ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1587–1595

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. Б. А. Алиев

В сепарабельном гильбертовом пространстве H исследуется асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Спектральный параметр задачи линейно входит в уравнение и в одно из краевых условии как квадратный трёхчлен. Найдены асимптотические формулы для собственных значений рассматриваемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122120019, EDN: NBSMHW

Введение. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Через $L_2((0,1);H)$ обозначим множество всех вектор-функций $x \to u(x) : (0,1) \to H$, сильно измеримых и таких, что $\int_0^1 \|u(x)\|_H^2\,dx < +\infty$. Как известно, $L_2((0,1);H)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2((0,1);H)} = \int\limits_0^1 (u(x),v(x))_H\,dx.$$

Пусть A – самосопряжённый положительно-определённый оператор в H $(A = A^* \geqslant \gamma^2 I$, I – единичный оператор в $H)$ с областью определения $D(A)$. Поскольку A^{-1} ограничен в H, то $H(A) := \{u : u \in D(A),\ \|u\|_{H(A)} = \|Au\|_H\}$ является гильбертовым пространством, норма которого эквивалентна норме оператора A. Положим

$$W_2^2((0,1);H(A),H) :=$$

$$:= \{u : Au, u'' \in L_2((0,1);H),\quad \|u\|^2_{W_2^2((0,1);H(A),H)} = \|Au\|^2_{L_2((0,1);H)} + \|u''\|^2_{L_2((0,1);H)}\}.$$

Множество $W_2^2((0,1);H(A),H)$ является гильбертовым пространством [1, с. 23].

В настоящей работе в сепарабельном гильбертовом пространстве H исследуется асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр; A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в H, и обратный оператор A^{-1} вполне непрерывен в H; α_i, $i = 0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq 0$. При этих предположениях доказывается, что собственные значения краевой задачи (1), (2) являются вещественными. Далее доказано, что краевая задача (1), (2) имеет три серии собственных значений, две из которых ведут себя асимптотически как вещественные числа, являющиеся нулями квадратного трёхчлена $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2$, другая серия асимптотически ведет себя как $\mu_k + n^2\pi^2$, где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора A.

Определение. *Собственными значениями* краевой задачи (1), (2) назовём те значения λ, при которых задача (1), (2) имеет нетривиальное решение, принадлежащее пространству $W_2^2((0;1);H(A),H)$.

Ранее спектральная задача с неклассической асимптотикой для уравнения Лапласа в квадрате была изучена в статье [2]. Точнее, рассмотрена задача, содержащая в одном из краевых условий дифференциальный оператор и имеющая последовательность собственных значений, сходящихся к нулю.

В работе [3] рассмотрена спектральная задача для уравнения Лапласа в квадрате, в которой спектр не является дискретным. Далее, в статье [4] в ограниченной области $\Omega \in R^n$ с достаточно гладкой границей Γ для уравнения Лапласа исследована следующая спектральная задача:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$-u = \lambda \frac{\partial u}{\partial v} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

где λ – спектральный параметр, v – внутренняя нормаль к границе Γ. Доказано, что спектр краевой задачи (3), (4) дискретен и состоит из двух серий собственных значений, сходящихся соответственно к нулю и к $+\infty$.

Известно, что многие спектральные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, заданные в негладких областях (в прямоугольнике), сводятся к спектральным краевым задачам для эллиптических дифференциально-операторных уравнений в некотором гильбертовом пространстве.

Отметим, что некоторые спектральные вопросы краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр входит в уравнение и в граничные условия, изучались в работах [5–9] и др.

После спектрального разложения по собственным элементам оператора, фигурирующим в уравнении, которые образуют полный ортонормированный базис, поставленная для эллиптических дифференциально-операторных уравнений спектральная задача сводится к спектральной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Спектральные вопросы краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в краевых условиях исследованы в различных аспектах. Так, например, в [10–12] изучены спектральные вопросы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, в котором один и тот же спектральный параметр присутствует в уравнении линейно, а в одном из краевых условий – квадратично. В работе [13] исследуется асимптотическое поведение собственных значений краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр λ входит в уравнение линейно, а в одном из краевых условий представляет собой квадратный трёхчлен относительно λ.

