ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1557–1561

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.4

О СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ОТ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО И.Г. ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. П. В. Денисов

Изучаются необходимые и достаточные условия стабилизации средних по времени от решения задачи Коши для параболической по И.Г. Петровскому системы уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122110115, EDN: MCKNEG

Вопросы стабилизации решений параболических уравнений привлекают внимание многих исследователей. Из большого числа работ по данной теме отметим обзорные статьи [1–3]. Особую важность для случая параболических по И.Г. Петровскому систем уравнений имеют работы С.Д. Эйдельмана и Ф.О. Порпера [4–6] и монография С.Д. Эйдельмана [7], посвящённая параболическим системам.

Рассмотрим параболическую по И.Г. Петровскому систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A_k D^k u, \quad x \in E^N, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $b \in \mathbb{N}$, A_k – $m \times m$-матрицы с постоянными элементами, для решений $u(x,t)$ которой выполняются начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in E^N, \tag{2}$$

где $u_0(x) = (u_0^1(x), \ldots, u_0^m(x))$ – заданная в пространстве E^N ограниченная и непрерывная вектор-функция (верхний индекс здесь обозначает номер компоненты вектор-функции $u_0(x)$), оператор

$$D^k = (-i)^k \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_N.$$

Установлено (см. работу [4]), что для матрицы Грина системы (1)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{E^N} \exp\left[i(x,y) - t \sum_{|k|=2b} A_k y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_N^{k_N}\right] dy$$

имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}}\right| < C_1 t^{-(N+k)/(2b)} \exp(-C_2(|x| t^{-1/(2b)})^q), \tag{3}$$

где $(x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N$, $|x| = [x_1^2 + \ldots + x_N^2]^{1/2}$, $q = 2b/(2b-1)$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$.

Известно [7], что в классе единственности решение задачи Коши (1), (2), построенное по ограниченной и непрерывной начальной вектор-функции $u_0(x)$, задаётся интегралом Пуассона

$$u(x,t) = \int\limits_{E^N} G(x-\xi,t) u_0(\xi)\, d\xi, \quad d\xi = d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_N. \tag{4}$$

Из того, что единичная $m \times m$-матрица I удовлетворяет системе (1), следует равенство

$$\int\limits_{E^N} G(x-\xi, t)\, d\xi = I.$$

В настоящей работе будут изучаться необходимые и достаточные условия стабилизации предела средних по времени от решения задачи (1), (2)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t u(x,\tau)\, d\tau = 0 \tag{5}$$

равномерно по x в пространстве E^N.

Теорема. *Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ ограничена и непрерывна в пространстве E^N, то для того чтобы существовал предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в E^N необходимо и достаточно, чтобы решение задачи (1), (2) стабилизировалось к нулю:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \tag{6}$$

равномерно по x в E^N.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $u_0(x)$ – ограниченная и непрерывная в E^N вектор-функция и что существует предел (6) решения $u(x,t)$ задачи (1), (2). Докажем, что тогда существует предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2) равномерно по x в E^N. Так как предел (6) является равномерным по x в E^N, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $d = d(\varepsilon)$ такое, что при всех $t > d$ справедливо неравенство

$$|u(x,t)| < \varepsilon/2 \tag{7}$$

для всех $x \in E^N$.

В силу условия ограниченности функции $u_0(x)$, $x \in E^N$, получим для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2), определяемого формулой (4), оценку

$$|u(x,t)| \leqslant M \tag{8}$$

для всех $x \in E^N$ и всех $t > 0$.

Представим интеграл в (5) в виде суммы двух интегралов:

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)\, d\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^d u(x,\tau)\, d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_d^t u(x,\tau)\, d\tau = K_1 + K_2, \tag{9}$$

где $d > 0$.

Пусть $t > d$, тогда из (7)–(9) получим неравенства

$$|K_1| < \frac{M_1 d}{t}, \quad M_1 = \sup_{\substack{x\in E^N\\ t>0}} |u(x,t)|, \quad |K_2| < \frac{\varepsilon}{2t}\int\limits_d^t < \frac{\varepsilon}{2}\frac{t-d}{t} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Выберем теперь $t > 2M_1 d/\varepsilon$, тогда из (9), (10) получим

$$\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t u(x,\tau)\, d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $t > 2M_1 d/\varepsilon$ равномерно по x в E^N.

Необходимость. Пусть $u_0(x)$ – ограниченная и непрерывная в E^N вектор-функция и существует предел (5) средних по времени t от решения задачи (1), (2), равномерно по x в E^N. Докажем, что тогда существует предел (6) решения $u(x,t)$ равномерно по x в E^N. Предположим противное, т.е. что решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) не имеет равномерного в E^N предела (6). Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любых положительных t_k, $k \in \mathbb{N}$, найдутся $t > t_k$ и такие точки $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_k^N)$, что по крайней мере для одной из компонент вектор-функции $u(x,t)$, например для $u^1(x,t)$, справедливо неравенство

$$|u^1(x^k, t_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{11}$$

Докажем, что тогда не существует нулевого предела (5) средних по времени t от $u(x,t)$ равномерно по x в E^N.

Для доказательства (11) достаточно показать, что найдутся компонента $u_0^1(x)$ начальной вектор-функции $u_0(x)$ и положительное число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $R > 0$ найдутся $R_k > R$ и точки $x^k = (x_1^k, \ldots, x_N^k)$, для которых справедливы неравенства

$$\left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^1(\xi)\, d\xi \right| \geqslant \varepsilon_0 > 0. \tag{12}$$

Используя (12), докажем, что соответствующая компонента средних по времени t от $u(x,t)$

$$W^1(x,t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t u^1(x,\tau)\, d\tau \tag{13}$$

не стремится к нулю при $t_k \to \infty$ равномерно по x в E^N.

