ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1606–1623

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4+519.2

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Я. И. Белопольская

Показано, что вероятностная интерпретация решения задачи Коши для систем семилинейных и квазилинейных параболических уравнений позволяет свести эту задачу к решению соответствующей стохастической задачи. Сформулированы условия, при которых решение стохастической задачи существует и единственно. Как следствие получены вероятностные (интегральные) представления искомых решений задачи Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122120032, EDN: NCBSDL

Введение. Существование связи между теорией линейных параболических уравнений второго порядка и теорией случайных процессов было установлено уже в классической работе А.Н. Колмогорова [1], где показано, что решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка может быть представлено в виде среднего по траекториям соответствующего случайного процесса. В частности, классические решения прямой задачи Коши

$$u_t = \frac{1}{2}u_{yy}, \quad u(0,y) = u_0(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

и обратной задачи Коши

$$v_t + \frac{1}{2}v_{xx} = 0, \quad v(T,x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

для уравнения теплопроводности можно представить в виде средних по траекториям случайных процессов $\tilde{w}(t) = \xi_0 + w(t)$ и $w_x(t) = x + w(t)$. Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а ξ_0 – не зависящая от $w(t)$ случайная величина с плотностью распределения u_0. Соответствующие представления имеют вид

$$u(t,y) = E[u_0(y - \tilde{w}(t))] = \int\limits_R u_0(x)p(0,x,t,y)\,dx$$

и

$$v(s,x) = E[v_0(x + w(T)) - w(s)] = \int\limits_R v_0(y)p(s,x,T,y)\,dy,$$

где

$$p(s,x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{2(t-s)}}\exp\biggl(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\biggr)$$

– плотность переходной вероятности процесса $\xi_{s,x}(t) = x + w(t) - w(s)$.

Конструируя более сложные случайные процессы, например, рассматривая решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), можно получать представления решения задачи Коши для широкого класса линейных и нелинейных параболических уравнений и систем второго порядка относительно функций, заданных на пространствах $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, $d \leqslant \infty$. Если $\xi(t)$ – удовлетворяющий некоторому СДУ случайный процесс, позволяющий построить решение соответствующей параболической задачи в виде среднего по траекториям этого процесса, то будем называть это СДУ *стохастической моделью* рассматриваемой задачи.

При построении стохастических моделей систем нелинейных параболических уравнений коэффициенты соответствующего СДУ зависят от решения этой системы, так что стохастическая модель требует, наряду с СДУ, наличия некоторого замыкающего соотношения, как правило, представляющего собой вероятностное представление решения исходной задачи.

Заметим, что вероятностный подход к построению решения задачи Коши для параболических уравнений и систем является естественным обобщением метода характеристик, позволяющего устанавливать связь между теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией гиперболических уравнений и систем первого порядка, как линейных, так и нелинейных.

Начало развитию вероятностного подхода к исследованию решения задачи Коши для нелинейных параболических уравнений с помощью СДУ было положено в работах Г. Маккина [2] и М.И. Фрейдлина [3], где показано, что решение задачи Коши для семилиинейных параболических уравнений, т.е. уравнений, коэффициенты которых зависят от искомого решения, допускает вероятностное представление в терминах решения соответствующего СДУ.

Вероятностный подход к исследованию решений систем семилинейных параболических уравнений был предложен в работах Ю.Л. Далецкого и автора [4, 5]. Развитие этого подхода позволило получить новые интегральные представления для различных классов решений задачи Коши как для семилинейных, так и для квазилинейных и полностью нелинейных параболических уравнений, а для систем, помимо этого, – дополнительную информацию о структуре системы и поведении её решений [6]. Ещё одно специфическое свойство вероятностного подхода – это слабая зависимость получаемых результатов от размерности фазового пространства, что позволяет рассматривать уравнения и системы в бесконечномерных пространствах [4]. Наряду с этим вероятностный подход даёт возможность рассматривать уравнения и системы с вырождающимися коэффициентами при членах старшего порядка и, в частности, исследовать поведение решения задачи Коши для параболических систем в пределе по исчезающей вязкости [7].

В этой работе будет показано, что вероятностная интерпретация классических и вязкостных решений обратной задачи Коши позволяет выделить несколько типов систем нелинейных параболических уравнений, указать естественные функциональные классы, в которых можно искать решения задачи Коши и исследовать их свойства.

Построим вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши

$$\partial_s u^m+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}G_{ij}(x,u)\nabla^2_{x_ix_j}u^m+\sum_{i=1}^{d}a_i(x,u)\nabla_{x_i}u^m+\sum_{i=1}^{d}\sum_{q=1}^{d}B_i^{mq}(x,u)\nabla_{x_i}u_q+\sum_{q=1}^{d_1}c^{mq}(x,u)u^q=0,$$

$$u_m(T,x)=u_{0m}(x),\quad m=\overline{1,d},\quad 0\leqslant s\leqslant T, \tag{1}$$

в предположении, что

$$G_{ij}(x,u)=\sum_{k=1}^{d}A_{ik}(x,u)A_{kj}(x,u).$$

Построение дифференциального продолжения квазилинейной системы вида (1) (т.е. системы, коэффициенты которой зависят как от u, так и от ∇u) позволит включить исходную систему в расширенную семилинейную систему относительно функций $V_m=(u_m,\nabla u_m)$

$$\partial_s V_m+F_m(x,V)+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}G(x,u)\nabla^2V_m=0, \tag{2}$$

где

$$\operatorname{Tr}G\nabla^2V_m=\sum_{i,j=1}^{d}G_{ij}\frac{\partial^2V_m}{\partial x_i\partial x_j}$$

и ∇^2V_m – матрица Гессе функции V_m, и, как следствие, построить вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши для квазилинейной системы.

В теории уравнений в частных производных был получен ряд результатов о существовании и единственности вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$\partial_t u^m + F_m(t,x,u,\nabla u^m,\nabla^2 u^m) = 0, \quad u_m(0,x) = u_{0m}(x), \tag{3}$$

называемых слабо связанными системами, т.е. систем с недиагональным вхождением только членов нулевого порядка (см. [8, 9]). Насколько нам известно, нет работ, в которых методами теории уравнений в частных производных изучалась бы задача Коши вида

$$\partial_t u^m + F_m(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u^m) = 0, \quad u_m(T,x) = u_{0m}(x).$$

Вероятностные модели вязкостных решений задачи Коши для систем (3) были построены Е. Парду и его соавторами [10–12]. В этих работах было показано, что если функция $F_m(t,x,u,p,q)$ имеет вид

$$F^m(t,x,u,\nabla u^m,\nabla^2 u^m) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^m(x,u)\nabla^2 u^m [A^m]^{\mathrm{т}}(x,u) +$$

$$+ \langle a^m(x,u),\nabla u^m\rangle + (c(x,u)u)^m + f^m(t,x,u),$$

где G^m – положительно определённые $\mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$-матрицы, а $\mathbb{R}^{d_1} \bigotimes \mathbb{R}^{d_1}$-матрицы $c(x,u)$ обладают свойствами Q-матрицы (т.е. $c^{mq}(x) \geqslant 0$ при $m \neq q$ и $\sum_{j=1}^{d_1} c_{ij}(x,u) = 0$), то систему (3) можно рассматривать как обратное уравнение Колмогорова для диффузионного процесса с переключениями, задаваемыми марковской цепью. Здесь и ниже $\langle a,b\rangle = \sum_{k=1}^d a_k b_k$, $a,b \in \mathbb{R}^d$, и $\langle Aa,b\rangle = \langle a, A^{\mathrm{т}} b\rangle$.

Вероятностный подход к построению классических решений линейных систем такого вида был развит в работах [13, 14], а соответствующие результаты для нелинейных систем получены в статьях [15, 16].

Отметим, что вероятностная интерпретация решений $u^m(s,x)$ обратной задачи Коши (3) (как классических, так и вязкостных) позволяет рассматривать их как скалярные функции $u(s,x,m)$, заданные на пространстве $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times M$, где $M = \{1,2,\ldots,d_1\}$, и формулировать вероятностную модель как диффузионный процесс $\xi(t)$ с переключениями, определяемыми марковской цепью $\nu(t)$ с генератором c, а систему (3) можно интерпретировать как (скалярное) обратное уравнение Колмогорова для двухкомпонентного марковского процесса $(\xi(t),\nu(t))$.

