ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1624–1632

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.2

КОРРЕКТНОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТРИКАМИ

© 2022 г. А. М. Бирюков

Изучается задача Коши для общих линейных систем комплексных дифференциальных уравнений с частными производными в банаховых пространствах целых вектор-функций с интегральными метриками. Тип экспоненциального роста решения задачи и правой части системы дифференциальных уравнений по переменной z может зависеть определённым образом от другой переменной t. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых данная задача является корректно разрешимой в заданной шкале функциональных пространств. Следовательно, дано описание структуры систем дифференциальных уравнений, задача Коши для которых является корректной.

DOI: 10.31857/S0374064122120044, EDN: NCBSFO

В предлагаемой работе рассматривается задача Коши для систем комплексных линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t,z,D)u = h(t,z), \quad t,z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$u(t_0, z) = \varphi(z), \tag{2}$$

где $A(t,z,D)$ – матричный дифференциальный или функциональный оператор.

Решения задачи (1), (2) ищутся в пространствах Харди–Лебега с весом целых по переменной z и аналитических по переменной t при $|t-t_0| < \delta$ вектор-функций $u(t,z)$. Функции из указанных пространств могут допускать рост экспоненциального типа на бесконечности по переменной z, при этом тип экспоненциального роста зависит определённым образом от временно́й переменной t. Ограничения на порядок $q \geqslant 1$, $q \in \mathbb{N}$, и тип роста задаются с помощью веса.

Ранее в работе [1, с. 48–70] были получены необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа с супремум-нормами. Оказывается, что условия для корректности задачи Коши в случаях пространств с интегральными метриками и с супремум-нормами совпадают.

В статье [2] была рассмотрена задача Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа в случае, когда тип роста решения по переменной z не зависел от временно́й переменной t и были получены необходимые и достаточные условия корректности в данной шкале функциональных пространств. В настоящей работе при рассмотрении задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций вектор-экспоненциального типа в случае, когда тип экспоненциального роста решения зависит определённым образом от временно́й переменной t, существенно расширяется класс систем дифференциальных уравнений, для которых имеет место корректность поставленной задачи Коши за счёт того, что условия на коэффициенты дифференциального оператора, необходимые и достаточные для разрешимости в данной шкале функциональных пространств, получаются более мягкими. В частности, если рассматривать задачу Коши для комплексного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t,z)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(t,z), \quad u(t_0,z) = \varphi(z),$$

то в случае гауссовой шкалы (порядок q роста решения по переменной z равен двум) задача Коши будет корректной тогда и только тогда, когда $a(t,z)\equiv 0,$ если тип роста решения не зависит от переменной $t,$ и задача Коши будет корректной тогда и только тогда, когда $a(t,z)$-произвольная аналитическая функция, не зависящая от $z,$ если тип роста решения зависит определённым образом от $t.$

Отметим, что в работе [3] задача Коши была изучена в шкалах более быстрого роста по $z,$ чем конечного экспоненциального порядка. А в случае порядка экспоненциального роста $0<q<1$ вопрос о корректности задачи Коши был исследован в статье [4].

Главное отличие настоящей работы от известных автору исследований по аналитической разрешимости задачи Коши состоит в том, что, во-первых, в качестве пространств решений используются банаховы пространства с интегральными метриками, и, во-вторых, область определения решения совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений.

В этой работе будут получены условия на коэффициенты дифференциального оператора, выполнение которых равносильно корректной разрешимости задачи Коши (1), (2) в шкале пространств функций экспоненциального типа по переменной $z.$

Для установления основного результата отметим несколько лемм об интегральных свойствах аналитических функций, которые, возможно, имеют самостоятельный интерес.

