{j})}) = \sum_{i=1}^n v_i^{(j_i)} > 0 \quad \text{для любого индекса } \bar{j} \in \mathcal{J} \quad \text{такого, что } \bar{j} \neq \bar{j}^*. \quad (5)$$

Заметим, что так как функция  $V(x)$  является аффинной в каждой из областей  $\Omega^{(\bar{j})}$ , то при выполнении условий (4), (5)  $V(x) > 0$  при любом  $x \neq 0$ .

Далее будем использовать непрерывное кусочно-аффинное позиционное управление вида

$$u(x) = \sum_{i=1}^n (\alpha^{(j_i)}(x_i)u_i^{(j_i)} + (1 - \alpha^{(j_i)}(x_i))u_i^{(j_i+1)}), \quad \text{если } x_i \in [x_i^{(j_i)}, x_i^{(j_i+1)}], \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где векторы  $u_i^{(j_i)} \in \mathbb{R}^m$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j_i = \overline{0, N_i}$ , необходимо определить. Кроме того, положим  $u_i^{(j_i^*)} = 0$  при всех  $i = \overline{1, n}$ . Пусть для любой вершины  $x^{(\bar{j})}$  рассматриваемых многогранников

$$u(x^{(\bar{j})}) = \sum_{i=1}^n u_i^{(j_i)} \in \mathcal{P}. \quad (7)$$

Поскольку каждая компонента вектор-функции  $u(x)$  является аффинной в каждой области  $\Omega^{(\bar{j})}$ , то из условия (7) вытекает, что  $u(x) \in \mathcal{P}$ ,  $x \in \Omega$ .

При любых фиксированных значениях  $u_i^{(j_i)}$  кусочно-аффинная функция  $u(x)$  удовлетворяет условию Липшица в области  $\Omega$ , а потому данное управление является допустимым.

Пусть  $x \in \text{int } \Omega^{(\bar{j})}$  для некоторого индекса  $\bar{j}$ . Рассмотрим производную функции Ляпунова вдоль траектории линеаризованной системы, замкнутой кусочно-аффинным управлением  $u(x)$  при  $x \in \Omega^{(\bar{j})}$ :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_i+1)} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_i+1)} - x_i^{(j_i)}} (f_i(z^{(\bar{j})}) + (f_i'(z^{(\bar{j})}))^T(x - z^{(\bar{j})}) + g_i(z^{(\bar{j})})u(x) + \nu_i^{(\bar{j})}(x)). \quad (8)$$

Используя (8) и (2), запишем теперь достаточное условие определённой отрицательности полной производной функции цены в какой-либо вершине  $h$  многогранника  $\Omega^{(\bar{j})}$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} \left[ f_i(z^{(\bar{j})}) + \frac{R_{i,-}^{(\bar{j})} + R_{i,+}^{(\bar{j})}}{2} + \operatorname{sgn}(v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}) \frac{R_{i,+}^{(\bar{j})} - R_{i,-}^{(\bar{j})}}{2} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} ((f'_i(z^{(\bar{j})}))^\top (h - z^{(\bar{j})}) + g_i(z^{(\bar{j})})u(h)) \leq -\varepsilon \min\{\|h\|, 1\}. \tag{9}$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – малое фиксированное число.

Далее для некоторого множества  $\mathcal{X}$  через  $\partial\mathcal{X}$  обозначим множество его граничных точек, а через  $\operatorname{int}\mathcal{X}$  – множество всех внутренних точек.

Приведённые выше предварительные построения позволяют теперь сформулировать основное утверждение, задающее достаточные условия для решения задачи стабилизации с использованием кусочно-аффинных функций  $V(x)$  и  $u(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}_0$  – некоторое множество мультииндексов  $\bar{j}$ ,  $\mathcal{X}_0 = \bigcup_{\bar{j} \in \mathcal{J}^*} \Omega^{(\bar{j})}$ .