Как будет показано ниже, системы типа (1) и (2) также допускают вероятностную интерпретацию как системы обратных уравнений Колмогорова для двухкомпонентного случайного процесса $(\xi(t),\eta(t))$, где $\xi(t)\in\mathbb{R}^d$ – диффузионный процесс, а $\eta(t)\in\mathbb{R}^{d_1}$ – диффузионный процесс, порождающий мультипликативный операторный функционал от $\xi(t)$. Более того, вероятностное представление решения задачи Коши для систем такого типа, рассматриваемое в данной работе, позволяет свести решение исходной системы относительно функций $u_m(t,x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, $t\in[0,T]$, к решению скалярного уравнения относительно функции $\Phi(t,x,h) = \langle h,u(t,x)\rangle$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}$.

Отметим, что вероятностный подход, рассматриваемый в этой работе, применим также к построению решения прямой задачи Коши для систем вида

$$\partial_t u^m = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(y,u)\nabla^2 u^m A^{\mathrm{т}}(y,u) + \langle a(y,u),\nabla u^m\rangle - \sum_{i=1}^d\sum_{q=1}^{d_1} B_i^{mq}(y,u)\nabla_{y_i}u^q + \sum_{k=1}^{d_1} c^{mq}(y,u)u^q,$$

$$u^m(0,y) = u_{0m}(y), \tag{4}$$

поскольку (4) можно свести к (1) с помощью простой замены

$$u^m(t,y) = v^m(T-t,y).$$

Однако задача Коши для системы нелинейных параболических уравнений вида

$$\partial_t u^m = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \nabla^2_{y_i y_j}\left[\left(\sum_{q=1}^{d_1} G^{mq}_{ij}(y,u)u^q\right)u^m\right] + \sum_{i=1}^{d} a^m_i(y,u)\nabla_{y_i}u^m -$$
$$-\sum_{i=1}^{d}\sum_{q=1}^{d_1} B^{mq}_i(y,u)\nabla_{y_i}u^q + \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(y,u)u^q, \quad u^m(0,y) = u_{0m}(y), \tag{5}$$

такую интерпретацию не допускает. Это связано с тем, что с вероятностной точки зрения системы (5) естественно интерпретировать как системы прямых уравнений Колмогорова, что приводит к необходимости разрабатывать альтернативные подходы к выводу соответствующих моделей и их исследованию. Первые результаты о структуре вероятностных моделей для таких систем параболических уравнений можно найти в работах [17, 18] и в ряде других.

В общем случае вероятностный подход к изучению краевых задач для систем нелинейных параболических уравнений состоит из трёх этапов: на первом этапе нужно построить стохастическую модель рассматриваемой задачи; на втором – исследовать эту модель и доказать разрешимость соответствующей стохастической задачи; на третьем – проверить, что в результате решения стохастической задачи построено искомое решение исходной задачи.

В настоящей работе будут сформулированы стохастические модели классического и вязкостного решения задачи Коши для систем вида (1), (2) и исследованы эти модели. Как следствие, будут найдены вероятностные представления классических и вязкостных решений обратной задачи Коши для систем (1), (2). Полученные таким образом интегральные представления могут быть использованы для создания эффективных численных схем построения соответствующих решений. При этом стохастические уравнения, входящие в эту модель, можно использовать для оценки сходимости соответствующего численного метода. Ввиду ограниченности объёма остановимся на основных идеях доказательств, опуская детали и ссылаясь на работы, где приведены полные доказательства соответствующих фактов.

Далее статья организована следующим образом. В п. 1 рассмотрим стохастические модели, связанные с классическим решением обратной задачи Коши для семилинейных систем вида (1). Системы такого вида встречаются в задачах финансовой математики и теории игр, а также к ним можно свести решение систем вида (2) и (4). Наряду с этим такие системы возникают при изучении дифференциальных продолжений квазилинейных уравнений (т.е. уравнений с нелинейным вхождением градиента решения) и полностью нелинейных скалярных уравнений (т.е. уравнений с нелинейным вхождением старших производных). При этом рассмотрение дифференциального продолжения квазилинейного или полностью нелинейного параболического уравнения позволяет включить его в качестве компоненты в систему семилинейных параболических уравнений и свести решение задачи Коши для исходных уравнений и систем к решению задачи Коши для систем семилинейных уравнений с большим количеством уравнений. Стохастические модели для квазилинейных систем параболических уравнений, позволяющие получить вероятностные представления классических решений задачи Коши для таких систем, изучаются в п. 2. В п. 3 приведём стохастические модели для квазилинейных уравнений, которые позволяют получить вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши.

1. Стохастические модели классического решения обратной задачи Коши для системы семилинейных параболических уравнений. С вероятностной точки зрения системы вида (1) можно интерпретировать как системы обратных уравнений Колмогорова для соответствующих случайных процессов. Для того чтобы описать эти процессы, введём в рассмотрение вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$, т.е. измеримое пространство $(\Omega,\mathcal{F})$ с мерой P, $P(\Omega)=1$, и заданный на нем стандартный винеровский процесс $w(t)\in\mathbb{R}^d$. Для случайной величины $\xi:\Omega\to\mathbb{R}^d$ и ограниченной борелевской функции $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ обозначим

$$Ef(\xi) = \int\limits_{\Omega} f(\xi(\omega))P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\mu(dy),$$

где $\mu(dy) = P\{\xi\in dy\}$.

Пусть $C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$ – пространство измеримых ограниченных функций на $\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{R}^{d_1}$; $C^{1,k}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ – пространство функций, дифференцируемых по $t\in[0,T]$ и k раз дифференцируемых по $x\in\mathbb{R}^d$.

Пусть $\phi\in C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$, Θ – множество функций вида $\Phi(z)=\langle h,\phi(x)\rangle$, заданных на пространстве $Z=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}$, $\gamma=(x,h)\in Z$, с нормой

$$\|\Phi\|_\Theta=\sup_{\|h\|=1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\langle h,\phi(x)\rangle|,$$

и $\mathcal{L}$ – его подмножество, состоящее из функций, удовлетворяющих условию Липшица по x. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\|\Phi\|_\Theta=\|\phi\|_{\Theta_1}.$$

Фундаментальную роль в стохастическом анализе играет формула Ито, позволяющая вычислить стохастический дифференциал $d\eta(t)$ процесса $\eta(t)=f(\xi(t))$ по заданному стохастическому дифференциалу $d\xi(t)$.

Формула Ито. Пусть $a(x)\in\mathbb{R}^d$, $A(x)\in\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$, $f\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ и

$$d\xi(t)=a(\xi(t))\,dt+A(\xi(t))\,dw(t).$$

Тогда

$$d\eta(t)=[\partial_t f(\xi(t))+Lf(\xi(t))]\,dt+\langle\nabla f(\xi(t)),A(\xi(t))\,dw(t)\rangle.$$

Здесь

$$Lf(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A(x)\nabla^2 f(x)A^{\text{т}}(x)+\langle a(x),\nabla f(x)\rangle,\quad \langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^d x_k y_k,\quad x,y\in\mathbb{R}^d.$$

Символом “т” будем обозначать операцию транспонирования.

Пусть $a(x,u)\in\mathbb{R}^d$, $A(x,u)\in\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$, а $c(x,u)$ и $C(x,u)y$ – линейные отображения в пространстве $\mathbb{R}^{d_1}$, $x,y\in\mathbb{R}^d$, $u\in\mathbb{R}^{d_1}$.

Стохастической моделью классического решения задачи Коши (1) назовём систему стохастических соотношений

$$d\xi(t)=a(\xi(t),u(t,\xi(t)))\,dt+A(\xi(t),u(t,\xi(t)))\,dw(t),\quad \xi(s)=x\in\mathbb{R}^d,\tag{6}$$

$$d\eta(t)=c(\xi(t),u(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt+C(\xi(t),u(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)),\quad \eta(s)=h\in\mathbb{R}^{d_1},\tag{7}$$

$$\langle h,u(s,x)\rangle=E\langle\eta_{s,h}(T),u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle,\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T.\tag{8}$$

Здесь $\xi_{s,x}(t)$, $\eta_{s,h}(t)$ – случайные процессы, удовлетворяющие (6) и (7) соответственно,

$$a:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d,\quad A:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d,$$

$$c:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^{d_1}\bigotimes\mathbb{R}^{d_1},\quad C:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}\bigotimes\mathbb{R}^{d_1}$$

и $\langle h,u\rangle=\sum_{m=1}^{d_1}h_m u_m$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{d_1}$.