Перейдём к точным формулировкам. Будем пользоваться следующими обозначениями: $t,z\in\mathbb{C}$ – комплексные переменные; $N\geqslant 1,$ $q\geqslant 1$ – натуральные числа; $p\geqslant 1,$ $R>0,$ $\sigma>0$ – вещественные числа, $m=(m_1,\ldots,m_N)$ – вектор с натуральными координатами $m_j\geqslant 1,$ $j=\overline{1,N}.$

В области $V=G_t\times C,$ где G_t – произвольная область на комплексной плоскости $t,$ рассмотрим задачу Коши (1), (2), в которой $A(t,z,D)$ – матрица дифференциальных операторов конечного порядка, каждый элемент которой действует на скалярную функцию $u(t,z)$ по правилу

$$A_{ij}(t,z,D)u=\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(t,z)D^{\alpha}u(t,z),$$

где $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ – аналитические в области V коэффициенты. Здесь и далее через $D^{\alpha}u(t,z)$ обозначаем частную производную функции $u(t,z)$ по переменной z порядка $\alpha.$ Таким образом, i-е уравнение в системе (1) имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,z)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(t,z)D^{\alpha}u_j(t,z)+h_i(t,z),\quad i=\overline{1,N}.$$

Введём следующие функциональные пространства: $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$ – пространство целых вектор-функций $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\ldots,\varphi_N(z)),$ для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{m,R,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\|\varphi_j\|_{m_j,R,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\sup_{0<r<+\infty}\bigg[\bigg(\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_j(re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p}(1+r)^{-m_j}\exp\{-Rr^q\}\bigg].$$

Решение задачи Коши (1), (2) будем искать в пространстве $\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})(t_0)$ целых по z и аналитических по t при $|t-t_0|<\delta$ вектор-функций $u(t,z)=(u_1(t,z),\ldots,u_N(t,z)),$ для которых конечна норма

$$\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}=\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sup_{|t-t_0|<\delta}\bigg[\sup_{0<r<+\infty}\bigg(\bigg(\int\limits_0^{2\pi}|u_j(t,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p}(1+r)^{-m_j}\exp\{-(R+\sigma|t-t_0|)r^q\}\bigg)\bigg].$$

Заметим, что функции из введённых пространств допускают рост экспоненциального типа на бесконечности по переменной z, при этом тип роста зависит от переменной t. Также можно показать, используя утверждение из [5, с. 46] о свойстве голоморфных функций комплексного переменного, что введённые функциональные пространства являются банаховыми пространствами.

Определение. Будем говорить, что задача (1), (2) *локально корректна* в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}$, если для любой точки $t_0 \in G_t$ и любого $R > 0$ найдутся такие числа $\delta > 0$, $\sigma > 0$, что для любой начальной вектор-функции $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(\mathrm{C})$ и любой правой части $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q,R,\sigma,q;p})(t_0)$ системы (1) существует единственное решение задачи (1), (2) $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})(t_0)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \leqslant M(\|\varphi\|_{m,R,q;p} + \|h\|_{\delta;m+q,R,\sigma,q;p}),$$

где $M > 0$ – постоянная, ограниченная при ограниченных значениях R.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы в виде следующей теоремы.

Теорема. *Задача (1), (2) локально корректна в шкале* $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ *– суть полиномы по* z;

2) степени этих полиномов удовлетворяют неравенствам

$$\deg a_{ij}^{\alpha}(t,z) \leqslant m_i - m_j - \alpha(q-1) + q, \tag{3}$$

причём если правая часть неравенства (3) получается отрицательной, то по определению считаем $a_{ij}^{\alpha}(t,z) \equiv 0$, *а его степень* $\deg a_{ij}^{\alpha}(t,z) = -\infty$.

В доказательстве достаточности условий (3) используется следующая лемма об оценке нормы производной целой функции через норму самой функции. Эту и все леммы в дальнейшем для упрощения записи будем формулировать для случая $N = 1$.

Лемма 1 [6]. *Пусть функция* $v(z) \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$. *Тогда* $Dv(z) \in \mathrm{Exp}_{m+(q-1),R,q;p}(C)$, *причём*

$$\|Dv\|_{m+(q-1),R,q;p} \leqslant C\exp\{R2^q\}\|v\|_{m,R,q;p},$$

где $C > 0$ *– постоянная, зависящая только от* m *и* q.