Пусть найдены такие  $v_i^{(j_i)}$ ,  $u_i^{(j_i)}$  (для различных  $i$ ,  $j_i$ ), что для любых  $\bar{j} \in \mathcal{J}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , выполнены условия (4), (5), (7), (9) (последнее условие выполнено для любой вершины  $h$  множества  $\Omega^{(\bar{j})}$ ). Построим множество

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{X}_0 : V(x) \leq V_{\min}\}, \tag{10}$$

$$V_{\min} = \min\{V(h) : h - \text{вершина } \Omega^{(\bar{j})}, \bar{j} \in \mathcal{J}^*, h \in \partial\mathcal{X}_0\}. \tag{11}$$

Предположим, что  $0 \in \operatorname{int}\mathcal{X}$ . Тогда кусочно-аффинное управление  $u(x)$ , определённое согласно формуле (6), решает задачу стабилизации для системы (1), причём областью притяжения нулевого положения равновесия замкнутой этим управлением системы является множество  $\operatorname{int}\mathcal{X}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $x \in \Omega^{(\bar{j})} \cap \operatorname{int}\mathcal{X}_0$ ,  $\bar{j} \in \mathcal{J}^*$ , и оценим производную функции Ляпунова  $V(x)$ , построенной согласно формуле (3), вдоль траектории системы (1), замкнутой при помощи управления (6). Предположим, что  $x$  и  $\bar{j}$  выбраны таким образом, что вектор  $f(x) + g(x)u(x)$  указывает либо внутрь  $\Omega^{(\bar{j})}$ , либо вдоль границы этого многогранника. Для любого  $x$  всегда можно подобрать подходящий индекс  $\bar{j} \in \mathcal{J}^*$ .

Для оценки производной функции Ляпунова используем условие (9), а также оценку для погрешности линеаризации (2):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} \left( f_i(z^{(\bar{j})}) + (f'_i(z^{(\bar{j})}))^\top (x - z^{(\bar{j})}) + \right. \\ & \left. + g_i(z^{(\bar{j})}) \sum_{i=1}^n (\alpha^{(j_i)}(x_i)u_i^{(j_i)} + (1 - \alpha^{(j_i)}(x_i))u_i^{(j_{i+1})}) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \max \left\{ R_{i,-}^{(\bar{j})} \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}}, R_{i,+}^{(\bar{j})} \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} \right\}. \end{aligned}$$

Полученная функция является линейной относительно переменной  $x$ . Эта функция достигает своего максимума хотя бы в одной вершине многогранника  $\Omega^{(\bar{j})}$ . Кроме того, выражение в третьей строке можно записать через функцию  $\operatorname{sgn}$  аналогично (9). В итоге получим, что

$$\dot{V}(x) \leq \max_h \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} \left[ f_i(z^{(\bar{j})}) + \frac{R_{i,-}^{(\bar{j})} + R_{i,+}^{(\bar{j})}}{2} + \operatorname{sgn}(v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}) \frac{R_{i,+}^{(\bar{j})} - R_{i,-}^{(\bar{j})}}{2} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left. \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} ((f'_i(z^{(\bar{j})}))^T (h - z^{(\bar{j})}) + g_i(z^{(\bar{j})})u(h)) : h - \text{вершина } \Omega^{(\bar{j})} \right\} \leq \\
 & \leq -\varepsilon \min_h (\min\{\|h\|, 1\}) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Заметим, что полученное выражение может быть равно нулю только в том случае, если  $h = 0$  является одной из вершин  $\Omega^{(\bar{j})}$ . При этом в других вершинах этого многогранника анализируемая линейная функция принимает значения, отличные от нуля. Следовательно, равенство нулю этой линейной функции возможно только при  $x = 0$ , т.е. доказано, что

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ для любого } x \in \text{int } \mathcal{X}_0, \quad x \neq 0.$$

Более того, можно показать, что для любого  $\eta > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что  $\dot{V}(x) \leq -\delta$  при всех  $x \in \text{int } \mathcal{X}_0, \|x\| \geq \eta$ .

Из доказанного свойства монотонности функции  $V(x)$  вдоль траекторий системы, а также из определения множества  $\mathcal{X}$  следует, что если траектория замкнутой системы стартует из  $\text{int } \mathcal{X}$ , то она не может достичь границы  $\partial \mathcal{X}$ , а значит, никогда не выйдет за пределы этого множества.

Заметим также, что из условий (4) и (5) следует, что  $V(x)$  является определённо положительной функцией в  $\mathcal{X}_0$ . Далее, следуя схеме доказательства классической теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [7, с. 25; 8, с. 81–82], можно показать, что нулевое положение равновесия замкнутой системы является асимптотически устойчивым с областью притяжения  $\text{int } \mathcal{X}$ .

