

УДК 517.977

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЙРОРЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Рассматривается задача стабилизации переключаемой линейной системы с медленными переключениями, недоступными для наблюдения. Решение ищется в классе регуляторов переменной структуры. Для обеспечения работоспособности такого регулятора необходимо построение наблюдателя переключающего сигнала. В качестве наблюдателя предлагается использовать нейросеть, теоретическим аспектам настройки которой и посвящена настоящая работа.

DOI: 10.31857/S0374064122110103, EDN: MCF COP

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система

$$\dot{x} = A_{\sigma}x + b_{\sigma}u, \quad \sigma \in S_{\tau}, \quad (1)$$

где $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_{τ} – множество всех переключающих сигналов σ , для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ ($\tau > 0$); I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $A_{\sigma} = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и переключающего сигнала σ , $b_{\sigma} = b \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ ($b_i \in \mathbb{R}^n$); пары матриц (A_i, b_i) , $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Задача. Требуется стабилизировать систему (1) в заданной окрестности нуля $D(0; \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \gamma\}$, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для некоторого $\bar{\gamma} > 0$ и любых $x(0) \in D(0; \gamma)$, $\sigma \in S_{\tau}$ норма соответствующего решения $x(t)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- 2) $\|x(t)\| \leq \bar{\gamma}$ при $t \in [0, \infty)$.

При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение следующей нестационарной системы с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma \in S_{\tau}.$$

Далее для векторов будем рассматривать норму $\|x\| = \max_i |x_i|$, а для матриц – норму $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Известные подходы к решению сформулированной выше задачи стабилизации можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, предполагающие построение единого регулятора для семейства динамических систем, включающего все различные режимы (A_i, b_i) переключаемой системы (1). Фактически в этом случае речь идет о нахождении одновременно стабилизирующего регулятора для конечного семейства линейных систем. При этом данный регулятор должен обеспечивать не только устойчивость каждого режима системы (1), но и устойчивость траекторий этой системы при любом переключающем сигнале из множества S_{τ} . Одним из наиболее известных методов, позволяющих синтезировать подобные регуляторы, является метод квадратичной стабилизации [1, с. 49], основанный на поиске регулятора в форме статической линейной обратной связи, обеспечивающий существование общей функции Ляпунова для системы (1), замкнутой этим регулятором. Популярность данного подхода

обусловлена возможностью сведения задачи синтеза такого регулятора к задаче поиска решений системы линейных матричных неравенств, которая, в свою очередь, допускает численное решение. Также можно отметить метод сверхстабилизации [2], предполагающий поиск единой статической обратной связи и обеспечивающей свойство сверхустойчивости для всех замкнутых режимов системы (1). В этом случае поиск стабилизатора может быть сведён к решению задачи линейного программирования [3]. Отметим, что упомянутые методы имеют свои достоинства и недостатки. К достоинствам можно отнести тот факт, что регуляторы, найденные в соответствии с методом квадратичной стабилизации или методом сверхстабилизации, на самом деле решают более общую задачу, а именно, обеспечивают устойчивость переключаемой системы при произвольных переключениях (когда отсутствует ограничение снизу на время переключений для различных режимов). С другой стороны, с увеличением количества режимов шансы на нахождение единого регулятора существенно уменьшаются, поскольку его существование становится связанным с разрешимостью линейных неравенств большой размерности.

Качественно другой подход к решению поставленной задачи заключается в построении регулятора переменной структуры (переключаемого регулятора)

$$u = u_\sigma(x), \quad (2)$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = u_i(x)$ для i -го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (1), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = A_i x + b_i u_i(x). \quad (3)$$

Отметим, что в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) стабилизирующую обратную связь для каждого режима системы (1) можно искать в форме линейной статической обратной связи $u = -k_i x$. Известно [4, с. 249], что такая обратная связь всегда существует как решение задачи модального управления.

