

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре и летом 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 6).

DOI: 10.31857/S0374064122110140, EDN: MCOHFS

И. И. Матвеева (Новосибирск) “Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием” (17 июня 2022 г.).

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений с запаздыванием ($\tau > 0$) вида

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\dot{y}(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau), \dot{y}(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1)$$

где непрерывные $(n \times n)$ -матричные функции A , B , C T -периодичны ($T > 0$), а непрерывная вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по u_1 и неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \leq q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3 \|u_3\|^{1+\omega_3}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (2)$$

где $u_j \in \mathbb{R}^n$, $q_j, \omega_j \geq 0$, $j = \overline{1, 3}$. Наша цель – установить условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), получить оценки на множество притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Введём матричные функции

$$\mathcal{H}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(\cdot, \cdot) \equiv \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^* & K_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^* & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13}^* & Q_{23}^* & Q_{33} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие для некоторой положительной T -периодической функции $h \in C(\mathbb{R}_+)$ условиям

$$\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^*, \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t + T), \quad (3)$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t) \|u\|^2, \quad u, v \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

$$\mathcal{K} \in C^1(\mathbb{R}_+ \times [0, \tau]), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}^*, \quad \mathcal{K}(t, \cdot) = \mathcal{K}(t + T, \cdot), \quad \mathcal{K} \geq 0, \quad (5)$$

$$Q_{11} \equiv -\dot{H}_1 - H_1 A - A^* H_1 - K_1(\cdot, 0) - K_2(\cdot, 0)A - A^* K_2(\cdot, 0) - A^* K_3(\cdot, 0)A,$$

$$Q_{12} \equiv -\dot{H}_2 - H_1 B - A^* H_2 - K_2(\cdot, 0)B - A^* K_3(\cdot, 0)B,$$

$$Q_{13}(t) \equiv -H_1 C - H_2 - K_2(\cdot, 0)C - A^* K_3(\cdot, 0)C,$$

$$Q_{22} \equiv -\dot{H}_3 - H_2^* B - B^* H_2 + K_1(\cdot, \tau) - B^* K_3(\cdot, 0)B,$$

$$Q_{23} \equiv -H_2^* C - H_3 + K_2(\cdot, \tau) - B^* K_3(\cdot, 0)C, \quad Q_{33} \equiv K_3(\cdot, \tau) - C^* K_3(\cdot, 0)C.$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Астахова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Рассмотрим для системы (1) начальную задачу

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\dot{y}(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau), \dot{y}(t - \tau)), \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi \in C^1([-\tau, 0])$ – заданная вектор-функция.

Теорема 1. Если $F \equiv 0$ и функции $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{Q}$ для некоторых T -периодических функций $p, k \in C(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяют условиям (3)–(5) и

$$\left\langle \mathcal{Q}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{K}(t, s) + k(t) \mathcal{K}(t, s) \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad s \in [0, \tau], \quad (8)$$

$$\int_0^T \gamma(\xi) d\xi > 0, \quad \gamma(\xi) \equiv \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \quad (9)$$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво, и для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi\right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$V(0, \varphi) \equiv \left\langle \mathcal{H}(0) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{-\tau}^0 \left\langle \mathcal{K}(0, -s) \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \dot{\varphi}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \dot{\varphi}(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds. \quad (10)$$

Пусть теперь функция F удовлетворяет неравенству (2) при $q_1, \omega_1 > 0$ и $q_2 = q_3 = 0$, причём в условиях теоремы 1 для некоторой положительной функции $\sigma \in C(\mathbb{R}_+)$ обозначено

$$\beta_1 \equiv 2q_1(\|H_1\| + \|K_2(\cdot, 0)\| + \|A\|\|K_3(\cdot, 0)\|), \quad \beta_2 \equiv 2q_1(\|H_2\| + \|B\|\|K_3(\cdot, 0)\|),$$

$$\beta_3 \equiv 2q_1\|C\|\|K_3(\cdot, 0)\|, \quad \beta_4 \equiv q_1^2\|K_3(\cdot, 0)\|, \quad \beta \equiv \frac{1}{4\sigma}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + \beta_4^2, \quad \mathcal{Q}^\sigma \equiv \mathcal{Q} - \sigma I.$$

Теорема 2. Если функции $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{Q}^\sigma$ для некоторых T -периодических функций $p, k \in C(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяют условиям (3)–(5), неравенствам (7) для $\mathcal{Q}^\sigma$ (в качестве $\mathcal{Q}$), (8) и (9), а функция (10) удовлетворяет условию

$$V(0, \varphi) < h_0 \left(\frac{h_0}{\omega_1 R} \right)^{1/\omega_1}, \quad h_0 \equiv \min_{t \in [0, T]} h(t), \quad R \equiv \int_0^{+\infty} \beta(\xi) \exp\left(-\omega_1 \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi,$$

то для решения задачи (6) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi\right) (1 - \omega_1(V(0, \varphi))^{\omega_1} h_0^{-1-\omega_1} R)^{-1/(2\omega_1)}.$$

При доказательстве теорем 1, 2 используются функционалы Ляпунова–Красовского, предложенные в статье [1] и обобщающие функционалы из работ [2–4]. Обобщение этого класса

функционалов на случай переменного запаздывания и переменных матриц $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ позволяет устанавливать оценки на решения нелинейных систем с переменными коэффициентами и переменным сосредоточенным или распределённым запаздыванием [5, 6].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Литература. 1. Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103. 2. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28. 3. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077. 4. Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352. 5. Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 3. С. 579–594. 6. Matveeva I.I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18. № 2. P. 1689–1697.

