ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1596–1605

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.21

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© 2022 г. Б. И. Эфендиев

Методом функции Грина решена задача с условиями типа Штурма для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования. Построена функция Грина и исследованы её свойства. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122120020, EDN: NCBQSQ

Введение. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)u(x)]\,d\alpha = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{u(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \dfrac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) порядка α [1, 2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции, $u(x)$ – искомая функция.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений (см. [1, 2]). Интегро-дифференциальный оператор

$$M_{ax}^{\alpha,\beta} u(x) = \int\limits_\alpha^\beta b_\xi(x) D_{ax}^\xi u(x)\,d\xi, \quad 0 < \alpha < \beta, \tag{2}$$

был введён в работе [1] и назван непрерывным (континуумальным) дифференциальным оператором, который в последнее время называют *оператором непрерывно распределённого дифференцирования.*

При $b_\xi(x) = 1$ в формуле (2) оператор $M_{ax}^{\alpha,\beta}$ называется *оператором дифференцирования континуального (сегментного) порядка* и обозначается через

$$D_{ax}^{[\alpha,\beta]} u(x) = \int\limits_\alpha^\beta D_{ax}^\xi u(x)\,d\xi. \tag{3}$$

В работе [2] были изучены свойства оператора (3), в частности, доказана положительность оператора, получена формула непрерывного интегрирования по частям.

В статье [3] (см. также [4, гл. 5]) построен оператор, обращающий оператор (3), получены аналоги формулы Ньютона–Лейбница для интегрального и интегро-дифференциального операторов. Определены корректные формы начальных данных и решена задача Коши для интегро-дифференциального уравнения континуального порядка.

В работе [5] для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)+\lambda u(x)=f(x),\quad 0<\beta\leqslant 1,$$

построено фундаментальное решение, найдено представление решения задачи Коши, показаны положительность фундаментального решения и характер зависимости от спектрального параметра.

В работе [6] (см. также [7]) для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int\limits_a^b \omega(\alpha)D_t^\alpha x(t)\,d\alpha=Ax(t)$$

изучена задача Коши в банаховом пространстве с линейным ограниченным оператором в правой части. Методами теории преобразования Лапласа найдены условия существования и единственности решения задачи в пространстве экспоненциально растущих функций.

В последнее время, наряду с операторами (2) и (3), изучаются так называемые операторы дискретно распределённого дифференцирования

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i D_{tx}^{s_i}u(x),\quad s_i>0,\quad i=\overline{1,n},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

и интенсивно исследуются дифференциальные уравнения как обыкновенные, так и в частных производных с операторами вида (2)–(4).

В статье [8] сформулирована и решена начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором дискретно распределённого дифференцирования. Начальные условия задачи обеспечивают её однозначную разрешимость при произвольном распределении параметров, отвечающих порядку производных, входящих в уравнение (в отличие от задачи Коши), и являются необходимыми для исследуемого уравнения. Задача редуцирована к интегральному уравнению, построено явное представление решения в терминах функции Райта. В качестве следствия из этих результатов получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши.

В работе [9] решена задача Коши для многомерного уравнения дробной диффузии с оператором дискретно распределённого порядка. В терминах функции Райта построено фундаментальное решение и исследованы его свойства. Найдено представление решения исследуемой задачи и доказана теорема единственности решения в классе функций быстрого роста, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. Показано, что разрешимость исследуемой задачи зависит от распределения параметров, входящих в уравнение.

В статье [10] рассматриваются линейные уравнения в банаховых пространствах с распределённой дробной производной, задаваемой интегралом Стилтьеса, и с замкнутым оператором A в правой части. В отличие от ранее изученных классов уравнений с распределёнными производными, такие уравнения могут содержать непрерывную и дискретную части интеграла, т.е. стандартный интеграл от дробной производной по её порядку и линейную комбинацию дробных производных с разными порядками. Вводятся в рассмотрение разрешающие семейства операторов для таких уравнений и изучаются их свойства. Доказывается теорема о возмущении для этого класса операторов и изучается задача Коши для неоднородного уравнения с распределённой дробной производной.