Таким образом, система (1), замкнутая регулятором (2), будет иметь вид

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u_\sigma(x), \quad \sigma \in S_\tau.$$

Укажем теперь две основные проблемы, которые необходимо решать для обеспечения работоспособности указанного выше регулятора переменной структуры. Первая состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени, для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора. Но, как правило, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени недоступна. Вторая проблема заключается в том, что устойчивость каждого режима (3) переключаемой системы в отдельности не является достаточным условием устойчивости самой переключаемой системы (1).

Одно из возможных решений первой проблемы, позволяющее использовать данный регулятор, заключается в построении наблюдателя переключающего сигнала (в дальнейшем будем называть его просто наблюдателем), который определял бы номер активного режима для текущего момента времени, что, в свою очередь, позволило бы обеспечить синхронность переключения регулятора с переключениями режимов. Учитывая известные оценки времени задержки τ для обеспечения устойчивости переключаемой системы с устойчивыми режимами (см., например, [5, с. 56; 6; 7]), решение второй проблемы естественно искать, используя эти оценки при построении регуляторов (2).

2. Подход к решению. В настоящей работе исследуются теоретические аспекты решения задачи из п. 1 на основе нейросетевого подхода, который заключается в том, что в качестве упомянутого выше наблюдателя режимов предлагается использовать нейронную сеть [8, с. 55]. Можно считать, что выходом такой нейросети является оценка $\hat{\sigma}(t)$ недоступного для измерения переключающего сигнала. При этом регулятор переменной структуры ищем в виде

$$u = -k_{\hat{\sigma}} x, \quad (4)$$

где $\hat{\sigma}(t)$ – оценка переключающего сигнала, $\hat{\sigma}(t) \in \{1, \dots, m\}$, а векторы $k_i \in \mathbb{R}^n$ выбираются из условий устойчивости матриц $A_i - b_i k_i$.

Пару – переключаемый регулятор и нейронную сеть – далее будем называть *нейрорегулятором*. Систему (1), замкнутую нейрорегулятором, можно представить переключаемой системой следующего вида:

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_{\hat{\sigma}})x, \quad \sigma \in S_\tau, \quad \hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_p = \tau/p$ – достаточно малая положительная константа, $p \in \mathbb{N}$ – некоторый фиксированный параметр алгоритма наблюдения, $[S]_{\varepsilon_p}$ – множество переключающих сигналов, для которых моменты переключений принадлежат множеству $\{l\varepsilon_p\}$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x \quad (i, j = \overline{1, m})$$

переключаемой системы (5), присвоив каждому (ij) -му режиму соответствующий номер $s = (i-1)m + j$. Введём функцию $\xi : \{1, \dots, m^2\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, отображающую каждый номер s в соответствующий ему индекс i , т.е. $\xi(s) = i$.

Работа нейронной сети в качестве наблюдателя переключающего сигнала осуществляется в процессе функционирования системы и состоит в следующем: для заданной дискретной последовательности моментов времени $l\varepsilon_p$, $l = 0, 1, 2, \dots$, по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть должна определять номер s текущего режима переключаемой системы (5) в момент $t = (l+1)\varepsilon_p$. Обозначим выход нейросети в момент $l\varepsilon_p$ через $N[l\varepsilon_p]$. На основе данной информации оценка $\hat{\sigma}[l\varepsilon]$ переключающего сигнала $\sigma(t)$ строится следующим образом:

$$\hat{\sigma}(t) \equiv \xi(N[l\varepsilon_p]) \quad \text{при } t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p), \quad l = 1, 2, \dots \quad (6)$$

В результате переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи задаёт переключающий сигнал (6) с некоторым заданным начальным условием $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0$ ($\hat{\sigma}_0 \in \{1, \dots, m\}$). Описанный наблюдатель далее будем обозначать через $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$.

Таким образом, основная задача функционирования нейронной сети состоит в построении оценки $\hat{\sigma}$ неизвестного переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$. Дискретную ошибку оценивания $e_\sigma[l\tau]$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) сигнала $\sigma(t)$ определим по формуле

$$e_\sigma[l\tau] = \max_{i=0, l-1} \mu_{i\tau}^{(i+1)\tau},$$

где $\mu_{i\tau}^{(i+1)\tau}$ – количество промежутков вида $[j\varepsilon_p, (j+1)\varepsilon_p) \subset [i\tau, (i+1)\tau]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}(j\varepsilon_p)$. Заметим, что такой выбор ошибки $e_\sigma[l\tau]$ удобен для дальнейшего оценивания окрестности положения равновесия (см. п. 5), используемой для формирования обучающей выборки для нейросетевого наблюдателя.