И. В. Астахова (Москва) “Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений” (23 сентября 2022 г.).

Рассматривается задача об асимптотической эквивалентности двух уравнений:

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)} + p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y = f(x), \quad (1)$$

$$z^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)z^{(j)} + p(x)|z|^k \operatorname{sgn} z = 0, \quad (2)$$

где $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $k > 1$, а функции a_j ($j = \overline{0, n-1}$), p и f непрерывны.

Уравнение (2) можно рассматривать как возмущение уравнения (1) функцией f , а уравнение (1) – как возмущение линейного уравнения нелинейным слагаемым с коэффициентом p . Естественен вопрос: насколько близки решения возмущённого и невозмущённого уравнений при различных типах возмущений? В работе [1] получены результаты об асимптотической эквивалентности уравнений (1) и (2) (где $a_j = 0$) при экспоненциальной или степенной малости возмущения f , а в статье [2] при $f = 0$ исследуется асимптотическая близость решений уравнения (2) (и его частных случаев) к решениям соответствующих линейных уравнений.

Результат [2, следствие 4] об асимптотическом представлении решений уравнения (2) уточняет

Теорема 1. Если функции $a_0, \dots, a_{n-1}$, p непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)| dx < +\infty, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^{n-1+(k-1)m} |p(x)| dx < +\infty \quad \text{для некоторого } m \in \{0, \dots, n-1\},$$

то для любого $C \neq 0$ существует решение y уравнения (2), удовлетворяющее при $x \rightarrow +\infty$ условиям

$$y^{(j)}(x) \sim C \frac{m!}{(m-j)!} x^{m-j}, \quad j = \overline{0, m},$$

$$y^{(j)}(x) = o(x^{m-j}), \quad \int_{x_0}^{+\infty} s^{j-m-1} |y^{(j)}(s)| ds < +\infty, \quad j = \overline{m+1, n-1}.$$

Асимптотическую эквивалентность решений уравнений (1) с экспоненциально близкими правыми частями описывает

Теорема 2. Если функции $a_0, \dots, a_{n-1}, p, \varphi, \psi$ непрерывны на луче $[x_0, +\infty)$, причём функции p, φ, ψ ограничены и выполнены неравенства (3), а решение уравнения (1) с правой частью $f(x) = \varphi(x)e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$, удовлетворяет условию $y(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то существует единственное решение $y = z(x)$ уравнения (1) с правой частью $f(x) = \psi(x)e^{-\gamma x}$, удовлетворяющее соотношению

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\gamma x}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Следствие. Если функции $a_0, \dots, a_{n-1}, p, f$ непрерывны, причём функция p ограничена и выполнены неравенства (3), а для некоторых $C, \gamma > 0$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq Ce^{-\gamma x}, \quad x \geq x_0,$$

то для любого стремящегося к нулю при $x \rightarrow +\infty$ решения y уравнения (1) найдётся единственное решение z уравнения (2), удовлетворяющее соотношению (4), и наоборот, для любого стремящегося к нулю при $x \rightarrow +\infty$ решения z уравнения (2) найдётся единственное решение y уравнения (1), удовлетворяющее соотношению (4).

Подобный результат верен для уравнения (1) со степенной малостью f (для $a_j = 0$ см. [1]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I. On asymptotic equivalence of n -th order nonlinear differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 31–38. 2. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // Adv. in Nonlin. Anal. 2022. V. 11. № 1. P. 1598–1613.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация локальной энтропии, рассматриваемой как функции от точки фазового пространства” (30 сентября 2022 г.).

Пусть (X, d) – локально компактное метрическое пространство, а $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на множестве X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i < n} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где f^i ($i \in \mathbb{N}$) – i -я итерация отображения f , $f^0 \equiv \text{Id}_X$. Зафиксировав точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x, \rho) = \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$, попарные d_n^f -расстояния между которыми больше r . Локальную энтропию отображения f в точке x определим формулой (см. [1, с. 274])

$$h_d(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho),$$

пределы в которой существуют, так как величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho)$$

монотонна по каждой из переменных ρ и r . Функция

$$x \mapsto h_d(f, x), \quad x \in X, \quad (1)$$

может быть разрывной, как показывает следующий пример.

Пусть $X = [-1, 1]$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0), \\ 4x(1-x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда $h_d(f, 0) = \ln 2$ и $h_d(f, x) = 0$ при $x \in [-1, 0)$, поэтому функция (1) разрывна в нуле. Возникает естественный вопрос о её наименьшем бэровском классе.

Теорема 1. Для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow X$ функция (1) принадлежит второму классу Бэра, а множество точек её полунепрерывности снизу всюду плотное типа G_δ в пространстве X .

На множестве всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_k \in \{0, 1\}$, введём метрику

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \frac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}}, & x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство, гомеоморфное совершенному множеству Кантора, обозначим через Ω_2 .

Теорема 2. При $X = \Omega_2 \times \Omega_2$ с метрикой $d((x, \alpha), (y, \beta)) = \max\{d_{\Omega_2}(x, y), d_{\Omega_2}(\alpha, \beta)\}$ для непрерывного отображения

$$f((x_1, x_2, \dots), (\alpha_1, \alpha_2, \dots)) = ((x_{1+\alpha_1}, x_{2+\alpha_2}, \dots), (\alpha_1, \alpha_2, \dots))$$

функция (1) всюду разрывна на множестве X и не принадлежит первому классу Бэра.