**4. Алгоритм построения кусочно-аффинных функций  $V(x)$  и  $u(x)$ .** Рассмотрим теперь конкретный алгоритм построения кусочно-аффинной функции Ляпунова  $V(x)$ , а также управления  $u(x)$ , удовлетворяющих условиям теоремы. Попутно будет построена, по возможности максимальная по включению, область притяжения  $\mathcal{X}$  нулевого положения равновесия. Множество  $\mathcal{X}$ , вообще говоря, зависит от  $\Omega$ , но в данной работе эта зависимость подробно не исследуется.

Основная идея алгоритма схожа с предложенной в работе [4], но с учётом другой структуры используемых кусочно-аффинных функций. В этом алгоритме проводятся многократные попытки добавлять совокупности соседних множеств  $\Omega^{(\bar{j})}$  к ранее обработанным, подсчитывая значения  $v_i^{(j_i)}, u_i^{(j_i)}$  в соответствующих вершинах. При этом на каждом шаге алгоритма следует проверять выполнение условий основной теоремы. Если на очередном шаге не удастся добавить (обработать) какие-либо новые множества  $\Omega^{(\bar{j})}$ , то алгоритм завершит работу.

Для упрощения расчётов будем далее считать, что множество допустимых значений управлений  $\mathcal{P}$  является выпуклым многогранником в  $\mathbb{R}^m$  и может быть задано при помощи совокупности линейных неравенств\*):

$$\mathcal{P} = \{u \in \mathbb{R}^m : Du \preceq \gamma\}, \quad D \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^l.$$

Каждой вершине  $x^{(\bar{k})}$  множеств  $\Omega^{(\bar{j})}$  сопоставим вспомогательную величину  $\sigma^{(\bar{k})}$ , принимающую значения, равные нулю и единице, и показывающую, были ли уже в этой вершине подсчитаны значения  $v_i^{(\bar{k})}, u_i^{(\bar{k})}$ . Кроме того, каждому множеству  $\Omega^{(\bar{j})}$  сопоставим вспомогательную величину  $\eta^{(\bar{j})}$ , которая может принимать три значения:  $\eta^{(\bar{j})} = 0$ , если данное множество ещё не было обработано алгоритмом;  $\eta^{(\bar{j})} = 1$ , если множество уже было успешно обработано алгоритмом и было добавлено ко множеству  $\mathcal{X}_0$ ;  $\eta^{(\bar{j})} = -1$ , если множество уже было обработано алгоритмом, но за его счёт не удалось расширить область притяжения.

Будем говорить, что два разных множества  $\Omega^{(\bar{j})}$  и  $\Omega^{(\bar{k})}$  являются соседними, если они пересекаются по общей грани максимальной возможной размерности (т.е. имеют ровно  $n$  общих вершин). Множества  $\Omega^{(\bar{j})}, \dots, \Omega^{(\bar{s})}$  назовём *соседними*, если их можно упорядочить так,

\*) Символ “ $\preceq$ ” соответствует покомпонентному неравенству для векторов одинаковой длины.

что в полученной цепочке каждое следующее множество является соседним по отношению к какому-либо предыдущему.

Зафиксируем также вспомогательный параметр – натуральное число  $S$ .

*Шаг 1.* Изначально положим  $v_i^{(\bar{j}^*)} = 0$ ,  $u_i^{(\bar{j}^*)} = 0$  для любого  $i = \overline{1, n}$ . Также пусть  $\sigma^{(\bar{j}^*)} = 1$ . Для всех других вершин  $\sigma^{(\bar{j})} = 0$ . Также пусть  $\mathcal{J}^* = \emptyset$ ,  $\mathcal{X}_0 = \emptyset$ ,  $V_{\min} = 0$ . Для каждого  $\bar{j}$  пусть  $\eta^{(\bar{j})} = 0$ .

*Шаг 2.* Возьмём некоторую совокупность соседних множеств  $\Omega^{(\bar{j})}$ ,  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}_0$ , для которых либо  $x^{(\bar{j}^*)} = 0$  является одной из их вершин, либо хотя бы одно из этих множеств является соседним со множеством  $\Omega^{(\bar{k})}$ , для которого  $\eta^{(\bar{k})} = 1$ . Кроме того, для каждого из таких множеств должно быть выполнено условие  $\eta^{(\bar{j})} = 0$ . Если удовлетворяющих этим условиям множеств не существует, то алгоритм переходит к завершающему шагу 12. В противном случае начинается описанная ниже обработка найденных многогранников.