Лемма 2 [6]. *Пусть функция* $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q,R,\sigma,q;p})$. *Тогда функция* $\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ *и справедливо неравенство*

$$\Big\|\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau\Big\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \leqslant 2^q\max\{\delta, 1/\sigma\}\|h\|_{\delta;m+q,R,\sigma,q;p}.$$

Докажем сначала достаточность условий (3) основной теоремы 1. Запишем интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное исходной задаче (1), (2) (без ограничения общности рассматриваем случай $t_0 = 0$, доказательство для $t_0 \neq 0$ сводится к случаю $t_0 = 0$ формальным сдвигом $t \to t - t_0$)

$$u(t,z) = \int_0^t A(\tau,z,D)u(\tau,z)\,d\tau + \varphi(z) + \int_0^t h(\tau,z)\,d\tau, \tag{4}$$

где интегрирование проводится по отрезку, соединяющему точки 0 и t.

Покажем, что оператор

$$(Bu)(t,z) = \int_0^t A(\tau,z,D)u(\tau,z)\,d\tau$$

определён в пространстве $\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ и является сжимающим, если $\delta>0$ достаточно мало, а $\sigma>0$, напротив, достаточно велико. Для этого рассмотрим i-ю компоненту, $i=\overline{1,N}$:

$$(Bu)_i(t,z)=\int\limits_0^t\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^\alpha(\tau,z)D^\alpha u_j(\tau,z)\,d\tau.$$

Отсюда видно, что справедливо неравенство

$$|(Bu)_i(t,z)|\leqslant\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}\int\limits_0^{|t|}C(1+|z|)^{n_{ij}^\alpha}|D^\alpha u_j(\tau,z)|\,d|\tau|,$$

где n_{ij}^α – степень многочлена $a_{ij}^\alpha(t,z)$. Поэтому имеет место оценка

$$|(Bu)_i(t,re^{i\theta})|^p\leqslant C^p(a_{ij}^\alpha,N,m_{ij})\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(1+r)^{n_{ij}^\alpha p}\bigg(\int\limits_0^{|t|}|D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|\,d|\tau|\bigg)^p.$$

Для краткости записи обозначим

$$I\equiv\bigg(\int\limits_0^{2\pi}|(Bu)_i(t,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C(a_{ij}^\alpha,N,m_{ij})\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(1+r)^{n_{ij}^\alpha}\bigg(\int\limits_0^{2\pi}\bigg(\int\limits_0^{|t|}|D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|\,d|\tau|\bigg)^p d\theta\bigg)^{1/p}.$$

Применив теперь обобщённое неравенство Минковского, получим

$$I\leqslant C(a_{ij}^\alpha,N,m_{ij})\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(1+r)^{n_{ij}^\alpha}\int\limits_0^{|t|}\bigg(\int\limits_0^{2\pi}|D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p}d|\tau|.$$

Так как вектор-функция $u\in\vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, то $u_j(\tau,\cdot\,)\in\mathrm{Exp}_{m_j,R+\sigma|\tau|,q;p}(\mathrm{C})$, а значит, в силу леммы 1 $D^\alpha u_j(\tau,\cdot\,)\in\mathrm{Exp}_{m_j+|\alpha|(q-1),R+\sigma|\tau|,q;p}(\mathrm{C})$ и справедливо неравенство

$$\bigg(\int\limits_0^{2\pi}|D^\alpha u_j(\tau,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\|D^\alpha u_j(\tau,\cdot\,)\|_{m_j+|\alpha|(q-1),R+\sigma|\tau|,q;p}(1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)}\exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\leqslant$$

$$\leqslant C(q,m_{ij},m)\exp\{Rm_{ij}2^q\}\|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p}(1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)}\exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}.$$