Литература. 1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М., 2005.

И. Н. Сергеев (Москва) “О классах линейных приближений, обеспечивающих различные свойства ляпуновской, перроновской или верхнепредельной устойчивости дифференциальных систем” (7 октября 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и какой-либо окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(\cdot, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}^+ \times G). \quad (1)$$

Через S_* или S_δ будем обозначать множество *непродолжаемых* решений x системы (1), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| \neq 0$ или $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что система (1) обладает *перроновской (верхнепредельной)*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon \quad \left(\text{соответственно} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| \leq \varepsilon \right), \quad (2)$$

предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *частичной устойчивостью*, если для каждых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2);

3) *частной устойчивостью*, если для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_*$ удовлетворяет требованию (2);

4) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию (2) при $\varepsilon = 0$;

5) *глобальной устойчивостью*, если все решения $x \in S_*$ удовлетворяют требованию (2) при $\varepsilon = 0$.

Свойства перроновского и верхнепредельного типов из определения 1 являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств (некоторые из них см. в [3, гл. II, § 1]), для описания которых достаточно теперь внести в определение 1 следующие поправки: в пп. 1)–3) заменить (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t)| \leq \varepsilon,$$

после чего в пп. 4) и 5) с требованием (2) в скобках дополнительно потребовать от системы (1) ляпуновскую устойчивость, определённую с помощью указанной замены в п. 1).

Определение 2. Будем говорить, что система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

если выполнены условия

$$A(\cdot) \equiv f'(\cdot, 0) \in C(\mathbb{R}_+), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \rightarrow 0.$$

Множество всевозможных линейных приближений для систем вида (1) обозначим через $\mathcal{M}^n$. Скажем, что данное линейное приближение (3) *обеспечивает* некоторое свойство, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением. Введём пять *классов* линейных приближений вида (3)

$$\mathcal{S}_\pi^b, \mathcal{S}_\pi^c, \mathcal{S}_\pi^d, \mathcal{S}_\pi^a, \mathcal{S}_\pi^g,$$

обеспечивающих соответственно перроновские свойства устойчивости из пп. 1)–5) определения 1. Аналогичные классы для верхнепредельных или ляпуновских свойств обозначим теми же символами, но с заменой в них нижних индексов π на σ или λ соответственно.

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть *первого метода Ляпунова*, посвящено огромное число работ (см. [4, § 11]). Часть представляемых ниже утверждений анонсирована в докладах [5, 6]. Прежде всего, между классами из определения 2 существует естественная иерархия, которую описывает

Теорема 1. *Имеют место включения*

$$\mathcal{S}_\pi^g \subseteq \mathcal{S}_\pi^a \subseteq \mathcal{S}_\pi^b \subseteq \mathcal{S}_\pi^c \subseteq \mathcal{S}_\pi^d, \quad \pi = \pi, \sigma, \lambda,$$

$$\mathcal{S}_\lambda^k \subseteq \mathcal{S}_\sigma^k \subseteq \mathcal{S}_\pi^k, \quad k = g, a, b, c, d.$$

Как оказалось, общее число различных непустых классов, обеспечивающих всевозможные разновидности устойчивости, равно всего лишь двум – их совпадения как раз и обосновывают корректность обозначений в следующих теоремах.

Теорема 2. *Имеют место следующие совпадения:*

$$\mathcal{S}_\pi^g \equiv \mathcal{S}^g, \quad \mathcal{S}_\pi^a = \mathcal{S}_\pi^b \equiv \mathcal{S}^{ab}, \quad \mathcal{S}_\pi^c = \mathcal{S}_\pi^d \equiv \mathcal{S}^{cd}, \quad \pi = \pi, \sigma, \lambda. \quad (4)$$

Теорема 3. *Объединённые классы (4) удовлетворяют цепочке соотношений*

$$\emptyset = \mathcal{S}^g \subsetneq \mathcal{S}^{ab} \subseteq \mathcal{S}^{cd} \subsetneq \mathcal{M}^n.$$

Среднее из трёх включений в теореме 3 при $n > 1$ является строгим, а при $n = 1$, наоборот, обращается в равенство.

Теорема 4. *При $n > 1$ имеет место строгое включение*

$$\mathcal{S}^{ab} \subsetneq \mathcal{S}^{cd}.$$

Теорема 5. *При $n = 1$ имеет место равенство*

$$\mathcal{S}^{ab} = \mathcal{S}^{cd} \equiv \mathcal{S}^{abcb}.$$

Представляет интерес аналогичный полный список всех включений, а также совпадений и несовпадений для классов линейных приближений, обеспечивающих различные свойства неустойчивости, т.е. отрицания свойств устойчивости из определения 2.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 5. Сергеев И.Н. Об исследовании перроновских и ляпуновских свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 897–899. 6. Сергеев И.Н. Об исследовании ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 857–858.

А. Н. Ветохин (Москва) “О бэровской классификации локальной энтропии, рассматриваемой как функция от параметра” (14 октября 2022 г.).

Пусть (X, d) – локально-компактное метрическое пространство. По метрическому пространству $\mathcal{M}$, непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M} \times X \rightarrow X \quad (1)$$

и точке $x \in X$ образуем функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), x), \quad \mu \in \mathcal{M}, \quad (2)$$

где $h_d(f, x)$ – локальная энтропия непрерывного отображения f в точке x , определение которой приведено в предыдущем докладе автора от 30 сентября 2022 г. (там же см. определение пространства Ω_2). В случае компактности метрического пространства X рассмотрим функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)), \quad \mu \in \mathcal{M}, \quad (3)$$

где $h_{\text{top}}(f)$ – топологическая энтропия непрерывного отображения f (см. [1]).