Далее нам понадобится ряд условий.

Условие C1. Существует константа ρ_0 и положительные константы L, $K_{u,v}$, K, для которых выполнены оценки

$$\|a(x,u)-a(y,v)\|^2+\|A(x,u)-A(y,v)\|^2\leqslant L[\|x-y\|^2+K_{u,v}\|u-v\|^2],$$

$$\|a(x,u)\|^2+\|A(x,u)\|^2\leqslant K[1+\|x\|^2+\|u\|^{2p}],$$

$$\|c(x,u)-c(y,v)\|^2+\|C(x,u)-C(y,v)\|^2\leqslant L[\|x-y\|^3+K_{u,v}\|u-v\|^2],$$

$$\langle c(x,u)h,v\rangle \leqslant [\rho_0+\rho\|u\|]\|h\|, \quad \|C(x,u)z\|^2 \leqslant \rho[1+\|u\|^2]\|z\|^2, \quad z\in\mathbb{R}^d,$$
$$\sup_x \|u_0(x)\|^2 \leqslant K_0, \quad \sup_x \|\nabla u_0(x)\| \leqslant L_0.$$

Условие С2. Пусть выполнено условие С1 и коэффициенты системы (6)–(8) имеют ограниченные непрерывные производные по обоим аргументам до порядка k.

Введём обозначения

$$L^v f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A(x,v)\nabla^2 fA^{\mathrm{T}}(x,v)+a(x,v)\cdot\nabla f(x), \quad M^v f(x)=B(x,v)\nabla f(x)+c(x,v)f(x). \tag{9}$$

Покажем, что задание стохастической модели (6)–(8) позволяет свести классическое решение задачи Коши для системы (1) к решению интегрального уравнения

$$u(s,x)=E[S^{\mathrm{T}}(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))],$$

вытекающего из (8). Здесь $\langle S(t,s)h,u\rangle=\langle h,S^{\mathrm{T}}(t,s)u(t)\rangle$ и $S(t,s)h=\eta(t)$. Установим разрешимость этой модели.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие С2 при $k=1$. Тогда существует отрезок $[T_2,T]$, длина $\delta=|T-T_2|$ которого зависит от констант в оценках условия С2, такой, что для всех $s,t\in[T_2,T]$ существует единственное решение $(\xi(t),\eta(t),u(s,x))$ системы (6)–(8). При этом процесс $\xi(t)\in\mathbb{R}^d$ обладает марковским свойством, а функция $u(s,x)\in\mathbb{R}^{d_1}$ ограничена при $s\in[T_2,T]$ и удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько утверждений.

Рассмотрим линеаризованную задачу, которая позволит получить необходимые априорные оценки. Пусть $v(s,x)$ – заданная ограниченная функция на множестве $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая оценкам

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|v(s,x)\|\leqslant K_v(s) \quad \text{и} \quad \|v(s,x)-v(s,y)\|\leqslant L_v(s)\|x-y\|.$$

Рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi(t)=a(\xi(t),v(t,\xi(t)))\,dt+A(\xi(t),v(t,\xi(t)))\,dw(t), \quad \xi(s)=x\in\mathbb{R}^d,$$

$$d\eta(t)=c(\xi(t),v(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt+C(\xi(t),v(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)), \quad \eta(s)=h\in\mathbb{R}^{d_1},$$

и пусть функция $g(s,x)$ задана соотношением

$$\langle h,g(s,x)\rangle=E\langle\eta_{s,h}(T),u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle, \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T. \tag{10}$$

Используя стандартные оценки и формулу Ито, покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие С1, $u_0\in\Theta_1$, $v\in\mathcal{L}$. Тогда существует такой отрезок Δ_1, что функция $g(s,x)$, заданная соотношением (10), удовлетворяет оценке*

$$\sup_x\|g(s,x)\|\leqslant\gamma(s),$$

если $v(s,x)$ удовлетворяет оценке

$$\sup_x\|v(s,x)\|\leqslant\gamma(s),$$

где $\gamma(s)<\infty$ для всех $s\in\Delta_1$.

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ – положительная функция и

$$K_v(s)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|v(s,x)\|\leqslant\gamma(s)$$

для всех $s \in [0,T]$. Покажем, что существует такой отрезок $\Delta_1 = [T_1, T]$, где $T_1 < T$, что $K_g(s) \leqslant \gamma(s)$ для всех $s \in \Delta_1$.

Используя оценки стохастических интегралов и оценки из условия C1, нетрудно проверить, что выполняется неравенство

$$\|g(s)\|^2_{\Theta_1} \leqslant K_{u_0} \exp\left[\int\limits_s^T [2\rho_0 + 3\rho K_v(\tau)]\, d\tau\right],$$

где $K_{u_0} = \sup\limits_x \|u_0(x)\|^2$, и функция $\gamma(s)$, заданная соотношением

$$\gamma(s) = \frac{2\rho_0 K_{u_0} e^{2\rho_0(T-s)}}{2\rho_0 + 3\rho K_{u_0} - 3\rho K_{u_0} e^{2\rho_0(T-s)}}, \tag{11}$$

обладает требуемыми свойствами, а именно, если $K_v(\tau) \leqslant \gamma(\tau)$, то $K_g(\tau) \leqslant \gamma(\tau)$ для любого $\tau \in \Delta_1$.

Из соотношения (11) следует, что функция $\gamma(\tau)$ ограничена на всём отрезке $[0,T]$, если $2\rho_0 + 3\rho K_{u_0} < 0$. В противном случае функция $\gamma(\tau)$ ограничена на отрезке $\Delta_1 = [T_1, T]$, длина которого подчиняется оценке

$$|T_1 - T| < \frac{1}{2\rho_0} \ln\left[1 + \frac{2\rho_0}{3\rho K_{u_0}}\right]. \tag{12}$$

Если условие C2 выполнено при $k = 1$, то аналогичную оценку можно получить и для функции Липшица $L_g(s)$ в неравенстве

$$\|g(s,x) - g(s,y)\| \leqslant L_g(s)\|x - y\|$$

для $s \in [T_2, T]$, где $T_2 \geqslant T_1$. Точнее, можно показать, что если функция $v(s,x)$ подчиняется условию Липшица

$$\|v(s,x) - v(s,y)\| \leqslant \beta(s)\|x - y\|,$$

то справедлива оценка $L_g(s) \leqslant \beta(s)$. Для этого достаточно доказать, что существует отрезок $[T_2, T]$ и ограниченная на нем функция $\phi(s) > 0$ такие, что для всех $s \in [T_2, T]$ выполняется неравенство $\|\nabla g(s,x)\|^2 \leqslant \phi(x)$, если $\|\nabla v(s,x)\|^2 \leqslant \phi(s)$. Необходимый результат можно получить, применив описанные выше рассуждения к стохастической системе, содержащей (6)–(8) и соотношения

$$d\alpha(t) = m(\xi(t), V(t,\xi(t)))\alpha(t)\, dt + M(\xi(t), V(t,\xi(t)))(\alpha(t), dw(t)), \quad \alpha(s) = I,$$

$$d\zeta(t) = c(\xi(t), v(\xi(t)))\zeta(t)\, dt + C(\xi(t), v(\xi(t)))(\zeta(t), dw(t)) + n(\zeta(t), \alpha(t), V(t,\xi(t)))\, dt +$$

$$+ N(\xi(t), v(t,\xi(t)))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h \in \mathbb{R}^{d_1},$$

$$\langle h, \nabla g(s,x)\rangle = E\langle \eta_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T))\alpha(T)\rangle + \langle \zeta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

где I-единичная матрица, $V(t,x) = (v(t,x), \nabla v(t,x))$. Здесь

$$m(\xi(t), V(t,\xi(t))) = \nabla_x a(\xi(t), v(t,\xi(t))) + \nabla_v a(\xi(t), v(t,\xi(t)))\nabla_x v(t,\xi(t)),$$

$$n(\xi(t), V(t,\xi(t))) = \nabla_x c(\xi(t), v(t,\xi(t))) + \nabla_v c(\xi(t), v(t,\xi(t)))\nabla_x v(t,\xi(t)),$$

и аналогичные соотношения связывают M с A и N с C.