В работе [11] исследуется однозначная разрешимость линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределённой дробной производной Герасимова–Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. На основе полученных абстрактных результатов исследована однозначная разрешимость начально-краевых задач для одного класса уравнений с дискретно распределённой дробной производной по времени и с многочленами от эллиптического самосопряжённого дифференциального по пространственным переменным оператора.

В статьях [12–15] исследовалось линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)=f(x).$$

В частности, в [12] построено фундаментальное решение и найдено решение задачи Коши. В [13] методом функции Грина решена задача с условиями Штурма–Лиувилля и показано, что при определённых значениях начальных данных выполняется условие разрешимости исследуемой задачи. В [14] и [15] изучались нелокальные краевые задачи и были доказаны соответствующие теоремы существования и единственности решения исследуемых задач.

В работе [16] исследованы начальная задача и задача Штурма–Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом, содержащего производную Герасимова–Капуто. Доказаны соответствующие теоремы существования и единственности решений исследуемых задач. Решение задачи Штурма–Лиувилля записано в терминах функции Грина. Также в работе [17] методом функции Грина изучена краевая задача с условиями типа Штурма–Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом, содержащего производную Римана–Лиувилля. Доказана теорема существования и единственности решения, построена соответствующая функция Грина. Используя асимптотические формулы для обобщённой функции Райта, доказана теорема о конечности числа собственных значений краевой задачи с условиями типа Штурма–Лиувилля.

Ранее автором были исследованы задача Коши [18] и задача Дирихле [19] для уравнения (1), в частности, построено фундаментальное решение с помощью ряда Неймана и найдены представления решений этих задач в явном виде, в случае задачи Дирихле записана соответствующая функция Грина.

В данной работе исследована задача с условиями типа Штурма [20, с. 52] для уравнения (1). Построена функция Грина рассматриваемой задачи и записано решение в явном виде в терминах функции Грина. Показано, что если условие разрешимости не выполняется, то нарушается единственность решения исследуемой задачи.

1. Постановка задачи. Далее будем считать, что $\mu(\alpha)\in L[0,\beta]$, $p(x)\in \mathrm{Lip}\,[0,l]$, $q(x)\in$ $\in AC[0,l]$.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $(0,l)$ назовём функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l]\bigcap C^2(0,l)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x\in(0,l)$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $(0,l)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to 0}[au(x)+bu'(x)]=u_0,\quad \lim_{x\to l}[cu(x)+du'(x)]=u_l, \tag{5}$$

где a, b, c, d, u_0, u_l – заданные константы, причём $a^2+b^2\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0$.

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим функцию [18]

$$W(x,t)=x-t+\int_t^x(x-s)R(s,t)\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{6}$$

где

$$R(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t),\quad K_1(x,t)=q(x)\int_0^{\beta}\mu(\alpha)D_{tx}^{\alpha}[(x-t)p(x)]\,d\alpha,$$

$$K_{n+1}(x,t)=\int\limits_t^x K_n(x,s)K_1(s,t)\,ds,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Сходимость бесконечного ряда для $R(x,t)$ следует из оценок

$$|K_n(x,t)|\leqslant C^n\frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)},\quad n\in\mathbb{N},\quad |R(x,t)|\leqslant C\exp[C(x-t)],\quad C>0,$$

доказательства которых приведены при доказательстве леммы 1 работы [18].

Функция $W(x,t)$, определённая формулой (6), является фундаментальным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (см. [18]):

$$W_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{tx}^\alpha[p(x)W(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{7}$$

$$W(t,t)=0,\quad W_x(t,t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{8}$$

$$W_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{xt}^\alpha[q(t)W(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{9}$$

$$W(x,x)=0,\quad W_t(x,x)=-1,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l, \tag{10}$$

$$W_{xxt}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{tx}^\alpha[p(x)W_t(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{11}$$

$$W_{xt}(t,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l. \tag{12}$$

3. Функция Грина.