Возвращаемся к оценке выражения для интеграла I:

$$I\leqslant C(a_{ij}^\alpha,N,m_{ij})\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(1+r)^{n_{ij}^\alpha}\times$$

$$\times\int\limits_0^{|t|}C(q,m_{ij},m)\exp\{Rm_{ij}2^q\}\|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p}(1+r)^{m_j+|\alpha|(q-1)}\exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\,d|\tau|.$$

Обозначив $\tilde{m} = \max m_{ij}$ и использовав условие (3) теоремы, имеем

$$I \leqslant C(a_{ij}^{\alpha}, N, m_{ij}, q, m) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} (1+r)^{m_i+q} \|u_j\|_{\delta;m_j,R,\sigma,q;p} \int\limits_0^{|t|} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\, d|\tau| \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i+q} \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \int\limits_0^{|t|} \exp\{(R+\sigma|\tau|)r^q\}\, d|\tau|.$$

Вычислим интеграл, рассмотрев отдельно два случая:
1) $0 < r \leqslant 1$:

$$I \leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i} 2^q \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \exp\{(R+\sigma|t|)r^q\}\delta;$$

2) $r > 1$:

$$I \leqslant C \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i+q} \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \exp\{Rr^q\} \frac{1}{\sigma r^q} \exp\{\sigma|t|r^q\} \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{\sigma} \exp\{R\tilde{m}2^q\}(1+r)^{m_i} \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \exp\{(R+\sigma|t|)r^q\}.$$

Таким образом, для любого $r : 0 < r < +\infty$ и для любого $t : |t| < \delta$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |(Bu)_i(t, re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} (1+r)^{-m_i} \exp\{-(R+\sigma|t|)r^q\} \leqslant C \max\left(\delta, \frac{1}{\sigma}\right) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p},$$

где $C > 0$ – постоянная, зависящая от коэффициентов a_{ij}^{α}, N, m_{ij}, m, q. Важно отметить, что C не зависит от R, σ и δ. Из последнего неравенства и следует, что $(Bu)_i(t,z) \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m_i,R,\sigma,q;p})$, а значит, $(Bu)(t,z) \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, причём справедлива оценка

$$\|Bu\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p} \leqslant C \max(1/\sigma, \delta) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}.$$

Выберем σ достаточно большим и δ достаточно малым так, чтобы

$$C \max(1/\sigma, \delta) \exp\{R\tilde{m}2^q\} \leqslant 1/2.$$

Тогда оператор B будет сжимающим в пространстве $\vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$. Если $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, то включение $\varphi \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ очевидно. Далее, если $h \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m+q,R,\sigma,q;p})$, то включение $\int_0^t h(\tau,z)\, d\tau \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ следует из леммы 2. Поэтому существует единственное решение уравнения (4), а значит, и задачи (1), (2) $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, и для него справедлива оценка из приведённого выше определения локальной корректности задачи Коши (1), (2). Тем самым достаточность условий (3) теоремы доказана.

Замечание. Из проведённого доказательства следует, что "время жизни" $\delta > 0$ комплексного решения $u(t,z)$ зависит от R непрерывно. В частности, при ограниченных значениях $R \leqslant R_0$ постоянные $\delta > 0$, $\sigma > 0$ можно выбрать не зависящими от R.

Докажем теперь необходимость условий (3), т.е. будем считать, что задача Коши (1), (2) является локально корректной в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}$. Покажем, что в этом случае $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$ – суть полиномы по z, степени которых удовлетворяют неравенствам (3). В доказательстве необходимости условий (3) также будем использовать леммы о свойствах аналитических функций. Вначале сформулируем лемму, являющуюся обобщением известной теоремы Лиувилля.

Лемма 3 [6]. *Пусть* $v(z)$ *– целая функция и существует число* $M > 0$ *такое, что для любого* $r > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left(\int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p} \leqslant M(1+r)^m.$$

Тогда $v(z)$ *– полином, степень которого не превосходит* m.

