ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 11, с. 1562–1564

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ НАГРУЖЕННОЙ ЦЕПИ

© 2022 г. Н. Ю. Капустин

Рассматриваются две спектральные задачи для уравнений Бесселя нулевого и первого порядка с одним характеристическим уравнением. Одна задача содержит спектральный параметр в граничном условии, другая спектрального параметра в граничных условиях не содержит.

DOI: 10.31857/S0374064122110127, EDN: MCLHNZ

Постановка задачи. Рассмотрим спектральную задачу

$$xX''(x) + X'(x) + \lambda x X(x) = 0, \quad 0 < a < x < b, \tag{1}$$

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) - \lambda d X(b) = 0, \tag{2}$$

с отличным от нуля действительным коэффициентом d. Решением задачи (1), (2) является система собственных функций, состоящая из постоянной $X_1(x) = 1$, соответствующей собственному значению $\lambda_1 = 0$, и функций

$$X_n(x) = Y_1(\sqrt{\lambda_n}a)J_0(\sqrt{\lambda_n}x) - J_1(\sqrt{\lambda_n}a)Y_0(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

отвечающих собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$J_1(\sqrt{\lambda}a)[Y_1(\sqrt{\lambda}b) + \sqrt{\lambda}dY_0(\sqrt{\lambda}b)] = Y_1(\sqrt{\lambda}a)[J_1(\sqrt{\lambda}b) + \sqrt{\lambda}dJ_0(\sqrt{\lambda}b)], \tag{3}$$

где J_n и Y_n – функции Бесселя первого и второго рода, соответственно, порядка n.

Задача (1), (2) возникает при изучении смешанной задачи для уравнения колебания нагруженной цепи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x+m)g\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + f(x,t) = 0$$

в области $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 < x < l,\ \ t > 0\}$ с начальными условиями

$$U(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial t^2} = g\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = u(t),$$

с гравитационной постоянной g и управлением $u(t)$ упругой силой. Функция $f(x,t)$ представляет собой воздействие внешних сил. Аналогичная задача в случае, когда проводилось управление смещением, рассматривалась в работе [1].

Задача (1), (2) содержит спектральный параметр в граничном условии. Наряду с ней, рассмотрим задачу

$$xv''(x) + v'(x) + \left(\lambda x - \frac{1}{x}\right)v(x) = 0, \quad 0 < a < x < b, \tag{4}$$

$$v(a) = 0, \quad dbv'(b) + (d+b)v(b) = 0, \tag{5}$$

которая спектрального параметра в граничных условиях не содержит и имеет такое же характеристическое уравнение (3).

Основные результаты. Решением задачи (4), (5) будет система функций

$$v_n(x) = Y_1(\sqrt{\lambda_n}a)J_1(\sqrt{\lambda_n}x) - J_1(\sqrt{\lambda_n}a)Y_1(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n = 2,3,4,\ldots$$

Для этой задачи число $\lambda_1 = 0$ собственным значением не является. Заметим, что

$$X_n'(x) = -\sqrt{\lambda_n}v_n(x)$$

в силу известных соотношений

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad J_1'(x) = J_0(x) - J_1(x)/x, \quad Y_0'(x) = -Y_1(x), \quad Y_1'(x) = Y_0(x) - Y_1(x)/x.$$

Согласно результатам работ [2, с. 99; 3, с. 247] задача (4), (5) имеет простые собственные значения, расположенные на действительной оси, а значит, тем же свойством обладает и задача (1), (2). Задача (4), (5) является самосопряжённой и её система собственных функций образует ортонормированный базис в соответствующем весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$: $(f,g) = \int_a^b xf(x)g(x)\,dx$. Для задачи (1), (2) доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $d \neq (a^2 - b^2)/2b$, то система $\{X_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots$, собственных функций задачи (1), (2) без любой одной собственной функции $X_l(x)$ образует базис Рисса в весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$. Функции биортогонально сопряжённой системы $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе определяются по формуле*

$$\Psi_n(x) = \left(\int_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\right)^{-1}\left[X_n(x) - \frac{X_n(b)}{X_l(b)}X_l(x)\right].$$

Теорема 2. *Если $d = (a^2 - b^2)/2b$, то вся система $\{X_n(x)\}$, $n = 1,2,3,\ldots$, собственных функций задачи (1), (2) образует базис Рисса в весовом пространстве $L_{2,x}(a,b)$. Функции биортогонально сопряжённой системы $\{\Psi_n(x)\}$ к этой системе определяются по формуле*

$$\Psi_n(x) = \left(\int_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\right)^{-1}\left[X_n(x) - \frac{X_n(b)}{X_1(b)}X_1(x)\right], \quad n = 2,3,4,\ldots,$$

$$\Psi_1(x) = \left(\int_a^b x(Z'(x))^2\,dx\right)^{-1}\left[Z(b) - Z(x)\right],$$

где

$$Z(x) = -\frac{a^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}.$$

Доказательства теорем проводятся по схемам, разработанным в статьях [4, 5]. Осцилляционные свойства устанавливаются с помощью теоремы Руше. Отметим, что даже задача для простейшего оператора Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр, может иметь ненулевое кратное собственное значение при действительных коэффициентах (см. [6]). В теории уравнений смешанного типа соответсвующая задача со спектральным параметром в граничном условии рассматривалась в статье [7]. При выводе точной априорной оценки решения было использовано его представление в виде билинейных рядов.

Коэффициент в формуле для функции $\Psi_n(x)$ биортогональной системы в нуль не обращается при отрицательном значении параметра d, так как имеет место равенство

$$\int_a^b x(X'(x))^2\,dx = \lambda\biggl(\int_a^b xX_n^2(x)\,dx + dbX_n^2(b)\biggr).$$

Автор выражает благодарность академику Е.И. Моисееву за проявленный интерес к настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kapustin N., Polosin A.* On a mixed problem for oscillation of a heavy chain with loads // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1690. P. 040014.
2. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М., 1964.
3. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
4. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
5. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О спектральной задаче со спектральным параметром в граничном условии в теории уравнения радиального распространения тепла // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 10. С. 1382–1386.
6. *Гуляев Д.А.* О задаче с граничным условием третьего рода, одно из которых содержит спектральный параметр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013.
7. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 656–662.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.
После доработки 01.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.