В работе [2] установлено, что при $X = [0, 1]$ для любого отображения (1) функция (3) полунепрерывна снизу, а значит, принадлежит первому классу Бэра (на $\mathcal{M}$). Вообще же говоря, при произвольных $\mathcal{M}$ и X для любого отображения (1) функция (3) принадлежит второму классу Бэра [3], а если $\mathcal{M}$ и X – множества Кантора, то для некоторого отображения (1), задающего гомеоморфизм из X в X при каждом фиксированном значении $\mu \in \mathcal{M}$, функция (3) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [4].

В статье [5] установлено, что для локально-компактного пространства X со счётной базой и любого отображения (1) функция (3) (в этом случае топологическая энтропия определяется как точная верхняя грань множества всех топологических энтропий компактов, содержащихся в пространстве X) принадлежит третьему классу Бэра. Там же представлены пространство X , множество $\mathcal{M}$ иррациональных точек на прямой (со стандартной метрикой) и отображение (1), для которых функция (3) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.

В случае локальной компактности пространства X для функции (2) справедлива

Теорема 1. Для любых отображения (1) и точки $x \in X$ функция (2) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.

Теорема 2. Если $\mathcal{M}$ и X – множества Кантора, то для каждого $i = \overline{0, 2}$ существует такое отображение (1), что для каждой точки $x \in X$ функция (2) принадлежит i -му классу Бэра, а при $i = 1, 2$ не принадлежит $(i - 1)$ -му классу Бэра.

Построим локально-компактное метрическое пространство $\mathcal{C}$, точками которого являются всевозможные пары (x, i) , где $x \in \Omega_2$ и $i \in \mathbb{N}$, а расстояние между ними задаётся формулой

$$d_{\mathcal{C}}((x, i), (y, j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x, y), & i = j; \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \quad x, y \in \Omega_2, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. Если $\mathcal{M}$ – множество иррациональных точек на прямой и $X = \mathcal{C}$, то для некоторого отображения (1) и любого $x \in X$ функция (2) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.

Теорема 4. Если $\mathcal{M}$ – множество иррациональных точек на прямой и $X = \mathcal{C}$, то для некоторого отображения (1) и каждого $i = \overline{0, 3}$ функция

$$\mu \mapsto h_{d_{\mathcal{C}}}(f(\mu, \cdot), ((0, 0, \dots), i)), \quad \mu \in \mathcal{M},$$

принадлежит i -му классу Бэра, а при $i \neq 0$ ещё и не принадлежит $(i - 1)$ -му классу Бэра.

Литература. 1. Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. № 2. P. 309–319. 2. Misiurewicz M.T. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys. 1979. V. 27. P. 167–169. 3. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53.

№ 4. С. 448–453. 4. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 64–67. 5. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определённых на произвольном метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1005–1013.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению” (21 октября 2022 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \quad (1)$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) \equiv f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

причём на нелинейную добавку $h(t, x) \equiv f(t, x) - A(t)x = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ здесь не накладываем. Через $x_f(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через $S_\delta(f)$ – множество решений с начальными значениями x_0 , удовлетворяющими условию $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1 [1]. *Функционал блуждаемости* $P(u, t)$, определённый для чисел $t \in \mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемых функций $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, зададим формулой

$$P(u, t) \equiv \int_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)'| d\tau, \quad \tau \in [0, t],$$

добавив, что всякий раз, когда функция u определена не на всём отрезке $[0, t]$, он принимает значение $+\infty$. Системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего и верхнего шаровых функционалов блуждаемости*, определяемых соответственно равенствами

$$\check{P}_b(f, t, L) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow 0} P(Lx_f(\cdot, x_0), t), \quad \hat{P}_b(f, t, L) \equiv \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} P(Lx_f(\cdot, x_0), t). \quad (3)$$

Нижний (слабый) $\check{\rho}_b^\circ(f)$ и верхний (сильный) $\hat{\rho}_b^\bullet(f)$ шаровые показатели блуждаемости системы (1) зададим формулами

$$\check{\rho}_b^\circ(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{P}_b(f, t, L), \quad \hat{\rho}_b^\bullet(f) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \hat{P}_b(f, t, L), \quad (4)$$

а *верхний (слабый) $\hat{\rho}_b^\circ(f)$ и нижний (сильный) $\check{\rho}_b^\bullet(f)$ показатели блуждаемости* – теми же формулами (4) соответственно, но с переставленными в них местами пределом при $t \rightarrow +\infty$ и точной нижней гранью по $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$.

Показатели (4) оказываются соответственно наименьшим и наибольшим из четырёх показателей блуждаемости системы (1), введённых в определении 1.

Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой (см., например, [2–4]): *колеблемость* или *ориентированную, неориентированную, частотную и плоскую вращаемость*, а также *поворачиваемость* данного ранга. Помимо шаровых показателей можно рассматривать ещё и *сферические* [5] или *радиальные* [6].