1. Свойства собственных значений.

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, обратный к которому вполне непрерывен;

2) α_i, $i=0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0<0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1\neq 0$.

Тогда собственные значения краевой задачи (1), (2) вещественны.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 из [14].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда корни*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \mp \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}$$

квадратного трёхчлена $\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$ не являются собственными значениями краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Собственные элементы оператора A, соответствующие собственным значениям μ_k, обозначим через φ_k, $k \in \mathbb{N}:$ $A\varphi_k = \mu_k\varphi_k$. Известно, что система $\{\varphi_k\}_1^\infty$ образует полный ортонормированный базис в пространстве H. Тогда любой элемент $u \in H$ разлагается в ряд Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u,\varphi_k)_H\varphi_k.$$

Известно (см., например, [15, с. 578]), что для любого элемента $u \in D(A)$ имеет место разложение

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(u,\varphi_k)_H\varphi_k,$$

где ряд $\sum_{k=1}^\infty \mu_k^2|(u,\varphi_k)|^2$ сходится. Пусть теперь $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в пространстве H и $u(x) \in L_2((0,1);H)$. Тогда почти всюду на интервале $(0,1)$ имеет место разложение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(u(x),\varphi_k)_H\varphi_k,$$

где ряд сходится в H.

Если $Au(x), u''(x) \in L_2((0,1);H)$, то почти всюду на $(0,1)$ имеют место разложение в сходящиеся в H ряды

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(u(x),\varphi_k)_H\varphi_k, \quad u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(u''(x),\varphi_k)_H\varphi_k.$$

Учитывая эти спектральные разложения в задаче (1), (2), для коэффициентов Фурье $u_k(x) = (u_k(x),\varphi_k)_H$ получим следующую спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$-u_k''(x) + \mu_k u_k(x) = \lambda u_k(x), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$u_k'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, изучение собственных значений краевой задачи (1), (2) сводится к изучению собственных значений краевой задачи (5), (6) для различных натуральных k. Спектр краевой задачи (1), (2) состоит из тех λ, при которых задача (5), (6) имеет нетривиальное решение $u_k(x,\lambda)$ хотя бы при одном $k \in \mathbb{N}$. Число $\lambda = \mu_k$ не может быть собственным значением задачи (5), (6), поскольку в таком случае эта задача имеет только тривиальное решение.

Сначала покажем, что число λ_1 не является собственным значением краевой задачи (5), (6), т.е. что задача

$$-u_k''(x) + \mu_k u_k(x) = \lambda_1 u_k(x), \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

$$u_k'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2)u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0 \tag{8}$$

при каждом k имеет только тривиальное решение.

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u_k(x,\lambda_1) = c_1e^{-x\sqrt{\mu_k-\lambda_1}} + c_2e^{-(1-x)\sqrt{\mu_k-\lambda_1}}, \tag{9}$$

где c_i, $i = 1,2$, – произвольные постоянные. Подставив (9) в условия (8), получим систему относительно c_i, $i = 1,2$, определитель которой имеет вид

$$D_k(\lambda_1) = -\sqrt{\mu_k-\lambda_1}(1 + e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda_1}}).$$

Очевидно, что $D_k(\lambda_1) \neq 0$ для любого k. Отсюда следует, что при каждом k функции $u_k(x,\lambda_1)$ тождественно равны нулю, т.е. $\lambda=\lambda_1$ не является собственным значением задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2).

Не нарушая общности, будем предполагать, что, начиная с некоторого k, выполняется неравенство

$$\mu_k > \frac{-\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \tag{10}$$

так как $\mu_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Аналогичным образом доказывается, что при выполнении условия (10) число $\lambda=\lambda_2$ также не является собственным значением краевой задачи (1), (2). Лемма 2 доказана.