Применяя лемму 2 к системе последовательных приближений

$$\langle h, u^n(s,x)\rangle = E\langle \eta^{n-1}_{s,h}(T), u_0(\xi^{n-1}_{s,x}(T))\rangle, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

где $\xi^n_{s,x}(t)$ и $\eta^n_{s,h}(t)$ – последовательные приближения к решениям СДУ (6) и (7), можно доказать для некоторых положительных T_1 сходимость последовательности u_n в пространстве $C([T_1,T];C_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1}))$. Если выполнено условие C2 при $k=2+\epsilon$, $\epsilon\in(0,1)$, то можно проверить, что последовательность ∇u_n сходится к пределу ∇u на некотором отрезке $[T_2,T]$ и последовательность $\nabla^2 u_n$ сходится к пределу $\nabla^2 u$ на отрезке $[T_3,T]$, $[T_3,T]\subset[T_2,T]\subset$ $\subset[T_1,T]$. Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие C2 при* $k=3$. *Тогда существует отрезок* $[T_3,T]$, *длина* $\delta_3=|T-T_3|$ *которого зависит от констант в оценках условия C2, такой, что для всех* $s\in[T_2,T]$ *существует единственное решение* $(\xi(t),\eta(t),u(s,x))$ *системы (6)–(8). При этом функция* $u(s,x)$ *вида (8) ограничена и дважды дифференцируема.*

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *В условиях теоремы 3 для всех* $s\in[T_3,T]$ *существует единственное классическое решение системы (1). Существуют константы в условии C2, при которых существует единственное классическое глобальное решение систем (1) на всём отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $u\in C^{1,2}([T_3,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$. Применяя формулу Ито, можно проверить, что функция $u(s,x)$ вида (8) удовлетворяет задаче Коши (1). Действительно, вычислив стохастический дифференциал случайного процесса $\gamma(t)=S^{\mathrm{т}}(t,s)u(t,\xi_{s,x}(t))$, получим

$$d\gamma(t)=dS^{\mathrm{т}}(t,s)u(t,\xi_{s,x}(t))+S^{\mathrm{т}}(t,s)\,du(t,\xi_{s,x}(t))+dS^{\mathrm{т}}(t,s)\,du(t,\xi_{s,x}(t)).$$

Опуская для упрощения аргументы у коэффициентов и функции u и применяя ещё раз формулу Ито, получаем равенство

$$d\gamma(t)=S^{\mathrm{т}}(t,s)\bigg[\partial_t u+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A\nabla^2uA^{\mathrm{т}}+\langle a,\nabla u\rangle+\langle C^{\mathrm{т}},A^{\mathrm{т}}\nabla u\rangle+c^{\mathrm{т}}u\bigg]\,dt+$$
$$+\,S^{\mathrm{т}}(t,s)\langle[C^{\mathrm{т}}u+A^{\mathrm{т}}\nabla u],dw(t)\rangle.$$

Проинтегрировав по t от $s\in[T_3,T]$ до T и вычислив математическое ожидание, имеем

$$E[S^{\mathrm{т}}(T,s)u_0(\xi_{s,x}(T))]-u(s,x)=$$
$$=E\bigg[\int\limits_s^T S^{\mathrm{т}}(\tau,s)[\partial_\tau u(s,\xi_{s,x}(\tau))+L^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))+M^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))]\,d\tau\bigg].$$

Как следует из (8), левая часть последнего равенства равна нулю. Таким образом, поскольку при любых s и x

$$E\bigg[\int\limits_s^T S^{\mathrm{т}}(\tau,s)[\partial_\tau u(s,\xi_{s,x}(\tau))+L^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))+M^u u(s,\xi_{s,x}(\tau))]\,d\tau\bigg]=0,$$

то отсюда вытекает, что функция $u(s,x)=E[S^{\mathrm{т}}(t,s)u_0(\xi_{s,x}(T))]$ является классическим решением задачи (1). Заметим, что при применении формулы Ито мы предположили, что $u(s,x)$ дифференцируема по $s\in[T_3,T]$. Доказательство этого факта аналогично проведённому доказательству и основано на непосредственной проверке существования предела

$$\lim_{\Delta s\to0}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to0}\frac{1}{\Delta s}E[S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T))-S^{\mathrm{т}}(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))]=$$
$$=E[(S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)-S^{\mathrm{т}}(s,T))u(T,\xi_{s+\Delta s,x}(T))+S^{\mathrm{т}}(s,T)(u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T))-u_0(\xi_{s,x}(T)))].\quad(13)$$

При этом для вычисления правой части (13) используются соотношения

$$S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)-S^{\mathrm{т}}(s,T)=S^{\mathrm{т}}(s+\Delta s,T)[I-S^{\mathrm{т}}(s,s+\Delta s)]=$$

$$= \int\limits_s^{s+\Delta s} S^{\mathrm{T}}(T,\tau)c^{\mathrm{T}}(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,d\tau + \int\limits_s^{s+\Delta s} S^{\mathrm{T}}(T,\tau)C^{\mathrm{T}}(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,dw(\tau)$$

и

$$u(T,\xi_{s,x}(T)) = u(T,\xi_{s+\Delta s,x}(T)) + \int\limits_s^{s+\Delta s} L^u u(\tau,\xi(\tau))\,d\tau + \int\limits_s^{s+\Delta s} \nabla u(\tau,\xi(\tau))A(\xi(\tau),u(\tau,\xi(\tau)))\,dw(\tau).$$

Далее, вычисляя математическое ожидание и переходя к пределу, получим равенство $\partial_s u = -L^u u - M^u u$, и поскольку $u(s)\in C^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d_1})$ в силу теоремы 2, то существование $\partial_s u$ также гарантировано.

Анализ задачи Коши для системы (4) показывает, что с помощью простого преобразования $v(T-t,x)=u(t,x)$ её можно свести к задаче Коши вида

$$\partial_t v_m + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d G_{ij}(v)\nabla^2_{y_iy_j}v_m + \sum_{i=1}^d a_i^m(y,v)\nabla_{y_i}v_m + \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^{d_1} C_i^{mk}(y,v)\nabla_{y_i}v_k + \sum_{k=1}^{d_1} c_{mk}(y,v)v_k = 0,$$

$$v(T,x) = u_0(x)$$

и затем рассмотреть стохастическую модель

$$d\xi(s) = a(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))ds + A(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))\,dw(s),\quad \xi(t)=x\in\mathbb{R}^d, \tag{14}$$

$$d\eta(s) = c(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))\eta(s)ds + C(\xi(s),v(T-s,\xi(s)))(\eta(s),dw(s)),\quad \eta(t)=h\in\mathbb{R}^{d_1}, \tag{15}$$
$$\langle h, v(T-t,x)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), u_0(\xi_{t,x}(T))\rangle,\quad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T.$$

Как следствие, можно применить теоремы 1–3 и проверить, что при выполнении условий C2 при $k=3$ функция $u(t,x)=v(T-t,x)$ является классическим решением задачи Коши для (1).