Определение. *Функцией Грина* задачи с условиями типа Штурма (5) для уравнения (1) назовём функцию $v(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $v(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$;

2) в каждом из полуинтервалов $[0,t)$ и $(t,l]$ функция $v(x,t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$v_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)v(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{13}$$

$$av(0,t)+bv_x(0,t)=0,\quad cv(l,t)+dv_x(l,t)=0; \tag{14}$$

по переменной t в каждом из полуинтервалов $[0,x)$ и $(x,l]$ функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$v_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^\alpha[q(t)v(x,t)]\,d\alpha=0, \tag{15}$$

$$av(x,0)+bv_t(x,0)=0,\quad cv(x,l)+dv_t(x,0)=0; \tag{16}$$

3) при $t=x$ производные $v_x(x,t)$ и $v_t(x,t)$ имеют скачок, равный единице, т.е.

$$v_x(x,x+0)-v_x(x,x-0)=-1, \tag{17}$$

$$v_t(x,x+0)-v_t(x,x-0)=1, \tag{18}$$

а при любом фиксированном t из отрезка $[0,l]$ функция $v(x,t)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядка по x в каждом из полуинтервалов $[0,t)$ и $(t,l]$. При любом фиксированном x из отрезка $[0,l]$ функция $v(x,t)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядка по t в каждом из полуинтервалов $[0,x)$ и $(x,l]$.

Введём в рассмотрение функцию, определённую на компакте $\overline{\Omega}=[0,l]\times[0,l]$:

$$G(x,t)=H(x-t)W(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{19}$$

где $H(s)$ – функция Хевисайда, $W(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения (1),

$$\Delta=acW(l,0)+adW_x(l,0)+bcW_t(l,0)+bdW_{xt}(l,0)\neq 0. \tag{20}$$

Лемма. *Пусть выполнено условие (20). Тогда функция $G(x,t)$, определяемая формулой (19), является функцией Грина задачи с условиями типа Штурма (5) для уравнения (1).*

Доказательство. Непрерывность функции Грина $G(x,t)$ на компакте $\overline{\Omega}$ следует из непрерывности функции $W(x,t)$ на этом компакте $\overline{\Omega}$.

Второе свойство доказывается непосредственной подстановкой равенства (19) в формулы (13)–(16) с учётом соотношений (7)–(12):

$$G_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)G(x,t)]\,d\alpha=$$

$$=H(x-t)\biggl[W_{xx}(x,t)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{tx}^\alpha[p(x)W(x,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{a}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)]\biggl[W_{xx}(x,0)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)W(x,0)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{b}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)]\biggl[W_{xxt}(x,0)-q(x)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)W_t(x,0)]\,d\alpha\biggr]=0, \tag{21}$$

$$G_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^\alpha[q(t)G(x,t)]\,d\alpha=H(x-t)\biggl[W_{tt}(x,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{xt}^\alpha[q(t)W(x,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{c}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]\biggl[W_{tt}(l,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^\alpha[q(t)W(l,t)]\,d\alpha\biggr]-$$

$$-\frac{d}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]\biggl[W_{xtt}(l,t)-p(t)\int\limits_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^\alpha[q(t)W_x(l,t)]\,d\alpha\biggr]=0. \tag{22}$$

Из представления (19) в силу соотношений (8) и (10) имеем равенства

$$G(0,t)=\frac{b}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{23}$$

$$G(l,t)=W(l,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{24}$$

$$G(x,0)=W(x,0)-\frac{1}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)][aW(x,0)+bW_t(x,0)], \tag{25}$$

$$G(x,l)=-\frac{d}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]. \tag{26}$$

Продифференцировав формулу (19) по x и по t, получим

$$G_x(x,t)=H(x-t)W_x(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{27}$$

$$G_t(x,t)=H(x-t)W_t(x,t)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,t)+dW_{xt}(l,t)]. \tag{28}$$

Из соотношений (27), (28) в силу формул (8), (10), (12) следуют равенства

$$G_x(0,t)=-\frac{a}{\Delta}[cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{29}$$

$$G_x(l,t)=W_x(l,t)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0)+bW_{xt}(l,0)][cW(l,t)+dW_x(l,t)], \tag{30}$$

$$G_t(x,0)=W_t(x,0)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,0)+dW_{xt}(l,0)], \tag{31}$$

$$G_t(x,l)=\frac{c}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)]. \tag{32}$$