Определяемая ниже полная блуждаемость дифференциальной системы (вблизи её нулевого решения, о чём мы для краткости больше не будем упоминать) отдалённо напоминает устойчивость по Ляпунову. В отличие от устойчивости, блуждаемость означает не то, что все решения, начинающиеся достаточно близко к нулю, так и остаются навсегда в заданной его окрестности, а то, что их средняя (по времени) угловая скорость положительна и даже

отделена от нуля (равномерно по всем этим решениям сразу). Однако в нелинейном случае дело усложняется тем, что упомянутые решения могут оказаться определёнными не на всей полуоси времени. Аналогичным образом обстоит дело и с полной неблуждаемостью.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает:

1) *полной блуждаемостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$, что для любых $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ и $t > T$ справедлива оценка

$$\check{P}(f, t, L) > \varepsilon t;$$

2) *полной неблуждаемостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $T \in \mathbb{R}_+$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$, что для каждого $t > T$ справедлива оценка

$$\hat{P}(f, t, L) < \varepsilon t.$$

Наличие у системы полной блуждаемости или неблуждаемости однозначно определяется знаками её соответствующих шаровых показателей блуждаемости, как показывает

Теорема 1. Полная блуждаемость и полная неблуждаемость системы (1) равносильны положительности её нижнего шарового показателя блуждаемости $\check{\rho}_b^\circ(f) > 0$ и, соответственно, равенству нулю её верхнего шарового показателя блуждаемости $\hat{\rho}_b^\bullet(f) = 0$.

Все шаровые показатели блуждаемости системы совпадают с соответствующими показателями системы её первого приближения (которые подсчитываются существенно проще, так как в случае линейной системы в формулах (3) нижний и верхний пределы при $x_0 \rightarrow 0$ можно заменить точными нижней и верхней гранями по всем $x_0 \neq 0$ соответственно), т.е. справедлива

Теорема 2. Для любой системы (1) и системы (2) её первого приближения справедливы равенства

$$\check{\rho}_b^*(f) = \check{\rho}_b^*(f_I), \quad \sim = \sim, \wedge, \quad * = \circ, \bullet.$$

Таким образом, и полная блуждаемость, и полная неблуждаемость нелинейной системы однозначно определяются системой её первого приближения, что, в частности, и подтверждает

Теорема 3. Полная блуждаемость и полная неблуждаемость системы (1) равносильны положительности показателя $\check{\rho}_b^\circ(f_I) > 0$ системы (2) её первого приближения и, соответственно, равенству нулю показателя $\hat{\rho}_b^\bullet(f_I) = 0$ системы (2).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 2. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 5. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 6. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562.

Н. Л. Марголина, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев (Кострома) “О вспомогательных показателях Боля системы с неограниченными коэффициентами” (28 октября 2022 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \text{End } \mathbb{R}^n), \quad (1)$$

при $k = \overline{1, n}$ верхним и нижним вспомогательными показателями Боля (см. [1, с. 331]) называются соответственно величины

$$\overline{\beta}_k(A) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} T^{-1} \ln d_k X_A(iT, (i-1)T), \quad (2)$$

$$\underline{\beta}_k(A) = \underline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} T^{-1} \ln d_k X_A(iT, (i-1)T), \quad (3)$$

где $X_A(\cdot, \cdot)$ – оператор Коши системы (1), а $d_k X$ – сингулярные числа оператора $X \in \text{End } \mathbb{R}^n$, занумерованные в порядке нестрого убывания.

Из формул (2) и (3) вытекает неравенство $\underline{\beta}_k(A) \leq \overline{\beta}_k(A)$, причём [1, с. 332] в случае ограниченной функции A первые (старшие, при $k = 1$) нижний и верхний вспомогательные показатели Боля системы (1) совпадают друг с другом, а также с генеральным $\varkappa_g(A)$ (см. [2, гл. 3, § 4]) и с особым $\Omega_0(A)$ (см. [3, гл. 3, § 8]) показателями системы (1):

$$\underline{\beta}_1(A) = \overline{\beta}_1(A) = \Omega_0(A) = \varkappa_g(A).$$

Теорема. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует система (1), для которой выполнены неравенства

$$\underline{\beta}_k(A) < \overline{\beta}_k(A), \quad k = \overline{1, n}.$$

Соотношения между верхним особым и генеральным показателями неограниченной системы обсуждаются в работе [4].

Литература. 1. Shiryayev K.E. Central exponent of a system with unbounded coefficients // J. of Math. Sci. 2015. V. 210. № 3. P. 331–332. 2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 4. Margolina N.L. Of the residual uniform stability of linear systems with unbounded coefficients // J. of Math. Sci. 2015. V. 210. № 3. P. 245–246.

С. С. Ежак, М. Ю. Тельнова (Москва) “Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал” (11 ноября 2022 г.).

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (1)$$

где потенциал Q для заданных $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, принадлежит множеству $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \int_0^1 x(1-x)Q(x) dx < +\infty. \quad (2)$$

Изучаются оценки (см. [1]) первого собственного значения задачи (1), (2):

$$m_{\alpha, \beta, \gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha, \beta, \gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q).$$

Если второе условие (2) не выполняется, то ни для каких $\lambda \in \mathbb{R}$ и $p \in [0, +\infty]$ не существует нетривиального решения y уравнения (1), удовлетворяющего условиям $y(0) = 0$ и $y'(0) = p$ [2], причём множество $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ пусто тогда и только тогда, когда $\gamma < 0$ и $\alpha \leq 2\gamma - 1$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$ [3]. При $\gamma < 0$ и $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, а также при $\gamma > 0$ для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ имеем [2, 4]