*Шаг 3.* Выполняется последовательный перебор разных вариантов значений функций  $\text{sgn}$  в формулах (9) для всех возможных  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$  только для ещё не найденных величин  $v_i^{(j_i)}$  или  $v_i^{(j_i+1)}$ . Каждый такой вариант соответствует некоторой системе неравенств для искомым величин  $v_i^{(\bar{k})}$ , а выражения в квадратных скобках в (9) можно далее считать постоянными. Следующие четыре шага алгоритма выполняются отдельно для каждого такого варианта.

*Шаг 4.* Для каждого  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$  используем далее вспомогательный вектор  $d^{(\bar{j})} \in \mathbb{R}^n$ . Изначально пусть

$$d^{(\bar{j})} = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(v_i^{(j_i+1)} - v_i^{(j_i)})g_i(z^{(\bar{j})}).$$

Здесь учитывается, что значения функций  $\text{sgn}$  ранее были зафиксированы.

Если вектор  $d^{(\bar{j})}$  не нулевой, то дополнительно нормируем его:  $d^{(\bar{j})} = d^{(\bar{j})} / \|d^{(\bar{j})}\|$ .

Положим  $s = 1$  (вспомогательный индекс).

*Шаг 5. Поиск управлений.* Определим значения  $u_i^{(\bar{k})}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $x^{(\bar{k})} \in \bigcup_{\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}} \Omega^{(\bar{j})}$ ,  $\sigma^{(\bar{k})} = 0$ , решив вспомогательную задачу линейного программирования:

$$\sum_{\bar{j}} \sum_{\bar{k}} \left\{ d^{(\bar{j})} \sum_{i=1}^n u_i^{(\bar{k})} : x^{(\bar{k})} \in \Omega^{(\bar{j})}, \sigma^{(\bar{k})} = 0, \bar{j} \in \hat{\mathcal{J}} \right\} \rightarrow \min$$

при линейных ограничениях

$$D \left( \sum_{i=1}^n u_i^{(\bar{k})} \right) \leq \gamma \quad \text{для любого } \bar{k} \text{ такого, что } x^{(\bar{k})} \in \bigcup_{\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}} \Omega^{(\bar{j})}, \sigma^{(\bar{k})} = 0.$$

*Шаг 6. Поиск значений функции Ляпунова.* Определим значения  $v_i^{(\bar{k})}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $x^{(\bar{k})} \in \bigcup_{\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}} \Omega^{(\bar{j})}$ ,  $\sigma^{(\bar{k})} = 0$ , решив вспомогательную задачу линейного программирования. Задача оптимизации при этом имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\bar{k}} \left\{ v_i^{(\bar{k})} : x^{(\bar{k})} \in \bigcup_{\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}} \Omega^{(\bar{j})}, \sigma^{(\bar{k})} = 0 \right\} \rightarrow \min. \tag{12}$$

Линейные ограничения на искомые параметры  $v_i^{(\bar{k})}$  определяются следующим образом:

(а) Условия положительности значений функции Ляпунова и одновременно расширения потенциальной области притяжения  $\mathcal{X}_0$ :

$$\sum_{i=1}^n v_i^{(\bar{k})} \geq \max\{\varepsilon \min\{\|x^{(\bar{k})}\|, 1\}, V_{\min}\} \quad \text{для любого } x^{(\bar{k})} \in \bigcup_{\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}} \Omega^{(\bar{j})} \text{ такого, что } \sigma^{(\bar{k})} = 0.$$

(b) Ограничения на  $v_i^{(\bar{k})}$  для вычисления  $\text{sgn}$  в (9) (см. шаг 3 алгоритма).

(c) Условия отрицательности производной функции Ляпунова вдоль траектории замкнутой системы (9) для каждого  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$  и каждой соответствующей вершины  $h$  (в том числе для вершин, уже обработанных на предыдущих итерациях). При этом в формулах (9) используются управляющие параметры  $u_i^{(\bar{k})}$ , найденные на предыдущем шаге 5, на данной итерации работы алгоритма.