2. Асимптотические формулы для собственных значений.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) A – линейный неограниченный самосопряжённый положительно-определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, обратный к которому вполне непрерывен;

2) α_i, $i=0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0<0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1\neq 0$.

Тогда краевая задача (1), (2) имеет три серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}$$

при $k\to\infty$ и $\lambda_{k,n}^{(3)}=\mu_k+\gamma_n$ $(k,n\in\mathbb{N})$, где $\mu_k\to+\infty$ – собственные значения оператора A, а $\gamma_n\sim n^2\pi^2$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$u_k(x,\lambda)=c_1e^{-x\sqrt{\mu_k-\lambda}}+c_2e^{-(1-x)\sqrt{\mu_k-\lambda}}, \tag{11}$$

где c_i, $i=1,2$, – произвольные постоянные. Подставив (11) в (6), получим систему относительно c_i, $i=1,2$, определитель $D_k(\lambda)$ которой имеет вид

$$D_k(\lambda)=(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2-\sqrt{\mu_k-\lambda})-(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\sqrt{\mu_k-\lambda})e^{-2\sqrt{\mu_k-\lambda}}. \tag{12}$$

Таким образом, собственные значения краевой задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2) – корни уравнения $D_k(\lambda)=0$ (относительно λ, $\lambda\neq\mu_k$) хотя бы при одном k. Учитывая равенства (12), запишем $D_k(\lambda)=0$ в виде

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)\operatorname{sh}\sqrt{\mu_k-\lambda}-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\mu_k-\lambda}=0. \tag{13}$$

Найдём те собственные значения λ, для которых $\lambda<\mu_k$. Тогда из уравнения (13) имеем

$$\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}=0. \tag{14}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$, $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda\in(\lambda_2,+\infty)$. Очевидно, что если $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$, то уравнение (14) не имеет решения относительно λ ни при каких k. Действительно, так как при $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ квадратный трёхчлен $\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$ принимает отрицательное значение, а функция $\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}$ при всех k, удовлетворяющих условию (10), положительна, то получаем, что

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)-\sqrt{\mu_k-\lambda}\operatorname{cth}\sqrt{\mu_k-\lambda}<0,$$

начиная, быть может, с некоторого k. Отсюда следует, что при выполнении условия (10) задача (5), (6) в интервале (λ_1,λ_2) не имеет собственных значений.

Пусть $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Положим в уравнении (14) $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$ $(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} < y < +\infty)$. Отсюда $\lambda = \mu_k - y^2$. Тогда получим следующее уравнение относительно y:

$$\alpha_2(\mu_k - y^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - y^2) + \alpha_0 - y \operatorname{cth} y = 0, \quad y \in (\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, +\infty). \tag{15}$$

Собственные значения краевой задачи (5), (6) для $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ являются корнями уравнения (15). Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Покажем, что существует k, при котором уравнение (15) имеет решение $y_k \in (\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$.

Рассмотрим функции

$$\psi_k(y) = \alpha_2(\mu_k - y^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - y^2) + \alpha_0 - y \operatorname{cth} y$$

на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$:

$$\psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1}) = \lim_{y \to \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + 0} \psi_k(y) = -\sqrt{\mu_k - \lambda_1} \operatorname{cth} \sqrt{\mu_k - \lambda_1} < 0,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon) = +\infty.$$