Теорема 4. *Вероятностное представление классического решения задачи Коши для неоднородной параболической системы*

$$\partial_s g^m + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d G_{ij}(y,g)\nabla^2_{y_iy_j}g^m + \sum_{i=1}^d a_i(y,g)\nabla_{y_i}g^m + \sum_{i=1}^d\sum_{q=1}^{d_1} B_i^{mq}(y,g)\nabla_{y_i}g^q +$$
$$+ \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(y,g)g^q = f^m(x,g),\quad g(0,x)=g_0(x) \tag{16}$$

имеет вид

$$\langle h, g(s,x)\rangle = E\Bigg[\langle \eta_{s,h}(T), g_0(\xi_{s,x}(T))\rangle + \int\limits_0^T \langle \eta_{s,h}(\tau), f(\xi(\tau),g(\tau,\xi(\tau)))\rangle\,d\tau\Bigg], \tag{17}$$

где функции $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *подчиняются СДУ*

$$d\xi(t) = a(\xi(t),g(t,\xi(t)))\,dt + A(\xi(t),g(t,\xi(t)))\,dw(t),\quad \xi(s)=x\in\mathbb{R}^d,$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t),g(t,\xi(t)))\eta(t)\,dt + C(\xi(t),g(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)),\quad \eta(s)=h\in\mathbb{R}^{d_1}.$$

Доказательство. Пусть $g(t,x)$ – решение задачи Коши (16). Рассмотрим случайный процесс $\gamma(t)=\langle\eta(t),g(t,\xi(t))\rangle$, применив к которому формулу Ито, получим равенство

$$d\gamma(t) = \langle d\eta(t), g(t,\xi(t))\rangle + \langle \eta(t), dg(t,\xi(t))\rangle + \langle d\eta(t), dg(t,\xi(t))\rangle.$$

Повторно применив формулу Ито и воспользовавшись соотношениями (14) и (15), получим

$$d\gamma(t) = \Big\langle \eta(t), \Big[\partial_t g + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla^2 g(t,\xi(t))A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t))) + a(\xi(t), g(t,\xi(t))) +$$

$$+ C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t))) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t))\Big]\Big\rangle\, dt +$$

$$+ \langle \eta(t), \langle [C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t)) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t)))], dw(t)\rangle\rangle. \quad (18)$$

Проинтегрируем (18) по t от s до T, вычислим математическое ожидание и, принимая во внимание, что $u(T,\xi(T)) = g_0(\xi(T))$, $g(s,\xi(s)) = g(s,x)$, получим

$$E\langle \eta(T), g_0(\xi(T))\rangle - \langle h, g(s,x)\rangle = \int_s^T E\langle \eta(t), \partial_t g + \langle a(\xi(t), g(t,\xi(t))), \nabla g\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla^2 g(t,\xi(t))A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t))) + c^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))g(t,\xi(t)) +$$

$$+ C^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\xi(t), g(t,\xi(t)))\nabla g(t,\xi(t))A(\xi(t), g(t,\xi(t)))\rangle\, dt.$$

Замечание 1. Пусть $u(s,x)$ – классическое решение задачи Коши (1). Соотношение (8) позволяет заметить, что задача Коши (1) эквивалентна задаче Коши для скалярного уравнения

$$\partial_s\Phi + \langle q(\gamma,u), \nabla\Phi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(\gamma,u)\nabla^2\Phi Q^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(\gamma,u) = 0, \quad \Phi(T,\gamma) = \Phi_0(\gamma) = \langle h, u_0(x)\rangle \quad (19)$$

относительно функции $\Phi(s,\gamma)$, $\gamma = (x,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_1}$. Здесь

$$q(\gamma) = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & c(x)h \end{pmatrix}, \quad Q(\gamma) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & C(x)h \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Обозначив $W(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, запишем систему (6)–(8) в виде

$$d\gamma(t) = q(\gamma(t))\, dt + Q(\gamma(t))\, dW(t), \quad \gamma(s) = \gamma,$$

$$\Phi(s,\gamma) = E[\Phi_0(\gamma_{s,\gamma}(T))] = E[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle]. \quad (21)$$

Используя формулу Ито, можно проверить, что функция $\Phi(s,\gamma)$ вида (21) является единственным классическим решением задачи (19).

Эта эквивалентность, в частности, играет важную роль при построении вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений.

2. Стохастические модели классического решения обратной задачи Коши для систем квазилинейных и полностью нелинейных параболических уравнений. Будем считать, что система параболических уравнений *квазилинейна* или *полностью нелинейна*, если коэффициенты этой системы нелинейно зависят от градиента или от гессиана (матрицы Гессе) её решения соответственно.

Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных уравнений

$$\partial_s u^m + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x,u)\nabla^2 u^m A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(x,u) + \langle a(x,u,\nabla u), \nabla u^m\rangle + \sum_{q=1}^{d_1}\langle B^{mq}(x,u,\nabla u), \nabla u^q\rangle +$$

$$+ \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(x,u,\nabla u)u^q = 0, \quad u^m(T,x) = u_{0m}(x). \quad (22)$$

После дифференцирования (22) и введения новой переменной $v = \nabla u$ получим систему семилинейных параболических уравнений относительно вектор-функции

$$V(s,x) = (u(s,x), \nabla u(s,x) = v(s,x)) = (V_1(s,x)\ldots, V_M(s,x)),$$

где $M = d_1(1+d)$, обладающую той же структурой, что и системы, рассмотренные в п. 1.

Лемма 2. *Дифференциальное продолжение системы (22), т.е. система уравнений для функции $V(s,x)=(u(s,x),\nabla u(s,x))$, является семилинейной системой с диагональным вхождением старших производных.*

Доказательство. Вычислениями проверяется, что вектор функция $V(s,x) = (u(s,x), \nabla u(s,x))$ удовлетворяет системе семилинейных уравнений, состоящей из (22) и уравнений для $v_m(s,x) = \nabla u_m(s,x)$:

$$\partial_s v^m + L^u v^m + M^u v^m + \sum_{q=1}^{d_1} \langle \theta^{mq}(x,V), \nabla v^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1} \langle \beta^{mq}(x,V), v^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1} \nabla_x c^{mq}(x,V) u^q = 0, \quad (23)$$

где

$$\theta = \nabla_x G + \nabla_u G v + \nabla_v a v + \nabla_v c u + \nabla_v B v + B, \quad \beta = \nabla_x a + \nabla_u a v + \nabla_u c u + c + \nabla_x B + \nabla_u B v,$$

а L^u и M^u имеют вид (9).

Рассмотрим стохастическую модель, соответствующую новой системе (22), (23), и покажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Стохастическая модель, соответствующая системе (22), (23), имеет структуру, аналогичную структуре стохастической модели исходной системы (22).*

Доказательство. Рассмотрим систему СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t), V(t,\xi(t)))ds + A(\xi(t), u(t,\xi(t)))\, dw(t), \quad \xi(s) = x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad (24)$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t), V(t,\xi(t)))\eta(t)\, dt + C(\xi(t), V(t,\xi(t)))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h \in \mathbb{R}^{d_1}, \quad (25)$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = E\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle \quad (26)$$

и систему СДУ для процессов $\alpha_{ij}(t) = \nabla_i \xi_j(t)$ и $\beta_{im}(t) = \nabla_i \eta_m(t)$

$$d\alpha_{ij}(\theta) = [\nabla_{u_q} a_i(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta))) v_{jq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{km}(\theta) + \nabla_{v_{ql}} a_i(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\nabla_m v_{ql}(\theta,\xi(\theta)) \times$$

$$\times\, \alpha_{mj}(\theta)]\, d\theta + \nabla_{u_q} A_{ik}(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta))) v_{kq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{km}(\theta)\, dw_n(\theta), \quad (27)$$

$$d\beta_{im}(\theta) = [\nabla_{u_q} c_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta))) v_{qr}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{ri}(\theta)\eta_k(\theta) + c_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_{ik}(\theta)]\, d\theta +$$

$$+ [\nabla_{u_q} C^j_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta))) v_{jq}(\theta,\xi(\theta))\alpha_{ji}(\theta)\eta_k(\theta) + C^j_{mk}(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_{ki}(\theta)]\, dw_j(\theta). \quad (28)$$

В соотношениях (27), (28) используем соглашение о суммировании по повторяющимся аргументам, чтобы упростить громоздкие обозначения. Дополним систему (24)–(27) соотношением

$$\langle h, \nabla u(s,x)\rangle = E\langle \nabla\eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle + \langle \eta_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T))\alpha(T)\rangle.$$

Пусть $Y = \mathbb{R}^d \bigoplus (\mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d) \bigotimes \mathbb{R}^{d_1}$ и $G \bigoplus \Gamma = G \bigotimes I + I \bigotimes \Gamma$ – тензорная сумма операторов, действующих в пространстве Y по правилу

$$G \bigoplus \Gamma(x,y) = Gx \bigotimes y + x \bigotimes \Gamma y.$$

Используя эти обозначения, будем рассматривать уравнения (25), (27), (28) как уравнения для процессов $\beta_1(\theta) = \nabla \eta^k(\theta)$, $\beta_2(\theta) = \alpha(\theta) \bigotimes \eta(\theta)$, имеющие вид

$$d\beta_1(\theta) = c(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_1(\theta)\, d\theta + C(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta_1(\theta)\, dw(\theta) +$$

$$+\nabla c(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\diamond\beta_2(\theta)\,d\theta+\nabla C(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\diamond\beta_2(\theta)\,dw(\theta),$$
$$d\beta_2(\theta)=[\nabla a(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\bigoplus c(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))]\beta_2(\theta)\,d\theta+$$
$$+[\nabla A(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))\bigoplus C(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))]\beta_2(\theta)\,dw(\theta),$$
$$\beta_1(s)=0,\quad \beta_2(s)=y\bigotimes h.$$