Замечание 1. Хорошо известно, что существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2R)^N} \int\limits_{K_R^x} u_0(x)\, dx = 0$$

равномерно по x в E^N влечёт за собой существование равномерного в пространстве E^N предела (5) (см. [8, с. 349]) средних по времени от $u(x,t)$.

Напомним наше предложение о том, что не существует предела (13), равномерного по x в E^N. Покажем, что из (12) следует, что $W^1(x,t)$ в (13) не стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по x в E^N.

Выберем временнýю последовательность

$$t_k = \left(\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1} m N} \right)^{2b} \to +\infty, \tag{14}$$

где R_k – некоторая последовательность, стремящаяся к бесконечности, а $B > 0$ – постоянная, которая будет выбрана далее. Усредним функцию $W^1(x,t)$ в (13) по кубу $K_{R_k}^{x^k}$ следующим образом:

$$|\Delta| = \left| \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x, t_k)\, dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2t_k} \int\limits_0^{t_k} d\tau \frac{1}{(2R_k)^N} \int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} dx \int\limits_{E^N} \sum_{j=1}^m G_{1j}(x-\xi,\tau)[u_0^j(x) + u_0^j(\xi) - u_0^j(x)]\, d\xi \right|, \tag{15}$$

где t_k – последовательность (14). Учитывая, что

$$\int\limits_{E^N} \sum_{j=1}^{m} G_{1j}(x-\xi,\tau)\,d\xi = 1,$$

и производя замены переменных $\xi_k = x_k + y_k\tau^{1/2}$, $k = \overline{1,N}$, в интеграле по ξ, получаем в (15)

$$|\Delta| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,\tau_k)\,dx\right| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^j(\xi)\,d\xi + \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\tau^{N/2b}\,d\tau\int\limits_{|y|\leqslant B}\sum_{j=1}^{m} G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)\,dy\,\times\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x))\,dx)\right] + \frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k}\tau^{N/2b}\,d\tau\int\limits_{|y|\geqslant B}\sum_{j=1}^{m} G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau)\,dy\,\times$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} [u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x)]\,dx)\right]\right| = |L_1+L_2+L_3| \geqslant |L_1| - |L_2| - |L_3|, \qquad (16)$$

где в силу (12)

$$|L_1| = \left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} u_0^j(\xi)\,d\xi\right| > \varepsilon_0 > 0. \qquad (17)$$

Выберем теперь число $B > 0$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|L_3| < \varepsilon_0/4. \qquad (18)$$

Это можно сделать в силу оценки (3). В самом деле, учитывая, что

$$|u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(x)| < 2$$

для всех x, y из E^N и для всех $t > 0$, из (3) получим неравенства

$$|L_3| \leqslant 2t_k^{N/2b}\int\limits_{|y|\geqslant B}\sum_{j=1}^{m}\left|G_{1j}(y\tau^{1/2b},\tau_k)\right|dy < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

где $\tau^{1/2b} \leqslant t_k^{1/2b}$. Таким образом, оценка (18) доказана.

Покажем, что

$$|L_2| < \varepsilon_0/4. \qquad (19)$$

Действительно, так как функция $u_0^j(x-\tau^{1/2b}y)$ отличается от функции $u_0^j(x)$ на множестве, имеющим меру, не превосходящую $2^N N R_k^{N-1} B t_k^{1/2b}$ при $0 < \tau < t_k$, то имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} (u_0^j(x-y\tau^{1/2b}) - u_0^j(y))dy)\right| < \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k},$$

в силу которой и в силу выбора t_k по формуле (14) получим

$$|L_2| < \frac{NBt_k^{1/2b}}{R_k} mB^N = \frac{mNB^{N+1}}{R_k}\,\frac{\varepsilon_0 R_k}{4B^{N+1}mN} = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

С учётом оценок (17)–(19) получаем из (16), что

$$\left|\frac{1}{(2R_k)^N}\int\limits_{K_{R_k}^{x^k}} W^1(x,t_k)\,dx\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{20}$$

Таким образом, из неравенства (11) следует, что для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ нашлись такая последовательность t_k из (14), $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и такая последовательность точек x^k, что справедлива оценка (20). Из (20) вытекает, что для любого сколь угодно большого времени $T > 0$ можно указать такие $t_k > T$, а также точки x_0^k, лежащие внутри куба $K_{R_k}^{x^k}$, для которых выполняется неравенство

$$|W^1(x_0^k,t_k)| = \left|\frac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} u^1(x_0^k,\tau)\,d\tau\right| > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

т.е. доказано, что функция $W^1(x,t)$ в (13) не стремится к нулю при $t_k \to \infty$ равномерно по x в E^N. Полученное противоречие доказывает необходимость теоремы. Теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение о необходимости в теореме доказано без применения тауберовой теоремы Н. Винера [8, с. 352–354].

Автор выражает глубокую благодарность проф. Шамолину М.В. за внимание и проявленный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А.К., Михайлов В.П., Муравей Л.А.* О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Динамика сплошной среды. 1975. Т. 23. С. 57–90.
2. *Денисов В.Н., Репников В.Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 20–41.
3. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 4. С. 145–212.
4. *Эйдельман С.Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения // Мат. сб. 1953. Т. 33. № 2. С. 359–382.
5. *Эйдельман С.Д.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб. 1958. Т. 44. № 4. С. 481–508.
6. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем // Изв. вузов. Математика. 1960. № 4. С. 210–217.
7. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
8. *Харди Г.Г.* Расходящиеся ряды. М., 2006.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 09.03.2022 г.
После доработки 09.03.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.