Можно выделить несколько основных шагов настройки нейрорегулятора:

- 1) выбор структуры нейросети;
 - 2) выбор регуляторов $u = -k_i x$, обеспечивающих достаточно быстрое затухание переходных процессов замкнутых режимов переключаемой системы с учётом времени задержки τ ;
 - 3) выбор величины ε_p с учётом ограничений на ошибку оценивания и времени задержки τ ;
 - 4) расчёт величины $\bar{\gamma}$ (см. условие задачи в п. 1) с учётом ограничений на ошибку оценивания и размера окрестности $D(0; \gamma)$;
 - 5) построение обучающей выборки для нейросети с учётом величины $\bar{\gamma}$;
 - 6) обучение нейросети на промежутке $[0, \varepsilon_p]$;
 - 7) проверка работоспособности нейросети по определению текущего активного режима;
 - 8) моделирование переключаемой системы (1), замкнутой построенным нейрорегулятором.
- Далее обсуждаются теоретические вопросы, связанные с настройкой и работоспособностью нейрорегулятора. К ним относятся, главным образом, задачи, сформулированные в перечисленных выше пп. 2)–5).

3. Выбор режимов переключаемого регулятора. Построение стабилизирующего регулятора переменной структуры для системы (1) в случае ненаблюдаемых переключающих

сигналов включает два основных шага: построение стабилизирующих регуляторов для каждого режима в отдельности и настройка алгоритма их переключений. Рассмотрим первый шаг. Как было указано выше, необходимым условием устойчивости переключаемой системы является асимптотическая устойчивость каждого её режима. К сожалению, это условие не является достаточным и требует усиления в зависимости от класса допустимых переключающих сигналов. Поскольку в работе рассматривается случай медленных переключений с заданным временем задержки τ , то при синтезе регулятора переменной структуры, при построении стабилизаторов для каждого режима системы (1) можно использовать подход, основанный на достаточном условии устойчивости переключаемых линейных систем, сформулированный в работе [7].

Итак, в предположении полной управляемости пар (A_i, b_i) , $i = \overline{1, m}$, для каждого режима

$$\dot{x} = A_i x + b_i u$$

построим обратную связь $u = -k_i x$, обеспечивающую простой вещественный и устойчивый спектр матрицы замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_i) x, \quad (7)$$

т.е. $\text{Spec}(A_i - b_i k_i) \subset \mathbb{R}_-$ и для любых $s_j, s_m \in \text{Spec}(A_i - b_i k_i)$ следует, что $s_j \neq s_m$.

В этом случае для нормы вектора решения системы (7) можно записать [9, с. 57] следующую оценку:

$$\|x(t)\| \leq \|e^{\Lambda_{ii}(t-s)}\| \cdot \|x(s)\| \leq c_{ii} e^{\alpha_{ii}(t-s)} \|x(s)\|, \quad t \geq s \geq 0,$$

где

$$\Lambda_{ii} = A_i - b_i k_i, \quad \alpha_{ii} = \max_{\lambda_k^i \in \text{Spec}\{\Lambda_{ii}\}} \lambda_k^i < 0, \quad c_{ii} = \|M_{ii}^{-1}\| \cdot \|M_{ii}\|.$$

Здесь M_{ii} – матрица преобразования, приводящая матрицу Λ_{ii} к диагональному виду $J_{ii} = \text{diag}\{\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i\}$, т.е.

$$J_{ii} = M_{ii}^{-1} \Lambda_{ii} M_{ii}.$$

Заметим, что столбцами матриц M_{ii} являются собственные векторы соответствующих матриц Λ_{ii} .