Из соотношений (23)–(26) и (29)–(32) следует, что функция $G(x,t)$, определённая формулой (19), удовлетворяет граничным условиям (14), (16), т.е. справедливы равенства

$$aG(0,t)+bG_x(0,t)=0, \quad cG(l,t)+dG_x(l,t)=0, \tag{33}$$

$$aG(x,0)+bG_t(x,0)=0, \quad cG(x,l)+dG_t(x,0)=0. \tag{34}$$

Подставляя формулы (27), (28) в соотношения (17), (18), с учётом того, что $W(x)$ – непрерывная функция, а $H(x)$ – разрывная в нуле функция, ввиду равенств $W_x(x,x)=1$, $W_t(x,x)=-1$ получим

$$G_x(x,x+0)-G_x(x,x-0)=\lim_{\varepsilon\to-0}H(\varepsilon)W_x(x,x)-\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,x)+dW_x(l,x)]-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}H(\varepsilon)W_x(x,x)+\frac{1}{\Delta}[aW_x(x,0)+bW_{xt}(x,0)][cW(l,x)+dW_x(l,x)]=-1, \tag{35}$$

$$G_t(x,x+0)-G_t(x,x-0)=\lim_{\varepsilon\to-0}H(\varepsilon)W_t(x,x)-\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,x)+dW_{xt}(l,x)]-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to+0}H(\varepsilon)W_t(x,x)+\frac{1}{\Delta}[aW(x,0)+bW_t(x,0)][cW_t(l,x)+dW_{xt}(l,x)]=1, \tag{36}$$

что доказывает справедливость формул (17) и (18). Лемма доказана.

4. Представление решения.

Теорема. *Пусть* $\mu(\alpha)\in L[0,\beta]$, $p(x)\in \mathrm{Lip}\,[0,l]$, $q(x)\in AC[0,l]$, $f(x)\in L[0,l]\bigcap C(0,l)$. *Тогда при выполнении условия разрешимости (20) существует единственное регулярное решение задачи (1), (5), которое имеет вид*

$$u(x)=\int\limits_0^l G(x,t)f(t)\,dt-\frac{u_0}{a^2+b^2}[aG_t(x,0)-bG(x,0)]+\frac{u_l}{c^2+d^2}[cG_t(x,l)-dG(x,l)], \tag{37}$$

если $a^2+b^2\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $G(x,t)$, предварительно поменяв в нем переменную x на t, и проинтегрируем полученное равенство по t в пределах от ε до $l-\varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число. Тогда имеем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)u''(t)\,dt - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)q(t)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)f(t)\,dt. \qquad (38)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое левой части равенства (38) и учитывая, что функция $G_t(x,t)$ имеет разрыв, предварительно разбив промежуток интегрирования на два промежутка (от ε до x и от x до $l-\varepsilon$), в пределе при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)u''(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[u'(l-\varepsilon)G(x,l-\varepsilon) - u'(\varepsilon)G(x,\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{x} G_t(x,t)u'(t)\,dt -$$

$$- \int\limits_{x}^{l-\varepsilon} G_t(x,t)u'(t)\,dt\Bigg] = G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x) - G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x) - u(l)G_t(x,l) + u(0)G_t(x,0) +$$

$$+ u(x)[G_t(x,x+0) - G_t(x,x-0)] + \int\limits_{0}^{l} G_{tt}(x,t)u(t)\,dt. \qquad (39)$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям

$$\int\limits_{0}^{l} g(x)D_{0x}^{\gamma}h(x)dx = \int\limits_{0}^{l} h(x)D_{lx}^{\gamma}g(x)dx \quad \text{для любого} \quad \gamma < 0$$

и равенства

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\gamma-1}v(x) = 0 \quad \text{для любых} \quad v(x)\in C[0,l] \quad \text{и} \quad \gamma\in(0,1)$$

второе слагаемое в левой части формулы (38) запишется в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x,t)q(t)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt = q(l)G(x,l)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0l}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha -$$

$$- q(0)G(x,0)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{00}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha - \int\limits_{0}^{l}\frac{\partial}{\partial t}[q(t)G(x,t)]\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0t}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha\,dt =$$

$$= q(l)G(x,l)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{0l}^{\alpha-1}[p(t)u(t)]\,d\alpha - \int\limits_{0}^{l} u(t)p(t)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{lt}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial t}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{l} u(t)p(t)\int\limits_{0}^{\beta}\mu(\alpha)D_{lt}^{\alpha}[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\,dt. \qquad (40)$$