Лемма 4 [6]. *Пусть функция* $u(t,z) \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$. *Тогда функция*

$$u_t'(0,z) \in \mathrm{Exp}_{m+q,R,q;p}(C)$$

и справедливо неравенство

$$\|u_t'(0,\cdot)\|_{m+q,R,q;p} \leqslant \frac{\max\{1,\sigma\}e^\delta}{\delta}\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}.$$

Лемма 5 [2]. *Функция* $v(z) = z^{m+s}\exp\{Rz^q\}$, s *– целое, принадлежит пространству* $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, *если* $s \leqslant q/(2p)$, *и не принадлежит* $\mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, *если* $s > q/(2p)$.

Вернёмся теперь к доказательству необходимости условий (3) теоремы. Считаем, что задача (1), (2) локально корректна в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}(C)$. Сначала установим, что коэффициенты $a_{ij}^\alpha(t,z)$ – полиномы по z, используя метод математической индукции, а затем уточним степени этих полиномов.

Положим $t_0 = 0$, $R \in (0,1]$ – произвольное. Из условия локальной корректности найдём $\delta > 0$, $\sigma > 0$, которые от выбора R не зависят. Зафиксируем $j = \overline{1,N}$ – любое. В качестве начальной вектор-функции возьмём $\varphi(z) = (\varphi_1(z),\ldots,\varphi_N(z))$, где $\varphi_i(z) \equiv 0$ при $i \neq j$, $\varphi_j(z) = 1$. Заметим, что $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$, причём $\|\varphi\|_{m,R,q;p} \leqslant (2\pi)^{1/p}$. В качестве правой части системы (1) положим $h(t,z) \equiv 0$. Для решения $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ задачи Коши (1), (2) с выбранной начальной вектор-функцией φ и правой частью системы h справедливы равенства

$$a_{ij}^0(0,z) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(0,z), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Полагая $z = re^{i\theta}$, где $r = R^{-1/q}$, в силу леммы 4 будем иметь следующие неравенства:

$$\left(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^0(0,re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p} \leqslant \left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\cdot)\right\|_{m_i+q,R,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\{1,\sigma\}}{\delta}e^\delta\|u\|_{\delta;m,R,\sigma,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\{1,\sigma\}}{\delta}e^\delta M(2\pi)^{1/p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q},$$

где $M_1 > 0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит, $i,j = \overline{1,N}$. Поэтому из леммы 3 следует, что все функции $a_{ij}^0(0,z)$ – полиномы, степени которых не превосходят $m_i + q$.

Предположим теперь, что для всех $\alpha = \overline{0,k-1}$ $a_{ij}^\alpha(0,z)$ – полиномы и имеют место неравенства $\deg a_{ij}^\alpha(0,z) \leqslant m_i + q + \alpha$. Докажем, что $a_{ij}^k(0,z)$ также полиномы степени не выше $m_i + q + k$, $k \in \mathbb{N}$.

Сначала рассмотрим случай $k \leqslant m_j$. Полагаем $t_0 = 0$, $R \in (0,1]$ – произвольное. Из условия локальной корректности задачи Коши (1), (2) найдём $\delta > 0$, $\sigma > 0$, которые от выбора $R \in (0,1]$ не зависят. Теперь начальную вектор-функцию определим по правилу

$$\varphi(z) = (0,\ldots,0,\varphi_j(z),0,\ldots,0), \quad \varphi_j(z) = z^k.$$

Заметим, что $\|\varphi\|_{m,R,q;p} \leqslant (2\pi)^{1/p}$. В качестве правой части системы (1) снова возьмём вектор-функцию $h(t,z) \equiv 0$. Для соответствующего решения задачи Коши (1), (2) вектор-функции $u \in \vartheta(\delta; \mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$ справедливы равенства

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,z) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} a_{ij}^{\alpha}(0,z)k(k-1)\cdots(k-\alpha+1)z^{k-\alpha} + a_{ij}^{k}(0,z)k!, \quad i = \overline{1,N}. \tag{5}$$