Обозначим

$$\alpha = \max_{i=\overline{1, m}} \alpha_{ii}, \quad c = \max_{i=\overline{1, m}} c_{ii}.$$

В соответствии с достаточным условием устойчивости [7] переключаемая система с режимами (7) является устойчивой при любых переключающих режимах из множества S_τ , если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{c} = \frac{2 \ln c}{|\alpha|}. \quad (8)$$

Для выполнения условия (8) можно рекомендовать строить регуляторы $u = -k_i x$, обеспечивающие достаточно большую величину α , что всегда возможно в силу предположения о полной управляемости пар (A_i, b_i) . Известно, как правило, что $c = O(|\alpha|^{n-1})$.

4. Квантование времени работы наблюдателя переключающего сигнала. Как уже отмечалось выше, основная проблема при реализации регулятора переменной структуры состоит в том, что для его работоспособности нужна информация о текущем переключающем сигнале, что позволит обеспечить синхронность переключения режимов регулятора с переключениями режимов системы, и если переключающий сигнал недоступен для измерения, то необходимо использовать наблюдателя для оценки текущего значения переключающего сигнала. Выше (см. п. 2) был определён наблюдатель, работающий на основе нейросети. Фактически данный наблюдатель представляет собой дискретную систему, выход которой управляет переключением режимов регулятора переменной структуры. В идеале режимы регулятора должны

переключаться синхронно с переключениями режимов системы (1). Однако моменты переключений системы (1), обусловленные переключающими сигналами $\sigma \in S_\tau$, совершенно не обязательно должны совпадать с дискретной последовательностью $\{l\varepsilon\}$ моментов срабатывания нейросети. В результате этого могут возникать ошибки нейросети в определении номера активного режима замкнутой системы (5), что, в свою очередь, влечёт за собой неверное включение очередного режима регулятора. Более того, нельзя исключать и того факта, что нейросеть может самопроизвольно выдавать ошибочное значение активного режима. Достаточно полную информацию о корректности работы нейросети содержит введённая выше ошибка оценивания переключающего сигнала $e_\tau[l\tau]$, на основе которой ниже будет сформулировано достаточное условие устойчивости переключаемой системы (1), замкнутой нейрорегулятором (4), (6).

Далее потребуется следующая лемма, доказательство которой аналогично рассуждениям теоремы 6 работы [7].

Лемма. Пусть для системы

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad \sigma \in S_\tau, \quad (9)$$

существуют константы $d > 1$ и $q > 0$ такие, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства:

- 1) $\|x((i+1)q)\| < \|x(iq)\|/d$ для всех $i = 0, 1, \dots$;
- 2) $\|x(t)\| < \|x(iq)\|$ для всех $t \in [(i+1)q, (i+2)q]$, $i = 0, 1, \dots$

Тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (9) стремится к нулю, т.е.

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Далее будем использовать обозначение

$$\Lambda_{ij} = A_i - b_i k_j, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Пусть J_{ij} – жорданова нормальная форма для Λ_{ij} , а M_{ij} – матрица, приводящая Λ_{ij} к соответствующей жордановой форме J_{ij} . Положим

$$\alpha_{ij} = \max_{\lambda_k^{(ij)} \in \text{Spec } \Lambda_{ij}} \text{Re}(\lambda_k^{(ij)}).$$

Для систем

$$\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x, \quad i \neq j,$$

можно записать следующие оценки для норм решений [8]

$$\|x(t)\| \leq \|e^{\Lambda_{ij}(t-s)}\| \|x(s)\| \leq c_{ij} e^{\alpha_{ij}(t-s)} P_{ij}(t-s) \|x(s)\|,$$

здесь $c_{ij} = \|M_{ij}^{-1}\| \|M_{ij}\|$, $P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{r_{ij}-1} (t^k/k!)$, r_{ij} – размер максимальной клетки Жордана в жордановой нормальной форме J_{ij} матрицы Λ_{ij} .

Обозначим

$$\rho = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} \alpha_{ij}, \quad \beta = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} c_{ij}, \quad r = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i \neq j}} r_{ij}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\rho > 0$.