Здесь $\nabla c\diamond(\alpha\bigotimes h)=c(\alpha,h)$, $\nabla C\diamond(\alpha\bigotimes h)=\nabla C(\alpha,h)$. Запишем уравнение для процесса $\beta(\theta)=(\beta_1(\theta),\beta_2(\theta))$ в виде

$$d\beta(\theta)=b(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)\,d\theta+B(\xi(\theta, V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)dW(\theta),$$

где

$$W(t)=\begin{pmatrix}w(t)\\ w(t)\end{pmatrix},\quad \beta(\theta)=\begin{pmatrix}\zeta(\theta)\\ \alpha(\theta)\bigotimes\eta(\theta)\end{pmatrix},$$

а линейные отображения $b(u)$, $B(u)$ действуют по правилу

$$b(u)\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\beta_1+\nabla c(y,\eta)\\ 0\cdot y\bigotimes\eta+y\bigotimes c\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & \nabla c\\ 0 & \nabla a\bigoplus c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix},$$

$$B(u)\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\beta_1+\nabla C(y,h)\\ \nabla Ay\bigotimes\eta+y\bigotimes Ch\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & \nabla C\\ 0 & \nabla Ay\bigoplus C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ y\bigotimes\eta\end{pmatrix}.$$

В результате систему (25), (26), (28) можно представить в виде линейного СДУ

$$d\beta(\theta)=b(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)\,d\theta+B(\xi(\theta), V(\theta,\xi(\theta)))\beta(\theta)dW(\theta)\qquad(29)$$

с соответствующими начальными условиями. Пусть

$$G_0(x)=G(0,x)=\begin{pmatrix}u_0(x)\\ v_0(x)\end{pmatrix},$$

где $v_0=\nabla u_0$ – дифференцируемая ограниченная функция. Рассмотрим функцию

$$G(s,x)=\begin{pmatrix}u(s,x)\\ v(s,x)\end{pmatrix}=E\left[\begin{pmatrix}\eta(T) & 0\\ \beta_1(T) & \beta_2(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0(\xi_{s,x}(T))\\ v_0(\xi_{s,x}(T))\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}E[\eta(T)u_0(\xi_{s,x}(T))]\\ E[\beta_1(T)u_0(\xi_{s,x}(T))+\beta_2(T)v_0(\xi_{s,x}(T))]\end{pmatrix}\qquad(30)$$

и заметим, что система (24), (29) и (30) имеет ту же структуру, что и система (24)–(26).

Система стохастических соотношений (24), (29), (30) является стохастической моделью для системы (22), (23) параболических уравнений, полученной из исходной системы с помощью процедуры дифференциального продолжения. Таким образом, если коэффициенты b и B удовлетворяют условиям C1 и C2, то утверждения теорем 3 и 4 справедливы и в новом контексте.

Отметим, что описанный выше подход работает и при построении вероятностного представления решения задачи Коши для полностью нелинейного уравнения, однако при этом возникает необходимость рассматривать дифференциальное продолжение исходной системы до третьего порядка.

3. Вероятностные модели вязкостных решений обратной задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений. Далее опишем альтернативный вероятностный подход, который позволяет естественным образом построить вероятностные представления для вязкостных решений задачи Коши (1). Предлагаемый подход базируется на результатах теории обратных стохастических дифференциальных уравнений, основы которой были заложены в работах [10–12]. Среди многих результатов этой теории существенную роль играет возможность построения вероятностных представлений вязкостных решений задачи Коши для скалярных квазилинейных параболических уравнений. В этой работе будут обобщены соответствующие результаты на системы вида (1).

Для упрощения рассмотрим систему

$$u_s^m + \langle a(x), \nabla u^m\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(x)\nabla^2 u^m A^{\mathrm{т}}(x) + \sum_{q=1}^{d_1}\langle B^{mq}(x), \nabla u^q\rangle + \sum_{q=1}^{d_1} c^{mq}(x)u^q =$$

$$= \tilde f^m(x, u, A^{\mathrm{т}}(x)\nabla u + B(x)u), \quad u^m(T,x) = u_{0m}(x), \quad m = \overline{1,d}. \tag{31}$$

Пусть, как и выше, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – заданное вероятностное пространство и $\mathcal{F}_t$ – семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, порождённых винеровским процессом $w(t)\in\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, удовлетворяющий (прямой) системе СДУ:

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t), \quad \xi(s) = x\in\mathbb{R}^d, \quad 0\leqslant s\leqslant t, \tag{32}$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t))\eta(t)\,dt + C(\xi(t))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h\in\mathbb{R}^d. \tag{33}$$

Как уже было показано, процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t) = q(\gamma(t))\,dt + Q(\gamma(t))dW(t), \tag{34}$$

где q и Q заданы соотношениями (20) и $W(t) = (w(t), w(t))^{\mathrm{т}}$.

Существование и единственность процесса $\gamma(t)$, удовлетворяющего (34), гарантируется условием C2. Обозначим как $S(t,s)$ и $S^{\mathrm{т}}(s,t)$ стохастические эволюционные семейства, заданные соотношениями $\eta(t) = S(t,s)h$ и $\langle S(t,s)h, u\rangle = \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)u\rangle$.

Для того чтобы вывести вероятностное представление решения задачи Коши для системы (31), предположим, что функция $u\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ является классическим решением этой задачи. Из формулы Ито следует, что стохастический дифференциал процесса

$$\tilde y(t) = \langle \eta(t), u(t,\xi(t))\rangle = \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)u(t,\xi(t))\rangle \in \mathbb{R}$$

имеет вид

$$d\tilde y(t) = \left\langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)\left[u_t + \langle\nabla u, a(\xi(t))\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(\xi(t))\nabla^2 u A^{\mathrm{т}}(\xi(t)) + \langle B(\xi(t)), \nabla u\rangle + c(\xi(t))u\right]\right\rangle dt +$$

$$+ \langle h, S^{\mathrm{т}}(s,t)[\langle\nabla u, A(\xi(t))\,dw(t)\rangle + \langle C^{\mathrm{т}}(\xi(t))u, dw(t)\rangle]\rangle, \tag{35}$$

где

$$\langle B, \nabla u(x)\rangle^m = \sum_{q=1}^{d_1}\sum_{j,k=1}^{d} C_j^{mq}(x)A_{jk}\nabla_{x_k}u^q.$$

Введём обозначения

$$y(t) = v(t,\gamma(t)) = S^{\mathrm{т}}(s,t)u(t,\xi(t)), \quad f(\gamma(t), y(t), z(t)) = S^{\mathrm{т}}(s,t)\tilde f(\xi(t), y(t), z(t)).$$

Поскольку по предположению u удовлетворяет (31), то из (35) вытекает, что процесс $y(t) = u(t,\gamma(t))\rangle$ удовлетворяет стохастической задаче Коши

$$dy(t) = -f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t), \quad y(T) = u_0(\gamma(T)), \tag{36}$$

если

$$z(t) = S^{\mathrm{т}}(s,t)[\nabla u A(t,\xi(t)) + C^{\mathrm{т}}(\xi(t))u(t,\xi(t))] \in \mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d.$$

Будем рассматривать (36) как обратное стохастическое дифференциальное уравнение.