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q, y], \quad R[Q, y] \equiv \left(\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Qy^2 dx \right) / \int_0^1 y^2 dx.$$

Теорема 1. Для любых $\gamma > 1$ и $\alpha, \beta < 2\gamma - 1$ (или $\gamma < -1$ и $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$) существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $0 < u \in H_0^1(0, 1)$, что $m_{\alpha, \beta, \gamma} = R[Q_*, u]$ (или, соответственно, $M_{\alpha, \beta, \gamma} = R[Q_*, u]$), и

$$u'' + mu = -x^{\alpha/(1-\gamma)}(1-x)^{\beta/(1-\gamma)}u^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}, \quad \int_0^1 x^{\alpha/(1-\gamma)}(1-x)^{\beta/(1-\gamma)}u^{2\gamma/(\gamma-1)}(x) dx = 1.$$

Теорема 2. При $\gamma = 1$ имеем: если $\alpha, \beta \leq 0$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} \geq 3\pi^2/4$, а если $\alpha, \beta \leq 1$ и $\alpha > 0$ или $\beta > 0$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} \geq 0$. При $\gamma \geq 1$ имеем: если $\alpha > \gamma$ или $\beta > \gamma$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} \leq 0$, а если $\alpha, \beta \leq \gamma \neq 1$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} = 0$. При $0 \neq \gamma < 1$ имеем $m_{\alpha, \beta, \gamma} = -\infty$.

Теорема 3. При $\gamma > 1$, а также при $0 < \gamma \leq 1$ и $\alpha \leq 2\gamma - 1$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$ имеем $M_{\alpha, \beta, \gamma} = \pi^2$. При $0 \neq \gamma \leq 1$ и $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ имеем $M_{\alpha, \beta, \gamma} < \pi^2$.

Литература. 1. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. № 3. С. 73–144. 2. Ezhak S., Telnova M. On conditions on the potential in a Sturm–Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue // Springer Proc. in Math. and Stat. 2020. V. 333. P. 481–496. 3. Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 852–853. 4. Ezhak S., Telnova M. On some estimates for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem // Int. Workshop QUALITDE-2021. Tbilisi, Georgia. P. 66–69.

В. В. Быков (Москва) “Функции, определяемые условными показателями Боля и их мажорантами” (18 ноября 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $\mathcal{M}^n$ – его подмножество, состоящее из систем с ограниченными коэффициентами. Наделим пространство $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ равномерной метрикой

$$\rho_U(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Фундаментальное понятие показателя Боля (генерального показателя), введенное П. Болем [1] и независимо от него К.П. Персидским [2] (подробнее см. [3, с. 211–212]), также называют особым показателем [4, с. 116–117].

Определение 1 [3, гл. 3, § 4.2]. Показателем Боля, отвечающим нетривиальному подпространству $L \subset \mathbb{R}^n$ начальных значений решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, называется величина

$$\kappa_g(A, L) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \sup_{\substack{t \geq \tau \geq 0 \\ \xi \in L \setminus \{0\}}} e^{-\lambda(t-\tau)} |x(t, \xi)| / |x(\tau, \xi)| < +\infty \right\},$$

где $x(\cdot, \xi)$ – решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \xi) = \xi$, причём $\inf \emptyset \equiv +\infty$.

Определение 2 [5]. Условными показателями Боля системы (1) и их минимальными полунепрерывными сверху мажорантами называются величины

$$\beta_i(A) = \inf_{L \in G_i(\mathbb{R}^n)} \kappa_g(A, L), \quad \overline{\beta}_i(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sup_{\rho_U(B, A) \leq \varepsilon} \beta_i(B), \quad i = \overline{1, n},$$

где $G_i(\mathbb{R}^n)$ – множество i -мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Старший показатель β_n полунепрерывен сверху [3, теорема 4.6], но при $n \geq 2$ не полунепрерывен снизу [6] (причём уже на подпространстве $\mathcal{M}^n$), а остальные условные показатели Боля β_i , $i = \overline{1, n-1}$, не полунепрерывны даже сверху.

Для метрического пространства M рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

с непрерывным отображением $A : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. В.М. Миллионщиков установил [5], что все условные показатели Боля, отвечающие семейству (2) и обозначаемые через $\beta_i(\cdot, A)$, $i = \overline{1, n}$, принадлежат второму классу Бэра как функции параметра, и поставил задачу (см. [7]) о наименьшем классе Бэра, которому принадлежат их мажоранты $\overline{\beta}_i(\cdot, A)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является *верхнепредельной*, если она для некоторой последовательности непрерывных функций $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, представима в виде

$$f(\mu) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Класс всех верхнепредельных функций $M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathfrak{U}(M)$.

Замечание. Принадлежность функции f классу $\mathfrak{U}(M)$ равносильна каждому из следующих условий:

1) функция f представима как поточечный предел убывающей последовательности функций первого бэровского класса;

2) прообраз любого луча $[r, +\infty]$ ($r \in \mathbb{R}$) при отображении f является множеством типа G_δ (функции, удовлетворяющие этому условию, составляют класс $(*, G_\delta)$ [8, § 37.1]).

Равносильность условий 1) и 2) установлена в монографии [8, § 37.1], а равносильность условия 2) и определения 3 – в работе [9, следствие 2].

Класс всех непрерывных отображений $A : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначим через $\tilde{C}^n(M)$, а его подкласс ограниченных при каждом фиксированном $\mu \in M$ отображений – через $C^n(M)$.