Сформулируем теперь достаточное условие устойчивости замкнутой системы (5).

Теорема 1. Пусть для замкнутой системы (5) при любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}^n$ наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}$ с ошибкой, удовлетворяющей условию

$$e_\sigma[l\tau] \leq \theta, \quad l = 1, 2, \dots,$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{N}$, $0 \leq \theta \leq [p/2]$.

Тогда, если

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{h},$$

где $h = c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}$, для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения системы (5) стремится к нулю: $\|x(t)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $h > 1$, а из определения наблюдателя $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ следует, что $\theta \geq 1$. Далее, в силу условия теоремы на каждом отрезке $[i\tau, (i+1)\tau]$, $i = 0, 1, \dots$, максимальное число промежутков $[l\varepsilon_p, (l+r)\varepsilon_p]$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$), на которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$, не более θ (при этом для каждого l число r фактически равно количеству “склеенных” промежутков длины ε_p , на которых выполнено указанное тождество), максимальное число промежутков вида $[l\varepsilon_p, (l+r)\varepsilon_p]$ ($l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r \in \mathbb{N}$), на которых $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$, не более $\theta + 1$ и не более одного промежутка вида $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$, содержащего точку разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$ (соответственно на таком промежутке $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$). Заметим, что для всех $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны следующие неравенства:

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\| \leq c\|x(l\varepsilon_p)\|e^{\alpha\varepsilon_p}, \quad \text{если } \sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p],$$

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\| \leq \beta\|x(l\varepsilon_p)\|P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p}, \quad \text{если } \sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p], \quad (10)$$

а если $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ на промежутке $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$, внутри которого лежит точка разрыва переключающего сигнала $\sigma(t)$, то справедлива оценка

$$\|x((l+1)\varepsilon_p)\| \leq c\beta P(\varepsilon_p)e^{\rho\varepsilon_p}\|x(l\varepsilon_p)\|. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) нетрудно получить следующую оценку для решений системы (5):

$$\|x((i+1)\tau)\| \leq h\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Учитывая, что $\alpha < 0$, в силу условия теоремы получаем цепочку неравенств

$$\tau > \frac{2}{\alpha} \ln h^{-1}, \quad \alpha\tau < \ln h^{-2}, \quad e^{\alpha\tau} < h^{-2}, \quad \|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < h^{-2}\|x(i\tau)\|,$$

откуда

$$h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < \|x(i\tau)\|. \quad (13)$$

Далее из (12) и (13) имеем

$$h\|x((i+1)\tau)\| \leq h^2\|x(i\tau)\|e^{\alpha\tau} < \|x(i\tau)\|.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\|x((i+1)\tau)\| < \frac{1}{h}\|x(i\tau)\|, \quad i = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Таким образом, показано, что для замкнутой системы (5) выполнен п. 1) леммы при $q = \tau$, $d = h$. Докажем теперь, что для этой системы выполняется также и п. 2) леммы.

Действительно, зафиксируем произвольное $t \in [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$, $i = 0, 1, \dots$, и рассмотрим два случая.

1) Пусть $t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p] \subset [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Далее, пусть на отрезке $[(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ левее t располагается κ промежутков вида $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Тогда, учитывая (10) и (11), получаем оценку

$$\|x(t)\| \leq c^{r+1} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p} c\|x((i+1)\tau)\|e^{\alpha(t-(i+1)\tau)}.$$

Поскольку $e^{\alpha(t-(i+1)\tau)} < 1$, то справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq c^{r+2} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p} \|x((i+1)\tau)\|. \quad (15)$$