*Шаг 7.* Если удалось решить задачи линейного программирования и найти значения  $u_i^{(\bar{k})}$  и  $v_i^{(\bar{k})}$ , то проверяется выполнение следующего условия:

- либо  $s = 1$  (т.е. это первая итерация работы);
- либо  $s > 1$ , и значение функционала (12), найденное на этой итерации, меньше аналогичного значения, найденного на предыдущей итерации, с номером  $s - 1$ .

Если указанное условие выполнено и  $s < S$ , то производятся следующие действия:

- значение  $s$  увеличивается на единицу;
- для каждого  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$  заново рассчитывается вектор

$$d^{(\bar{j})} = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{(j_{i+1})} - v_i^{(j_i)}}{x_i^{(j_{i+1})} - x_i^{(j_i)}} g_i(z^{(\bar{j})}),$$

если вектор  $d^{(\bar{j})}$  не нулевой, то дополнительно нормируем его:  $d^{(\bar{j})} = d^{(\bar{j})} / \|d^{(\bar{j})}\|$ ;

- алгоритм снова переходит к шагу 5.

В противном случае алгоритм переходит либо к обработке следующего варианта значений функций  $\text{sgn}$  в соответствующих формулах (9), либо к шагу 8, завершающему такую обработку.

*Шаг 8.* Задачи линейного программирования из шага 7 должны быть решены для разных вариантов значений функций  $\text{sgn}$  в соответствующих формулах (9). Среди задач, которые имеют решения, выделим ту, в которой значение функции (12) получилось наименьшим.

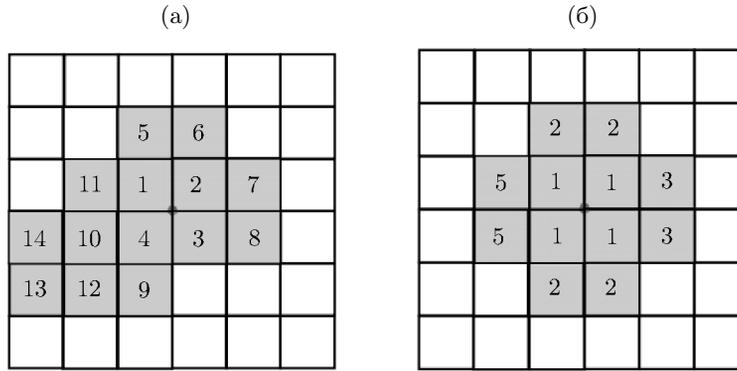
*Шаг 9.* Если в предыдущих шагах удалось найти решение задачи линейного программирования для оптимального варианта значений функций  $\text{sgn}$  в формулах (9), то ко множеству  $\mathcal{X}_0$  добавляются многогранники  $\Omega^{(\bar{j})}$ ,  $\bar{j} \in \hat{\mathcal{J}}$ , а ко множеству  $\mathcal{J}^*$  – соответствующие индексы  $\hat{\mathcal{J}}$ . Для каждого обработанного на данном шаге множества  $\Omega^{(\bar{j})}$  положим  $\eta^{(\bar{j})} = 1$ . Для каждой вершины  $x^{(\bar{k})}$  указанных множеств положим  $\sigma^{(\bar{k})} = 1$ . Запоминаются значения  $v_i^{(\bar{k})}$ ,  $u_i^{(\bar{k})}$ , полученные в результате решения задачи линейного программирования. Кроме того, необходимо заново пересчитать величину  $V_{\min}$  по формуле (11).

*Шаг 10.* Если же выше не удалось найти решения задач линейного программирования, то для каждого рассмотренного на данном шаге множества  $\Omega^{(\bar{j})}$  положим  $\eta^{(\bar{j})} = -1$ .

*Шаг 11.* Алгоритм переходит снова к шагу 2, т.е. к следующей попытке добавить какие-то множества  $\Omega^{(\bar{j})}$  к конструируемому множеству  $\mathcal{X}_0$ .

*Шаг 12. Завершение работы.* На выходе имеем множества  $\mathcal{X}_0$  и  $\mathcal{J}^*$ , задающие область притяжения нулевого положения равновесия, а также величины  $v_i^{(\bar{j})}$ ,  $u_i^{(\bar{j})}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\bar{j} \in \mathcal{J}^*$ . Теперь можно определить множество  $\mathcal{X}$  согласно (10), а также построить кусочно-аффинные функции Ляпунова и позиционного управления (стабилизатора) по формулам (3), (6).