Обозначив $W(t) = (w(t), w(t))^{\mathrm{T}}$ и записав систему (32), (33) как уравнение (17) относительно $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, придём к системе ПОСДУ, состоящей из прямого СДУ

$$d\gamma(t) = g(\gamma(t))\,dt + G(\gamma(t))\,dW(t), \quad \gamma(s) = \gamma = (x, h), \tag{37}$$

и обратного СДУ (ОСДУ)

$$dy(t) = -f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t), \quad y(T) = \zeta \in \mathbb{R}^d. \tag{38}$$

Замечание 2. Если правая часть системы (31) имеет произвольный вид $m(x, u, \nabla u)$, то нужно будет формулировать условия, гарантирующие, что

$$f(\gamma(t), y(t), z(t)) = m(\gamma(t), [S^{\mathrm{T}}(t,T)]^{-1}y(t), (A^{\mathrm{T}})^{-1}[S^{\mathrm{T}}(T,t)]^{-1}z(t) - C^{\mathrm{T}}(\xi(t))[S^{\mathrm{T}}(T,t)]^{-1}y(t))$$

обладает нужными свойствами.

Ниже нам понадобится ряд результатов из общей теории ОСДУ и ПОСДУ (см. [12]).

Рассмотрим ОСДУ (38) и отметим, что это уравнение содержит два неизвестных процесса $y(t) \in \mathbb{R}^d$ и $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$, следовательно, как и в п. 2, нам потребуется замыкающее соотношение. Однако на этот раз для получения замыкающего соотношения мы воспользуемся теоремой Ито о представлении квадратично интегрируемого мартингала [19], которая утверждает, что любая $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина $\zeta \in \mathbb{R}^d$ с конечным вторым моментом $(E\|\zeta\|^2 < \infty)$, допускает представление вида

$$\zeta = E\zeta + \int\limits_0^T z(t)\,dw(t),$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$ – $\mathcal{F}_t$-измеримый однозначно определённый квадратично-интегрируемый случайный процесс.

Из (38) следует, что случайный процесс $y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$y(t) = v(t, \gamma(t)) = E\biggl[v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(\tau), y(\tau), z(\tau))\,d\tau | \mathcal{F}_t\biggr], \tag{39}$$

и ОСДУ (38) имеет по крайней мере одно решение $y(t) = S^{\mathrm{T}}(s,t)u(t, \xi(t))$.

Для того чтобы проверить, что

$$z(t) = S^{\mathrm{T}}(s,t)[A^{\mathrm{T}}(t, \xi(t))\nabla u + C^{\mathrm{T}}(\xi(t))u(t, \xi(t))],$$

рассмотрим случайную величину

$$\chi = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_0^T f(\gamma(t), y(t), z(t))\,dt \in \mathbb{R}^d$$

и предположим, что она квадратично интегрируема, $\mathcal{F}_T$-измерима и $E[\chi|\mathcal{F}_t]$ – это $\mathcal{F}_t$-мартингал. Тогда, в силу теоремы Ито о представлении мартингалов [16], существует единственный случайный процесс $z(t) \in \mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d$ такой, что $E\int_0^T \|z(t)\|^2\,dt < \infty$ и

$$\chi = E[\chi] + \int\limits_0^T z(t)\,dw(t). \tag{40}$$

Из соотношения (39) следует, что $y(0) = E[\chi|\mathcal{F}_0] = E[\chi]$, и в силу (40) справедливо равенство

$$y(0) = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_0^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_0^T z(\tau)\,dw(\tau). \tag{41}$$

При этом величина $y(0) - \int_0^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int_0^t z(r)\,dw(r)$ будет $\mathcal{F}_t$-измерима и равна величине

$$v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_t^T z(r)\,dw(r).$$

Вычислив условное математическое ожидание полученных величин относительно $\mathcal{F}_t$ и приняв во внимание соотношение (39), получим

$$y(t) = y(s) - \int\limits_s^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int\limits_s^t z(r)\,dw(r),$$

откуда (с учётом (41)) следует, что

$$y(t) = v_0(\gamma(T)) + \int\limits_t^T f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr - \int\limits_s^t z(r)\,dw(r).$$

Решение $y(t)$ допускает также представление

$$y(s) = y(t) - \int\limits_s^t f(\gamma(r), y(r), z(r))\,dr + \int\limits_s^t z(r)\,dw(r).$$

Далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие C3. Существует константа μ и положительные константы K, L такие, что:

а) $\|f(x,y,z)\| \leqslant K[\|x\| + \|y\| + |z|]$ для любого $t \in [0,T]$;

б) $\|f(x,y,z) - f(x,y,z_1)\| \leqslant L|z - z_1|$;

в) $\langle y - y_1, f(t,y,z) - f(t,y_1,z)\rangle \leqslant \mu\|y - y_1\|^2$, $y, y_1 \in \mathbb{R}^d$, $z, z_1 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Пусть $B_1(0)$ – единичный шар с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия C2 и C3. Тогда существуют процессы* $\gamma(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *удовлетворяющие системе (37), (38), и функция* $\tilde{y}(s) = \Phi(s,\gamma)$ *является ограниченной функцией, удовлетворяющей условию Липшица на множестве* $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times B_1(0)$.

Доказательство этого утверждения вытекает из того факта, что условия C2 и C3 гарантируют выполнение условий существования и единственности решения ПОСДУ [12].

Наша задача – показать, что функция $u(s,x) = y(s)$ является вязкостным решением системы (31). При доказательстве этого факта важную роль играет теорема сравнения для решений ОСДУ.

Пусть заданы два скалярных процесса $Y_i(t)$ и два векторных процесса $Z_i(t) \in \mathbb{R}^d$ таких, что пары $(Y_i(t), Z_i(t))$, $i = 1, 2$, удовлетворяют ОСДУ

$$dY_i(t) = -f_i(\xi(t), Y_i(t), Z_i(t))\,dt + \langle Z_i(t), dw(t)\rangle, \quad Y_i(T) = \zeta_i,$$

где $w(t) \in \mathbb{R}^d$ и ζ_i – $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [12]).

Теорема 7. *Пусть* $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$ *и* $f_1(y,z) \leqslant f_2(y,z)$ *п.н. Тогда* $Y_1(t) \leqslant Y_2(t)$ *п.н.*

Следствие. *Пусть заданы два скалярных процесса* $Y_i(t)$ *и два векторных процесса* $Z_i(t) \in \mathbb{R}^d$ *таких, что пары* $(Y_i(t), Z_i(t))$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют ОСДУ*

$$dY_1(t) = \zeta_1 + \int_t^T f(\xi(r), Y_1(r), Z_1(r))\,dr - \int_t^T \langle Z_1(r), dw(r)\rangle,$$

$$dY_2(t) = \zeta_2 + \int_t^T N(r)\,dr - \int_t^T \langle Z_2(r), dw(r)\rangle,$$

и $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$, $f_1(\xi(r), Y_2(t), Z_2(t)) \leqslant N(r)$. *Тогда можно применить теорему 7, положив*

$$f_2(\xi(t), y, z) = f_1(\xi(t), y, z) + N(t) - f_1(\xi(t), Y_2(t), Z_2(t)).$$

Если при этом $f_1(\xi(r), Y_2(t), Z_2(t)) < N(r)$ *на множестве положительной меры* $dt \times dP$, *то* $Y_1(0) < Y_2(0)$.

Как следует из сказанного выше, система (31) эквивалентна скалярному уравнению

$$\partial_s\Phi + \langle g(\gamma), \nabla\Phi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} G(s,\gamma)\nabla^2\Phi G(s,\gamma) = \Lambda(\Phi, \nabla\Phi), \quad \Phi(T,\gamma) = \Phi_0(\gamma) = \langle h, u_0(x)\rangle, \tag{42}$$

относительно функции $\Phi(t,\gamma) = \langle h, u(s,x)\rangle$, $\gamma = (x,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Для того чтобы определить понятие вязкостного решения нелинейного параболического уравнения (42) относительно скалярной функции $\Phi(t,\gamma)$, $\gamma = (x,h)$, введём понятие суб- и суперрешения.