Отсюда, учитывая (14), получаем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+2} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p} c \|x((i+1)\tau)\| < \\ &< c^{r+2} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p} \frac{1}{h} \|x(i\tau)\| = \frac{c^{r+2} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p}}{c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}} \|x(i\tau)\|. \end{aligned}$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leq \theta$, $\kappa \leq \theta$, дробь в последнем неравенстве не превосходит единицы и тогда окончательно имеем

$$\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|. \quad (16)$$

2) Пусть теперь $t \in [l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p] \subset [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ и на этом промежутке $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Также, как и в случае 1), пусть на отрезке $[(i+1)\tau, (i+2)\tau]$ левее t располагается κ промежутков вида $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$, для которых $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$ и r промежутков такого же вида, где $\sigma(t) \equiv \hat{\sigma}[l\varepsilon_p]$. Тогда, рассуждая как и в случае 1) и учитывая (10) и (11), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+1} \beta^\kappa P^\kappa(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\kappa\varepsilon_p} \beta P(\varepsilon_p) \|x((i+1)\tau)\| e^{\rho(t-(i+1)\tau)} \leq \\ &\leq c^{r+1} \beta^{\kappa+1} P^{\kappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\kappa+1)\varepsilon_p} \|x((i+1)\tau)\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда с учётом (14) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c^{r+1} \beta^{\kappa+1} P^{\kappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\kappa+1)\varepsilon_p} \|x((i+1)\tau)\| < \\ &< c^{r+1} \beta^{\kappa+1} P^{\kappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\kappa+1)\varepsilon_p} \frac{1}{h} \|x(i\tau)\| = \frac{c^{r+1} \beta^{\kappa+1} P^{\kappa+1}(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)(\kappa+1)\varepsilon_p}}{c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p}} \|x(i\tau)\|. \end{aligned}$$

В силу того, что в рассматриваемом случае $r \leq \theta$, $\kappa+1 \leq \theta$, дробь в последнем неравенстве не превосходит единицы, и в случае 2) также имеет место неравенство (16).

Таким образом, получили, что при выполнении условий теоремы 1 выполняются условия леммы, а тогда для любого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ норма соответствующего решения замкнутой системы (5) стремится к нулю. Теорема 1 доказана.

5. Оценка окрестности положения равновесия для формирования обучающей выборки. Как было отмечено в п. 2, задача нейросети состоит в том, чтобы по каждой паре измерений вектора состояния $(x(l\varepsilon_p), x((l+1)\varepsilon_p))$ нейронная сеть определяла бы номер s текущего режима переключаемой системы (5) в момент $t = (l+1)\varepsilon_p$. Причём считаем, что эту задачу нейросеть должна правильно решать в предположении, что на рассматриваемом отрезке $[l\varepsilon_p, (l+1)\varepsilon_p]$ отсутствуют точки разрыва сигнала $\sigma(t)$. И поскольку в этом случае на таких отрезках будет активен один из линейных стационарных режимов системы (5), то $x((l+1)\varepsilon_p) = x(\varepsilon_p)$, если $x(l\varepsilon_p) = x(0)$. Таким образом, нейронную сеть достаточно обучить на векторах вида $(x(0), x(\varepsilon_p))$, построенных для всех возможных режимов системы (5). При этом необходимо решить вопрос об окрестности нуля, по которой будет строиться выборка для обучения нейросети. В качестве таковой можно выбрать окрестность $D(0; \bar{\gamma})$ (см. постановку задачи в п. 1). Следующая теорема даёт оценку величины $\bar{\gamma}$ по заданной ошибке оценивания переключающего сигнала $e_\sigma[l\tau]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом начальном условии $x(0) \in D(0; \gamma)$ и любом переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ выполнено неравенство

$$\|x(t)\| \leq \bar{\gamma}, \quad t \in [0, +\infty),$$

где $\bar{\gamma} = h\gamma$.

Действительно, если выполнены условия теоремы 1, то из полученных в ходе её доказательства неравенств (14) и (16) следует, что для любого переключающего сигнала $\sigma \in S_\tau$ и начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ для соответствующего решения $x(t)$ справедливы неравенства:

- 1) $\|x((i+1)\tau)\| < \|x(i\tau)\|/h$ для всех $i = 0, 1, \dots$;
- 2) $\|x(t)\| < \|x(i\tau)\|$ для всех $t \in [(i+1)\tau, (i+2)\tau]$, $i = 0, 1, \dots$

Из этих неравенств следует, что для расчёта величины $\bar{\gamma}$ достаточно оценить наибольшее значение нормы вектора $x(t)$ на промежутке $[0, \tau]$. Учитывая оценки (15) и (17), получаем

$$\|x(t)\| \leq c^{\theta+2} \beta^\theta P^\theta(\varepsilon_p) e^{(\rho-\alpha)\theta\varepsilon_p} \|x(0)\| \leq h\gamma$$

при всех $t \in [0, \tau]$. Теорема доказана.