Задачу В.М. Миллионщикова полностью решает следующая

Теорема. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, n}$ классы функций

$$\{\beta_i(\cdot, A) : A \in \tilde{C}^n(M)\} \quad \text{и} \quad \{\bar{\beta}_i(\cdot, A) : A \in \tilde{C}^n(M)\}$$

совпадают с классом $\mathfrak{U}(M)$, а классы функций

$$\{\beta_i(\cdot, A) : A \in C^n(M)\} \quad \text{и} \quad \{\bar{\beta}_i(\cdot, A) : A \in C^n(M)\}$$

совпадают с его подклассом, состоящим из функций $M \rightarrow \mathbb{R}$, каждая из которых имеет конечную полунепрерывную сверху миноранту.

Литература. 1. Bohl P. Über Differentialungleichungen // J. Reine und Angew. Math. 1913. Bd. 144. Hf. 4. S. 284–318. 2. Персидский К.П. Об устойчивости движения по первому приближению // Мат. сб. 1933. Т. 40. № 3. С. 284–292. 3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 5. Миллионщиков В.М. Условные показатели Боля линейных систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464. 6. Миллионщиков В.М. О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 4. С. 749–750. 7. Миллионщиков В.М. Нерешённая задача из теории условной устойчивости // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46. № 6. С. 204. 8. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 9. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов обобщенных расслоений Миллионщикова как функции на базе расслоения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 2. С. 55–71.

Н. А. Антонов (Москва) “Применение дробных степенных рядов к решению некоторых уравнений типа Эмдена–Фаулера с дробной производной” (25 ноября 2022 г.).

Дифференциальные уравнения с дробными производными описывают физические процессы [1–4]. Для их решения используются разные методы, в частности, метод RFPS (residual fractional power series), позволяющий находить решения в виде дробных степенных рядов (см., например, [5]). С его помощью строится решение задачи Коши для уравнения типа Эмдена–Фаулера с дробными производными, применяемого в задачах, описывающих радиационное охлаждение, кинетику процессов горения, концентрацию реактивов в химических реакторах, поведение изотермических газов и термоэлектронную эмиссию [6, 7].

Обозначим через C_μ , где $\mu \in \mathbb{R}$, пространство функций $f \in C(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$, каждая из которых представима в виде $f(x) = x^\mu g(x)$ для некоторых $p > \mu$ и $g \in C(\mathbb{R}_+)$, а через C_μ^n , где $n \in \mathbb{N}$, – пространство таких функций f , что $f^{(n)} \in C_\mu$.

Определение 1. Для заданных $x_0 \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто функции $f \in C_{-1}^n$ порядка $\alpha \in (n-1, n)$ или порядка n называется

$${}_x^C D_x^\alpha f \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad \text{или, соответственно,} \quad {}_x^C D_x^n f \equiv f^{(n)}(x).$$

Определение 2. Для заданного $\alpha > 0$ дробным степенным рядом с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-x_0)^{n\alpha}, \quad x \geq x_0.$$

Свойства дробных степенных рядов см. в статье [8]. В случае $\alpha \in (1/2, 1]$, обозначив $D_x^\alpha \equiv {}_0^C D_x^\alpha$, рассмотрим задачу Коши

$$D_x^{2\alpha} u + \frac{a}{x^\alpha} D_x^\alpha u + s(x)g(u) = h(x), \quad x > 0, \quad u(0) = \hat{u}_0, \quad D_0^\alpha u = 0, \quad (1)$$

где

$$s(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad h(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad g(u) \equiv \sum_{k=0}^K a_k u^k, \quad K \in \mathbb{N}.$$

Решение задачи (1) ищем в виде дробного степенного ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad \left(U_N(x) \equiv \sum_{n=0}^N u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \right). \quad (2)$$

Теорема. Для ряда (2) верны равенства $u_0 = \hat{u}_0$, $u_1 = 0$ и

$$u_N \left(1 + \frac{a\Gamma(1+(N-2)\alpha)}{\Gamma(1+(N-1)\alpha)} \right) = h_{N-2} - D_0^{(N-2)\alpha} \left(\sum_{n=0}^N s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \sum_{k=0}^K a_k U_N^k(x) \right), \quad N \geq 2.$$

Следствие 1. Если $s(x) \equiv s$, $h(x) \equiv 0$ и $g(u) \equiv u$, то решение задачи (1) представимо в виде суммы ряда

$$u(x) = \hat{u}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n s^n \hat{u}_0 \left(\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(1+(2k-1)\alpha)}{\Gamma(1+(2k-1)\alpha) + a\Gamma(1+2(k-1)\alpha)} \right) \frac{x^{2n\alpha}}{\Gamma(1+2n\alpha)},$$

сходящегося абсолютно и равномерно по $x \geq 0$.

В условиях следствия 1 для оператора целочисленного дифференцирования ($\alpha = 1$) находим решения задачи (1) при $\hat{u}_0 = s(x) = 1$ и $a = \overline{1, 5}$:

$$u(x) = J_0(x), \frac{\sin x}{x}, \frac{2J_1(x)}{x}, \frac{3\sin x - 3x \cos x}{x^3}, \frac{8J_2(x)}{x^2},$$

где $J_a(x)$ – функция Бесселя первого рода. Заметим, что в работе [9] при $a = 2$ другим методом (FDT) найдено такое же решение.