Для одной и той же системы (1) приведённый алгоритм может построить разные множества  $\mathcal{X}_0$  и определённые на них кусочно-аффинные функции  $V(x)$  и  $u(x)$ . Это связано с тем, что в шаге 2 можно выбирать очередные обрабатываемые области  $\Omega^{(\bar{j})}$  разными способами. Одна из возможностей – обрабатывать эти множества по одному за шаг работы алгоритма (рис. 1, а) аналогично тому, как было описано в работе [4] для случая системы с переключениями и сетки из симплексов. Такой подход минимизирует сложность вычислений на каждом отдельном шаге работы алгоритма, однако количество таких шагов может быть большим. Возможны и другие подходы, когда за один шаг работы алгоритма обрабатывается сразу совокупность множеств  $\Omega^{(\bar{j})}$ , например, как показано на рис. 1, б.



**Рис. 1.** Множества  $\mathcal{X}$ , полученные при разных правилах выбора очередных обрабатываемых многогранников  $\Omega^{(j)}$ . Числами обозначены номера итераций алгоритма, на которых  $\Omega^{(j)}$  добавлены в  $\mathcal{X}$ .

Заметим, что поскольку на каждом шаге работы алгоритма отслеживается выполнение условий теоремы, то если  $0 \in \text{int } \mathcal{X}$ , можно утверждать, что множество  $\mathcal{X}$  является множеством притяжения для нулевого положения равновесия системы (1) при использовании построенного кусочно-аффинного стабилизатора вида (6).

Решаемые на каждом шаге работы алгоритма подзадачи линейного программирования могут быть решены эффективно (см. [9, с. 297–303]) за полиномиальное время в зависимости как от количества переменных  $(v_i^{(k)}, u_i^{(k)})$ , так и от количества линейных неравенств (ограничений). Это позволяет применять алгоритм для решения задач стабилизации сложных систем с большой размерностью вектора фазовых переменных.

**5. Пример.** В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации угловых скоростей квадрокоптера, зависшего в заданной точке пространства. Для этого используем математическую модель, подробно описанную в статье [10]. Дифференциальные уравнения для трёх компонент угловой скорости выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_{xx}\dot{w}_\varphi &= \frac{d}{\sqrt{2}}F_2 - w_\psi w_\theta(I_{zz} - I_{yy}), & I_{zz}\dot{w}_\psi &= dF_4 - w_\varphi w_\theta(I_{yy} - I_{xx}), \\
 I_{yy}\dot{w}_\theta &= \frac{d}{\sqrt{2}}F_3 - w_\varphi w_\psi(I_{xx} - I_{zz}), & &
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

где  $F_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ,  $F_2 = -p_1 + p_2 + p_3 - p_4$ ,  $F_3 = -p_1 - p_2 + p_3 + p_4$ ,  $F_4 = -p_1 + p_2 - p_3 + p_4$ ,  $p_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , – тяги, создаваемые отдельными двигателями. На каждый из управляющих параметров  $p_i$  задано поточечное ограничение:  $p_i \in [0, p_{\max}]$ . Величина  $F_1$  соответствует подъемной силе для центра масс аппарата и считается фиксированной:  $F_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = mg$ . Другие величины  $F_2, F_3, F_4$  могут изменяться, позволяя квадрокоптеру изменять ориентацию в пространстве.

Введём обозначения  $x = (w_\varphi, w_\psi, w_\theta)^T$  для вектора фазовых переменных и запишем систему (13) в виде

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \quad u \in \mathcal{P},$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} c_1 x_2 x_3 \\ c_2 x_1 x_3 \\ c_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{2}I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{I_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{\sqrt{2}I_{yy}} \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}, \quad c_2 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}, \quad c_3 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}.$$

Множество  $\mathcal{P}$  – выпуклый многогранник в пространстве переменных  $u = (F_2, F_4, F_3)^T$ , который задаётся следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} 0 \leq mg - F_2 - F_3 - F_4 \leq 4p_{\max}, \quad 0 \leq mg + F_2 - F_3 + F_4 \leq 4p_{\max}, \\ 0 \leq mg + F_2 + F_3 - F_4 \leq 4p_{\max}, \quad 0 \leq mg - F_2 + F_3 + F_4 \leq 4p_{\max}. \end{aligned}$$