С учётом формул (36), (39) и (40) из равенства (38) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$u(x)+\int_0^l u(t)\Big[G_{tt}(x,t)-p(t)\int_0^\beta \mu(\alpha)D_{lt}^\alpha[q(t)G(x,t)]\,d\alpha\Big]\,dt=$$

$$=-G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x)+G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x)+u(l)G_t(x,l)-u(0)G_t(x,0)+\int_0^l G(x,t)f(t)\,dt. \quad (41)$$

Обозначим

$$A(x):=-u(0)G_t(x,0)+G(x,0)\lim_{x\to 0}u'(x), \quad (42)$$

$$B(x):=u(l)G_t(x,0)-G(x,l)\lim_{x\to l}u'(x). \quad (43)$$

Из формул (42) и (43), учитывая равенства (5), (34), будем иметь

$$A(x)=-\frac{u_0}{a^2+b^2}[aG_t(x,0)-bG(x,0)], \quad (44)$$

$$B(x)=\frac{u_l}{c^2+d^2}[cG_t(x,l)-dG(x,l)]. \quad (45)$$

Подставив формулы (44), (45) в равенство (41), получим соотношение, из которого в силу равенства (22) следует формула (37).

Покажем теперь, что функция $u(x)$, определяемая формулой (37), действительно является решением задачи (1), (5). Продифференцировав дважды равенство (37), с учётом формулы (35) будем иметь

$$u'(x)=\int_0^l G_x(x,t)f(t)\,dt-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]'-b[G(x,0)]']+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]'-d[G(x,l)]'], \quad (46)$$

$$u''(x)=\frac{d}{dx}\Big[\int_0^x G_x(x,t)f(t)\,dt+\int_x^l G_x(x,t)f(t)\,dt\Big]-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]''-b[G(x,0)]'']+$$

$$+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]''-d[G(x,l)]'']=\int_0^l G_{xx}(x,t)f(t)\,dt+f(x)-$$

$$-\frac{u_0}{a^2+b^2}[a[G_t(x,0)]''-b[G(x,0)]'']+\frac{u_l}{c^2+d^2}[c[G_t(x,l)]''-d[G(x,l)]'']. \quad (47)$$

Подставив представление решения (37) и формулу (47) в уравнение (1), в силу равенства (21) получим, что функция, определяемая соотношением (37), действительно является решением уравнения (1).

С учётом формул (8), (10), (12) из равенств (19), (27) и (28) будем иметь

$$G(0,0)=-\frac{b}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad G(0,l)=\frac{bd}{\Delta}, \quad (48)$$

$$G(l,0)=W(l,0)-\frac{1}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)][cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad (49)$$

$$G(l,l)=-\frac{d}{\Delta}[aW(l,0)+bW_t(l,0)], \quad (50)$$

$$\lim_{x\to 0}[G(x,0)]'=1-\frac{a}{\Delta}[cW(l,0)+dW_x(l,0)], \quad \lim_{x\to 0}[G(x,l)]'=-\frac{ad}{\Delta}, \quad (51)$$

$$\lim_{x\to l}[G(x,0)]' = W_x(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)][cW(l,0) + dW_x(l,0)], \tag{52}$$

$$\lim_{x\to l}[G(x,l)]' = -\frac{d}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)], \tag{53}$$

$$\lim_{x\to 0} G_t(x,0) = -1 + \frac{b}{\Delta}[cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \quad \lim_{x\to 0} G_t(x,l) = -\frac{bc}{\Delta}, \tag{54}$$

$$\lim_{x\to l} G_t(x,0) = W_t(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW(l,0) + bW_t(l,0)][cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \tag{55}$$

$$\lim_{x\to l} G_t(x,l) = \frac{c}{\Delta}[aW(l,0) + bW_t(l,0)], \tag{56}$$

$$\lim_{x\to 0}[G_t(x,0)]' = -\frac{a}{\Delta}[cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \quad \lim_{x\to 0}[G_t(x,l)]' = \frac{ac}{\Delta}, \tag{57}$$

$$\lim_{x\to l}[G_t(x,0)]' = W_{xt}(l,0) - \frac{1}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)][cW_t(l,0) + dW_{xt}(l,0)], \tag{58}$$

$$\lim_{x\to l}[G_t(x,l)]' = \frac{c}{\Delta}[aW_x(l,0) + bW_{xt}(l,0)]. \tag{59}$$