6. Численное моделирование. Полученные результаты продемонстрируем на численном примере. Рассмотрим задачу стабилизации (см. п. 1) для переключаемой линейной системы

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \quad \sigma(t) \in I = \{1, 2, 3\}, \quad (18)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что $\tau = 1$, $\gamma = 2$.

Стабилизирующий регулятор для системы (18) ищем в виде

$$u = -k_\sigma x, \quad \hat{\sigma}(t) \in \{1, 2, 3\}. \quad (19)$$

Используя рассуждения п. 3, выберем следующие значения k_i : $k_1 = (-0.4 \quad -0.1)$, $k_2 = (-0.2 \quad 0.3)$, $k_3 = (-1.4 \quad -1.8)$. Пусть $p = 20$, тогда $\varepsilon_p = 0.05$. В качестве наблюдателя $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ выберем обобщённую регрессионную двухуровневую нейронную сеть. При условии, что наблюдатель $\mathcal{N}_{\varepsilon_p}$ генерирует оценку $\hat{\sigma} \in [S]_{\varepsilon_p}$ с ошибкой $e_\sigma[l\tau] \leq 1$ (априорная ошибка $\theta = 1$), рассчитаем величины h , $\bar{\gamma}$ в соответствии с результатами пп. 4, 5: $h = 24.3$, $\bar{\gamma} = 68.9$. Далее с использованием величины $\bar{\gamma}$ осуществляется обучение нейросети с помощью функции `newgrnn` пакета Matlab.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования в пакете Matlab решения замкнутой системы (18), (19) при начальных условиях $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 1$ и некотором переключающем сигнале σ (рис. 2).

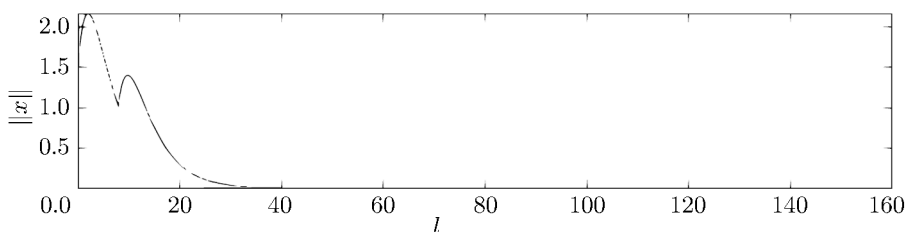


Рис. 1. Поведение нормы решения замкнутой системы.

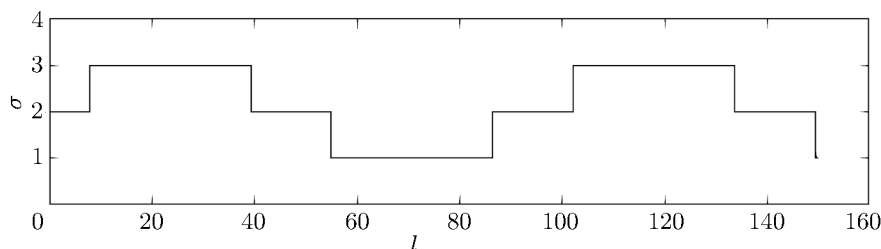


Рис. 2. Переключающий сигнал.

Моделирование проведено для $t \in [0, 150]$. Его результаты показали, что апостериорная ошибка наблюдателя равна также единице, а норма решения стремится к нулю, что подтверждает работоспособность построенного стабилизатора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.
4. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
5. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, 2003.
6. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
7. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.
8. *Хайкин С.* Нейронные сети. М., 2006.
9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.
После доработки 21.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.