Пусть $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $m = 2d$, $M^m = \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^m$, $\kappa(u, \nabla u) = B\nabla u + cu$,

$$L_\gamma\Psi = \langle g, \nabla_\gamma\Psi\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} G\nabla^2_\gamma\Psi G^{\mathrm{т}}, \quad \Lambda(\Psi, G^{\mathrm{т}}\nabla_\gamma\Psi) = \langle h, f(\kappa(u, \nabla\phi))\rangle.$$

Определение 1. Функцию $\Phi \in C([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ назовём *вязкостным субрешением задачи (1)*, если $\Phi(T,\gamma) \leqslant \Phi_0(\gamma)$ и для любых $\Psi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ и точки $(t,\gamma) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, в которой достигается локальный максимум разности $\Phi - \Psi$, где $\Psi = \langle h, \psi\rangle$ и $\psi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, справедливо неравенство

$$\partial_s\Psi + L_\gamma\Psi - \langle h, f(\kappa(u, \nabla\psi))\rangle \geqslant 0;$$

и *суперрешением*, если $\Phi(T,\gamma) \geqslant \Phi_0(\gamma)$ и для любых $\Psi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ и точки $(t,\gamma) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, в которой достигается локальный минимум разности $\Phi - \Psi$, справедливо неравенство

$$\partial_s\Psi + L_\gamma\Psi - \langle h, f(\kappa(u, \nabla\psi))\rangle \leqslant 0.$$

Определение 2. Функцию $\Phi \in C([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ назовём *вязкостным решением задачи (42)*, если она является как суб-, так и суперрешением задачи (42).

Определение 3. Функцию $u(s,x) \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ назовём *вязкостным решением задачи (1)*, если функция $\Phi(s,\gamma) = \langle h, u(s,x)\rangle$ является вязкостным решением задачи (42).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия C1, C3 и случайные процессы* $(\gamma(t), y(t), z(t))$ *удовлетворяют уравнениям (37), (38). Тогда функция* $y(s) = u(s,x)$ *непрерывна и является вязкостным решением задачи (1).*

Доказательство. Непрерывность функции $u(s,x)$ вытекает из среднеквадратичной непрерывности процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $y(t)$ относительно параметра x, которая, в свою очередь, вытекает из липшицевости коэффициентов уравнений (37), (38) и начальной функции $u_0(X)$.

Чтобы доказать, что $\Phi(t,\gamma) = \langle h, u(t,x)\rangle$ – вязкостное решение задачи (42), достаточно показать, что эта функция является как суб-, так и суперрешением этой задачи.

Для проверки того, что Φ является субрешением, выберем функцию $\Psi(t,\gamma) = \langle h, \psi(t,x)\rangle$ такую, чтобы точка (t,γ) являлась точкой максимума для разности $\Phi - \Psi$, и предположим, без потери общности, что $\Phi(t,\gamma) = \Psi(t,\gamma)$. Покажем, что, предположив справедливость неравенства

$$\partial_s \Psi + L_\gamma \Psi - \langle h, f(\kappa(u, \nabla\psi))\rangle < 0, \tag{43}$$

придём к противоречию.

Выберем положительный момент $\theta \leqslant T - t$ так, чтобы для всех $t \leqslant s \leqslant t+\theta$ и y таких, что $\|y - x\| \leqslant \theta$, была справедлива оценка $\Phi(s,\gamma) \leqslant \Psi(s,\gamma)$ и выполнялось неравенство (43). Обозначим

$$\tau = \inf_{s \geqslant t}\{\|\xi_{s,x}(t) - x\| \geqslant \theta\} \wedge (t+\theta),$$

рассмотрим пару процессов $(\bar{y}(s), \bar{z}(s))$, заданных соотношением

$$(\bar{y}(s), \bar{z}(s)) = (y(s\wedge\tau), I_{[0,\tau]}(r) z(s)), \quad t \leqslant s \leqslant t+\theta,$$

и заметим, что $(\bar{y}(s), \bar{z}(s))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\bar{y}(s) = \Phi(\tau, \gamma_{s,\gamma}(\tau)) + \int_s^{t+\theta} I_{[0,\tau]}(r)\langle h, f(\Phi(r,\gamma(r)), \bar{z}(r))\rangle\, dr - \int_s^{t+\theta} \bar{z}(r)\, dw(r), \quad t \leqslant s \leqslant t+\theta.$$

Рассмотрим также пару процессов $(\hat{y}(s), \hat{z}(s))$, заданных соотношением

$$(\hat{y}(s), \hat{z}(s)) = (\Psi(s, \gamma(s\wedge\tau)), I_{[0,\tau]}(s)\nabla\Psi(s,\gamma(s)) G^{\mathrm{T}}(\gamma(s))), \quad t \leqslant s \leqslant t+\theta.$$

Воспользовавшись формулой Ито, покажем, что пара $(\hat{y}(s), \hat{z}(s))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\hat{y}(t) = \Psi(\tau, \gamma_{s,\gamma}(\tau)) - \int_t^{t+\theta} I_{[0,\tau]}(r)(\partial_r\Psi + L_\gamma\Psi)(r,\gamma(r))\, dr - \int_t^{t+\theta} \langle \hat{z}(r), dW(r)\rangle.$$

Поскольку по определению $\Phi(s,\gamma) \leqslant \Psi(s,\gamma)$, то в силу выбора θ и τ из теоремы 6 следует, что $\bar{y}(s) < \hat{y}(s)$, откуда ввиду следствия к теореме 7 вытекает, что $\Phi(s,\gamma) < \Psi(s,\gamma)$. Пришли к противоречию.

Таким образом, показано, что $\Phi(s,\gamma)$ является вязкостным субрешением задачи (42). Аналогично проверяется, что $\Phi(s,\gamma)$ является вязкостным суперрешением задачи (42), откуда вытекает, что функция $\Phi(s,\gamma)$, заданная соотношением $\Phi(s,\gamma) = \langle h, u(s,x)\rangle = \langle h, y(s)\rangle$, является вязкостным решением этой задачи. При этом, по определению, $u(s,x)$ является вязкостным решением системы (1).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Научно-технологического университета “Сириус” и Российского научного фонда (проект 22-21-00016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. *McKean H.P.* A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations // Proc. of the National Academy of Sciences. 1966. V. 56. № 6. P. 1907–1911.
3. *Фрейдлин М.И.* Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональных пространствах // Функц. анализ и его приложения. 1967. Т. 3. С. 74–82.
4. *Belopolskaya Ya., Dalecky Yu.* Stochastic Equations and Differential Geometry. Dordrecht; Boston; London, 1990.
5. *Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л.* Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем при помощи марковских случайных процессов // Изв. вузов. Математика. 1978. Т. 12. С. 6–17.

6. *Белопольская Я.И.* Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к математической физике и финансовой математике. СПб., 2019.
7. *Белопольская Я.И.* Вероятностная интерпретация метода исчезающей вязкости для систем законов сохранения и баланса // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 3. С. 338–351.
8. *Liu W., Yang Y., Lu G.* Viscosity solutions of fully nonlinear parabolic system // J. of Math. Anal. and Appl. 2003. V. 281. № 1. P. 362–381.
9. *Huang H.* The Cauchy problem for fully nonlinear parabolic systems on manifolds // arXiv:1506.05030. 2015.
10. *Pardoux E., Peng S.* Adapted solution of a backward stochastic differential equation // Systems & Control Lett. 1990. V. 14. P. 55–61.
11. *Pardoux E., Peng S.* Backward SDE's and quasilinear parabolic PDE's // Stochastic PDE and Their Applications. LNCIS, 1992. V. 176. P. 200–217.
12. *Pardoux E.* Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order // Stochastic Analysis and Related Topics. V. 4. Geilo, 1996. Progr. Probab. V. 42. Boston, 1998. P. 79–127.
13. *Khasminskii R.Z., Zhu C., Yin G.* Stability of regime-switching diffusions // Stochastic Proc. and their Appl. 2007. V. 117. P. 1037–1051.
14. *Zhu C., Yin G.* Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications. New York, 2010.
15. *Belopolskaya Ya.* Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems // Modern Stochastics and Applications. Springer Optimization and its Applications. 2014. V. 90. P. 71–94.
16. *Belopolskaya Ya., Woyczynski W.* Probabilistic approach to viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of fully nonlinear parabolic equations // J. Math. Sci. 2013. V. 188. № 6. P. 655–672.
17. *Talay D., Tomašević M.* A new stochastic interpretation of Keller–Segel equations: the 1-D case // Bernoulli. 2020. V. 26. № 2. P. 1323–1353.
18. *Белопольская Я.И.* Марковские процессы и уравнения магнитогидродинамики // Зап. науч. семинаров ПОМИ. Сер. Вероятность и статистика. 2019. Т. 28. С. 7–34.
19. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. М., 2003.

Университет "Сириус", г. Сочи,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
имени В.А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 20.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.