Следовательно, начиная с некоторого k, выполняются неравенства $\psi_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon) > 0$. Далее следует применить теорему Коши (о нулях непрерывной функции) к функции $\psi_k(y)$ на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_1}, \sqrt{\mu_k - \lambda_1} + \varepsilon]$, начиная с некоторого k. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеет место эквивалентность $y_k \sim \sqrt{\mu_k - \lambda_1}$ при $k \to +\infty$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$ для собственных значений краевой задачи (5), (6) при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ получаем следующее асимптотическое соотношение:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Аналогичным образом исследуется уравнение (14) в случае, когда $\lambda_2 < \lambda < +\infty$, а точнее, при $\lambda_2 < \lambda < \mu_k$. Положим в уравнении (14) $\sqrt{\mu_k - \lambda} = t$, $0 < t < \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$. Отсюда $\lambda = \mu_k - t^2$. Тогда уравнение (14) примет вид

$$\alpha_2(\mu_k - t^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - t^2) + \alpha_0 - t \operatorname{cth} t = 0, \quad t \in (0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}). \tag{16}$$

Собственные значения краевой задачи (5), (6) для $\lambda \in (\lambda_2, +\infty)$ являются корнями уравнения (16). Рассмотрим функцию

$$f_k(t) = \alpha_2(\mu_k - t^2)^2 + \alpha_1(\mu_k - t^2) + \alpha_0 - t \operatorname{cth} t, \quad t \in (0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}),$$

и покажем, что производная

$$f_k'(t) = -4\alpha_2 t(\mu_k - t^2) - 2\alpha_1 t - \frac{\operatorname{sh}(2t) - 2t}{2 \operatorname{sh}^2 t} < 0,$$

начиная с некоторого k. На самом деле, если $\alpha_1 > 0$, то очевидно неравенство

$$4\alpha_2 t(\mu_k - t^2) + 2\alpha_1 t + \frac{\operatorname{sh}(2t) - 2t}{2 \operatorname{sh}^2 t} > 0, \tag{17}$$

так как $\mu_k - t^2 > 0$ и $\operatorname{sh}(2t) > 2t$ при $t > 0$, а если $\alpha_1 < 0$, то из $0 < t < \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$ следует, что

$$\mu_k - t^2 > \lambda_2 > \frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}. \tag{18}$$

Из соотношений (18) получим неравенство (17). Значит, независимо от знака α_1, начиная с некоторого k, $f_k'(t) < 0$. Следовательно, функция $f_k(t)$, начиная с некоторого k, удовлетворяющего условию (10), монотонно убывает на промежутке $(0, \sqrt{\mu_k - \lambda_2})$, т.е.

$$f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2}) = \lim_{y \to \sqrt{\mu_k - \lambda_2} - 0} f_k(t) = -\sqrt{\mu_k - \lambda_2} \operatorname{cth} \sqrt{\mu_k - \lambda_2} < 0,$$

но для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon) = +\infty,$$

а значит, начиная с некоторого k, $f_k(\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon) > 0$. Таким образом, начиная с некоторого k, функция $f_k(t)$ на отрезке $[\sqrt{\mu_k - \lambda_2} - \varepsilon, \sqrt{\mu_k - \lambda_2}]$ имеет точно один нуль, который обозначим через t_k. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеет место эквивалентность $t_k \sim \sqrt{\mu_k - \lambda_2}$ при $k \to +\infty$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\mu_k - \lambda} = t$ для собственных значений краевой задачи (5), (6), удовлетворяющих условию $\lambda_2 < \lambda < +\infty$, получаем следующее асимптотическое соотношение:

$$\lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Найдём теперь те собственные значения λ, для которых $\lambda > \mu_k$.

Положим в уравнении (13) $\sqrt{\lambda - \mu_k} = z$, $0 < z < \infty$. Отсюда $\lambda = z^2 + \mu_k$. Тогда получим следующее уравнение относительно z:

$$z \cos z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2) \sin z = 0, \quad z \in (0, +\infty). \tag{19}$$