Следствие 2. Если $s(x) \equiv x^\alpha$ и

$$h(x) \equiv \Gamma(1+2\alpha) + \frac{a\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} + x^\alpha (\hat{u}_0 + x^{2\alpha})^k, \quad g(u) = u^k,$$

где $k \in \mathbb{N}$, то задача (1) имеет решение $u(x) = \hat{u}_0 + x^{2\alpha}$.

Литература. 1. Podlubny I. Fractional Differential Equations // Math. in Sci. and Engin. 1999. V. 198. 2. Das S. Functional Fractional Calculus. Berlin, 2011. 3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск, 2008. 4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006. 5. Syam M.I. Analytical solution of the fractional initial Emden–Fowler equation using the fractional residual power series method // Int. J. of Appl. and Comput. Math. 2018. V. 4 (106). P. 1–8. 6. Wang H.H., Hu Y. Solutions of fractional Emden–Fowler equations by homotopy analysis method // J. of Adv. in Math. 2017. V. 13 (1). P. 1–6. 7. Chandrasekhar S. Introduction to the Study of Stellar Structure. New York, 1967. 8. El-Ajou A., Abu Arqub O., Al Zhour Z., Momani S. New results on fractional power series: theories and applications // Entropy. 2013. V. 15. P. 5305–5323. 9. Rebenda J., Šmarda Z. A numerical approach for solving of fractional Emden–Fowler type equations // Intern. Conf. of Numer. Anal. and Appl. Math. (ICNAAM–2017). AIP Conf. Proc. 2018. V. 1978.

И. В. Астахова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “Об одной задаче двойного экстремума в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (2 декабря 2022 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + h(x, t)u, \quad (x, t) \in Q_T \equiv (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

с гладкими в $\overline{Q}_T$ коэффициентами a, b, h , граничными функциями $\varphi, \psi \in W_2^1(0, T)$ и начальной функцией $\xi \in L_2(0, 1)$. Поставим задачу управления с точечным наблюдением: фиксируя функции ξ, ψ и управляя температурой φ на левом конце отрезка, стараемся добиться того, чтобы температура $u(x_0, t)$ в заданной точке $x_0 \in (0, 1)$ оставалась интегрально близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0, T)$. Другие типы экстремальных задач с финальным или распределённым наблюдением для параболических уравнений изучались в работах [1, 2]. Продолжая исследования [3–5], изучим задачу о двойном минимуме, дополнительно минимизируя функционал по некоторому классу весовых функций.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $t \mapsto u(\cdot, t)$ ($[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$) непрерывно [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(\cdot, T) = \eta(0, \cdot) = 0$. Слабым решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0, \cdot) = \varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} f(x, t) dx dt = \int_0^1 \xi(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T a(1, t) \psi(t) \eta(1, t) dt, \quad f \equiv au_x \eta_x - bu_x \eta - hu \eta - u \eta_t.$$

Теорема 1 [7]. Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём существует такая константа C_1 (не зависящая от φ, ψ и ξ), что выполнено неравенство

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1 (\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ – множество управляющих функций φ , которое далее считаем непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а $Z \subset L_2(0, T)$ – множество целевых функций z . Рассмотрим функционал

$$J[z, \rho, \varphi] \equiv \int_0^T (u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ , а ρ – весовая функция из множества $P \equiv \{\rho \in L_\infty(0, T) : \operatorname{ess\,inf}_{t \in (0, T)} \rho(t) > 0\}$. Зафиксировав функции z и ρ , рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi].$$

Теорема 2 [5, 7, 8]. Для любых функций $z \in L_2(0, T)$ и $\rho \in P$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

При $\hat{\rho} > \check{\rho} > 0$ введём подкласс $\tilde{P} \subset \{\rho \in P : \operatorname{ess\,inf}_{t \in (0, T)} \rho(t) \geq \check{\rho}, \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \rho(t) \leq \hat{\rho}\}$ и поставим задачу повторной минимизации

$$\mu[z, \tilde{P}, \Phi] = \inf_{\rho \in \tilde{P}} m[z, \rho, \Phi].$$

Определение [9]. Подмножество $Y \subset X^*$ пространства, сопряженного к банахову пространству X , называется *регулярно выпуклым*, если для любого $y \in X^* \setminus Y$ существует такое $x_0 \in X$, что $\sup_{f \in Y} f(x_0) < y(x_0)$.

Теорема 3. Если множество $\tilde{P}$ регулярно выпукло в $L_\infty(0, T)$, то для любой функции $z \in L_2(0, T)$ существуют функции $\rho_0 \in \tilde{P}$ и $\varphi_0 \in \Phi$, для которых

$$\mu[z, \tilde{P}, \Phi] = J[z, \rho_0, \varphi_0].$$

В доказательстве теоремы 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [9, теорема 10]. Если X – сепарабельное банахово пространство, то множество $Y \subset X^*$ регулярно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и $*$ -слабо замкнуто.

Лемма 2 [10, гл. 8, § 7]. Для любой ограниченной последовательности $\rho_1, \rho_2, \dots \in L_\infty(0, T)$ существуют подпоследовательность $(\rho_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ и такая функция $\rho_0 \in L_\infty(0, T)$, что для любой функции $\zeta \in L_1(0, T)$ выполнено равенство

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \rho_{k_j}(t) \zeta(t) dt = \int_0^T \rho_0(t) \zeta(t) dt.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied optimal control theory of distributed systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 7. Астапова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 8. Астапова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. № 1. С. 28–31. 9. Krein M., Šmuljan V. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Ann. of Math. 1940. V. 41. № 3. P. 556–583. 10. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск, 2001.