Из равенств (37) и (46) имеем соотношения

$$u(0) = \int_0^l G(0,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to 0} G_t(x,0) - bG(0,0)] + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to 0} G_t(x,l) - dG(0,l)], \tag{60}$$

$$\lim_{x\to 0} u'(x) = \int_0^l G_x(0,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to 0}[G_t(x,0)]' - b\lim_{x\to 0}[G(x,0)]'] + \\ + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to 0}[G_t(x,l)]' - d\lim_{x\to 0}[G(x,l)]'], \tag{61}$$

$$u(l) = \int_0^l G(l,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to l} G_t(x,0) - bG(l,0)] + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to l} G_t(x,l) - dG(l,l)], \tag{62}$$

$$\lim_{x\to l} u'(x) = \int_0^l G_x(l,t)f(t)\,dt - \frac{u_0}{a^2+b^2}[a\lim_{x\to l}[G_t(x,0)]' - b\lim_{x\to l}[G(x,0)]'] + \\ + \frac{u_l}{c^2+d^2}[c\lim_{x\to l}[G_t(x,l)]' - d\lim_{x\to l}[G(x,l)]']. \tag{63}$$

Подставив равенства (60)–(63) в условия (5), с учётом формул (33), (48)–(59) получим верные тождества. Теорема доказана.

Замечание. В случае $\Delta = acW(l,0) + adW_x(l,0) + bcW_t(l,0) + bdW_{xt}(l,0) = 0$ нарушается единственность решения задачи (1), (5).

Действительно, если $\Delta = 0,$ то однородная задача

$$u''(x) - q(x)\int_0^\beta \mu(\alpha)D_{0x}^\alpha[p(x)u(x)]\,d\alpha = 0, \tag{64}$$

$$au(0) + bu'(0) = 0, \quad cu(l) + du'(l) = 0 \tag{65}$$

имеет ненулевое решение. В частности, любая функция $u(x) = k[aW(x,0) + bW_t(x,0)],$ $k = \text{const},$ является решением задачи (64), (65).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 4. С. 796–799.
2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101–109.
3. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 120–127.
4. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
5. *Псху А.В.* Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук. 2007. Т. 9. № 1. С. 73–78.
6. *Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределённого порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2018. Т. 25. № 1. С. 63–72.
7. *Fedorov V.E., Streletskaya E.M.* Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. of Differ. Equat. 2018. V. 2018. № 176. P. 1–17.
8. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.
9. *Псху А.В.* Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределённого дифференцирования // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1078–1098.
10. *Sitnik S.M., Fedorov V.E., Filin N.V., Polunin V.A.* On the solvability of equations with a distrebuted fractional derivative given by the Stieltjes integral // Mathematics. 2022. V. 10. P. 2979.
11. *Федоров В.Е., Филин Н.В.* Линейные уравнения с дискретно распределённой дробной производной в банаховом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 264–280.
12. *Гадзова Л.Х.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Вестн. Камчатской региональной ассоциации "Учебно-научный центр". Физ.-мат. науки. 2018. Вып. 3 (23). С. 48–56.
13. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 180–186.
14. *Гадзова Л.Х.* Нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Мат. заметки. 2019. Т. 106. Вып. 6. С. 860–865.
15. *Gadzova L.Kh.* Boundary-value problem with shift for a linear ordinary differential equation with the operator of discretely distributed differentiation // J. of Math. Sci. 2020. V. 250. № 5. P. 740–745.
16. *Мажгихова М.Г.* Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челябинский физ.-мат. журн. 2018. Т. 3. Вып. 1. С. 27–37.
17. *Mazhgikhova M.G.* Green function method for a fractional-order delay differential equation // Bull. of the Karaganda Univ. Ser. Math. 2020. № 1 (97). P. 87–96.
18. *Эфендиев Б.И.* Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2022. Т. 29. № 2. С. 58–71.
19. *Эфендиев Б.И.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. акад. наук. 2021. Т. 21. № 4. С. 37–44.
20. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 21.06.2021 г.
После доработки 20.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.