Пусть $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае уравнение (19) равносильно уравнению

$$z \operatorname{ctg} z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2) = 0, \quad z \in (0, +\infty), \quad z \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$\eta_k(z) = z \operatorname{ctg} z - (\alpha_0 + \alpha_1(\mu_k + z^2) + \alpha_2(\mu_k + z^2)^2), \quad z \in (0, +\infty), \quad z \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, функция $\eta_k(z)$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а её производная

$$\eta_k'(z) = \frac{\sin(2z) - 2z}{2\sin^2 z} - (2\alpha_1 z + 4\alpha_2 z(\mu_k + z^2)) < 0$$

при каждом k, удовлетворяющем условию (10), для $z \in (0, +\infty)$, $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что функция $\eta_k(z)$ убывает на каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$. Таким образом, функция $\eta_k(z)$, начиная с некоторого k, в каждом интервале $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, имеет только один нуль $z_{n,k}$: $n\pi < z_{n,k} < (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из равенства $\sqrt{\lambda - \mu_k} = z$, где $\lambda = z^2 + \mu_k$, получим следующую асимптотическую формулу для собственных значений краевой задачи (5), (6) и тем самым краевой задачи (1), (2):

$$\lambda_{k,n}^{(3)} = \mu_k + \gamma_n,$$

где $\gamma_n \sim n^2\pi^2$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. При $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ задача (1), (2) изучена в работе [16], где показано, что в этом случае задача имеет две серии собственных значений, одна из которых сходится к нулю, а другая серия асимптотически ведет себя как $\mu_k + n^2\pi^2$, где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора A. Очевидно, что результат данной работы совпадает с результатом в [16] при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Замечание 2. В статье [14] в сепарабельном гильбертовом пространстве H исследовано асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda^2 u(x), \quad x \in (0,1), \tag{20}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{21}$$

При выполнении условий сформулированной выше теоремы доказано, что краевая задача (20), (21) имеет четыре серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\sqrt[4]{\mu_k}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim -\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\sqrt[4]{\mu_k}, \quad \lambda_{k,n}^{(3)} = \sqrt{\mu_k + \gamma_n}, \quad \lambda_{k,n}^{(4)} = -\sqrt{\mu_k + \delta_n}$$

при $n, k \to +\infty$, где $\mu_k \to +\infty$ – собственные значения оператора A, а $\gamma_n \sim n^2\pi^2$ и $\delta_n \sim n^2\pi^2$ при $n \to +\infty$.

Замечание 3. Если в краевой задаче (1), (2) за гильбертово пространство H взять числовую прямую $R = (-\infty, +\infty)$, за оператор A взять $q(x)$ – интегрируемую функцию на отрезке $[0,1]$, то получим следующую спектральную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{22}$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{23}$$

которая исследована в работе [13]. Из этой работы следует, что собственные значения краевой задачи (22), (23) ведут себя асимптотически как

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int\limits_0^1 q(x)\,dx + o(1/n).$$

Естественно, первая и вторая серии собственных значений, полученные для краевой задачи (1), (2), отсутствуют.

Пример. Рассмотрим в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ задачу на собственные значения

$$-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial y^4} + \omega v(x,y) = \lambda v(x,y), \tag{24}$$

$$\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)v(0,y) = 0, \quad v(1,y) = 0, \quad y \in [0,1],$$

$$\frac{\partial^j v(x,0)}{\partial y^j} = \frac{\partial^j v(x,1)}{\partial y^j}, \quad j = \overline{0,3}, \quad x \in [0,1], \tag{25}$$

где ω – некоторое положительное число; α_i, $i = 0,1,2$, – некоторые вещественные числа, причём $\alpha_0 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq 0$.