Используемые при линеаризации уравнений градиенты функций  $f_i$  имеют вид

$$f'_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 x_3 \\ c_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad f'_2(x) = \begin{pmatrix} c_2 x_3 \\ 0 \\ c_2 x_1 \end{pmatrix}, \quad f'_3(x) = \begin{pmatrix} c_3 x_2 \\ c_3 x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы вторых производных выглядят следующим образом:

$$f''_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно легко найти оценки на погрешности линеаризации:

$$R_{i,-}^{(\bar{j})} = -\frac{c_i}{2} \|\delta^{(\bar{j})}\|^2, \quad R_{i,+}^{(\bar{j})} = \frac{c_i}{2} \|\delta^{(\bar{j})}\|^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

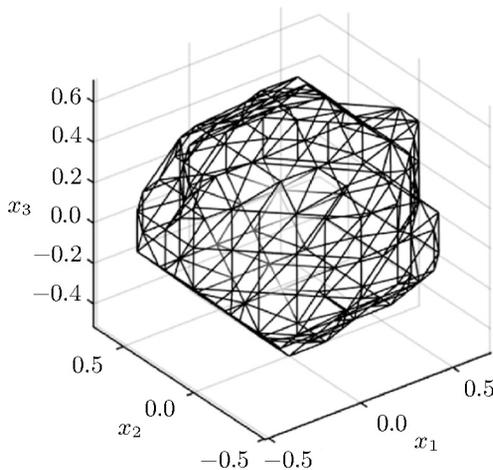


Рис. 2. Область притяжения  $\mathcal{X}$ .

Для расчётов используем параметры квадрокоптера из работы [10]:  $d = 0.09$  м,  $m = 0.5$  кг,  $I_{xx} = I_{yy} = 0.0021435$  кг·м/рад,  $I_{zz} = 0.001$  кг·м/рад,  $p_{\max} = 1.33$  Н. При помощи приведённого выше алгоритма удалось построить кусочно-аффинные функции Ляпунова и управления в малой окрестности нулевого положения равновесия. На рис. 2 изображена полученная в результате расчётов область притяжения замкнутой системы, являющаяся множеством уровня кусочно-аффинной функции Ляпунова  $V(x)$ . В примере  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , отрезки  $[0, 1]$  были разбиты на  $n = 10$  частей. Алгоритм проработал 100 итераций с максимальным количеством попыток решения подзадач линейного программирования  $S = 3$ . На каждой итерации обрабатывалась одна очередная многогранная область  $\Omega^{(\bar{j})}$ , соседняя по отношению к ранее обработанным.

**Заключение.** Рассмотрена задача стабилизации для нелинейной системы дифференциальных уравнений. Предложен метод приближённого построения непрерывного кусочно-аффинного управления, а также соответствующей функции Ляпунова. Доказана теорема о достаточных условиях решения задачи стабилизации при помощи такого управления. Предложенные в работе методы и идеи будут в дальнейшем использованы для решения задач стабилизации систем большой размерности, что потребует более тщательного анализа соответствующих численных методов и алгоритмов.

Результаты пп. 1–4 получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Результаты п. 5 получены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М., 1966. С. 475–515.
2. *Giesl P., Hafstein S.* Existence of piecewise linear Lyapunov functions in arbitrary dimensions // *Discret. and Contin. Dyn. Syst.* 2012. V. 32. № 10. P. 3539–3565.
3. *Baier R., Hafstein S.* Numerical computation of control Lyapunov functions in the sense of generalized gradients // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen, 2014. P. 1173–1180.
4. *Атанесян А.А., Точилин П.А.* Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-линейного управления // *Вестн. Московского ун-та. Сер. 15: Вычислит. математика и кибернетика.* 2019. № 4. С. 22–32.
5. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // *Дифференц. уравнения.* 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
6. *Точилин П.А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2020. Т. 26. № 1. С. 223–238.
7. *Барбащин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М., 2014.
8. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
9. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М., 1991.
10. *Каплунова Е.П., Точилин П.А.* Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // *Вестн. Московского ун-та. Сер. 15: Вычислит. математика и кибернетика.* 2021. № 4. С. 21–36.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова,  
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,  
Институт проблем управления  
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.06.2022 г.  
После доработки 03.09.2022 г.  
Принята к публикации 21.10.2022 г.