В гильбертовом пространстве $H := L_2(0,1)$ рассмотрим оператор A, определённый равенствами

$$D(A) := W_2^4((0,1), u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1), j = \overline{0,3}), \quad Au = \frac{d^4u}{dy^4} + \omega u. \tag{26}$$

Запишем задачу (24), (25) в операторной форме:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

где $u(x) := v(x, \cdot)$ – вектор-функция со значениями в $L_2(0,1)$. Очевидно, что оператор A, определённый равенствами (26), является самосопряжённым и при достаточно больших $\omega > 0$ положительно-определённым оператором в $L_2(0,1)$, а A^{-1} вполне непрерывен в $L_2(0,1)$, так как вложение $D(A) \subset L_2(0,1)$ является компактным. Простые вычисления показывают, что собственные значения оператора A имеют вид

$$\mu_k(A) = 16\pi^4 k^4 + \omega, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда в силу доказанной теоремы краевая задача (24), (25) имеет три серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \lambda_1 = \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim \lambda_2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

$$\lambda_{k,n}^{(3)} \sim 16\pi^4 k^4 + n^2\pi^2 \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Далее будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 3 [17]. *Пусть даны две числовые последовательности* $\mu_k \sim ak^\alpha$ *и* $v_n \sim bn^\beta$, $0 < a, b, \alpha, \beta < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$. *Составим суммы* $\mu_k + v_n$ *со всевозможными* k *и* n. *Полученные числа перенумеруем по возрастанию и обозначим через* λ_m.

Тогда последовательность λ_m *имеет асимптотику* $\lambda_m \sim dm^\delta$, *где*

$$\delta = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \quad d = \left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^{\alpha\beta/(\alpha+\beta)} a^{\beta/(\alpha+\beta)} b^{\alpha/(\alpha+\beta)}, \quad \gamma = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{-1+2/\alpha} t \cos^{1+2/\alpha} t\, dt.$$

С помощью леммы 3 запишем асимптотическую формулу для собственных значений $\lambda_{k,n}^{(3)}$ относительно одного индекса вместо двух:

$$\lambda_m \sim (4\pi^2/\gamma)^{4/3} m^{4/3}, \quad m \to +\infty,$$

где $\gamma = \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} t \cos^{3/2} t\, dt$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
2. *Якубов С.Я.* Краевая задача для уравнения Лапласа с неклассической спектральной асимптотикой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1330–1333.
3. *Ильин В.А., Филиппов А.Ф.* О характере спектра самосопряжённого расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 2. С. 167–169.
4. *Кожевников А.Н.* Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Мат. заметки. 1977. Т. 22. № 5. С. 699–711.
5. *Рыбак М.А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма–Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32. № 2. С. 248–252.
6. *Denche M.* Abstract differential equation with a spectral parameter in the boundary conditions // Result. Math. 1999. V. 35. P. 216–227.
7. *Алиев Б.А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58. № 8. С. 1146–1152.
8. *Aliev B.A., Kurbanova N.K.* Asymptotic behavior of eigenvalues of a boundary value problem for a second order elliptic differential-operator equation // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2014. V. 40. Spec. Iss. P. 23–29.
9. *Aliev B.A., Kurbanova N.K., Yakubov Ya.* Solvability of the abstract Regge boundary-value problem and asymptotic behavior of eigenvalues of one abstract spectral problem // Rivista Di Mathematica Della Universita Di Parma. 2015. V. 6. P. 241–265.

10. *Капустин Н.Ю.* Об одной спектральной задаче в теории оператора теплопроводности // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1509–1511.
11. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
12. *Капустин Н.Ю.* О базисности системы собственных функций задачи с квадратом спектрального параметра в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1284–1289.
13. *Warren J.Code, Patrick J. Browne.* Sturm–Liouville problems with boundary conditions depending quadraticcaly on eigenparameter // J. of Math. Anal. and Appl. 2005. V. 309. P. 729–742.
14. *Алиев Б.А., Керимов В.З.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 195–203.
15. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М., 1959.
16. *Алиев Б.А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1282–1286.
17. *Мамедов К.С.* Асимптотика функции распределения собственных чисел абстрактного дифференциального оператора // Мат. заметки. 1982. Т. 31. № 1. С. 41–51.

Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку,
Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку

Поступила в редакцию 06.05.2022 г.
После доработки 05.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.