В силу предположения математической индукции для всех α таких, что $0 \leqslant \alpha \leqslant k-1$, имеют место оценки

$$|a_{ij}^{\alpha}(0,z)| \leqslant C(a_{ij}^{\alpha})(1+|z|)^{m_i+q+\alpha}.$$

Тогда, используя утверждение леммы 4 и обобщённое неравенство Минковского, получаем

$$\bigg(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^{k}(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p} \leqslant \bigg\|\frac{\partial u_i}{\partial t}(0,\cdot)\bigg\|_{m_i+q,R,q;p}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} + C(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $C>0$ – постоянная, зависящая только от a_{ij}^{α}, m_{ij} и p. Положим в последнем неравенстве $r = R^{-1/q}$. Из оценки в утверждении леммы 4 следует, что

$$\bigg(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^{k}(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $M_1 > 0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит. Следовательно, для любого $r \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\bigg(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^{k}(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

которое в силу леммы 3 и означает, что все функции $a_{ij}^{k}(0,z)$ – полиномы степени не выше m_i+q+k при $k \leqslant m_j$.

Пусть теперь $k \geqslant m_j+1$. Задаём произвольное значение $R \in (0,1]$. Так как задача Коши (1), (2) локально корректна, то найдутся константы $\delta>0$, $\sigma>0$, которые от выбора R не зависят. Начальную вектор-функцию определим по правилу

$$\varphi(z) = (0,\ldots,0,\varphi_j(z),0,\ldots,0), \quad \varphi_j(z) = z^k,$$

а в правой части системы (1) положим $h(t,z) \equiv 0$. Как показывают вычисления и оценки интегралов, и в этом случае $\varphi \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{m,R,q;p} \leqslant (2\pi)^{1/p}\frac{C}{R^{(k-m_j)/q}}$$

для любого $r>0$, где $C>0$ зависит только от k, m_j и q.

Решение задачи Коши (1), (2) с данной начальной вектор-функцией и нулевой правой частью удовлетворяет равенствам (5). Применяя к равенствам (5) обобщённое неравенство Минковского и утверждение леммы 4, получаем следующие оценки для всех $i,j = \overline{1,N}$:

$$\bigg(\int_0^{2\pi} |a_{ij}^{k}(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\{1,\sigma\}e^{\delta}}{\delta} M \frac{C(p,k,m_j,q)}{R^{(k-m_j)/q}}(1+r)^{m_i+q}\exp\{Rr^q\} + C(p,a_{ij}^{\alpha},m_{ij})(1+r)^{m_i+q+k}.$$

В последнем неравенстве положим $r = R^{-1/q}$. Теперь имеем

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} |a_{ij}^k(0,re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqslant M_1(1+r)^{m_i+q+k},$$

где $M_1 > 0$ – постоянная, которая от выбора R не зависит. Поэтому в силу леммы 3 все функции $a_{ij}^k(0,z)$, $i,j = \overline{1,N}$, являются полиномами степени не выше m_i+q+k и для случая $k \geqslant m_j+1$.

Таким образом, установлено, что все коэффициенты дифференциального оператора системы (1) являются полиномами по переменной z. Более точно, все функции $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$ имеют следующий вид:

$$a_{ij}^{\alpha}(0,z) = a_0^{i,j,\alpha} + a_1^{i,j,\alpha}z + a_2^{i,j,\alpha}z^2 + \ldots + a_{m_i+q+\alpha}^{i,j,\alpha}z^{m_i+q+\alpha}, \quad i,j=\overline{1,N}, \quad \alpha=\overline{0,m_{ij}}.$$

Уточним теперь степени этих полиномов. Вновь полагаем $t_0 = 0$, значения R будем последовательно перебирать: $R = \overline{1, m_{ij}+1}$. В качестве начальной вектор-функции возьмём

$$\varphi_R(z) = (0,\ldots,0,\varphi_{Rj}(z),0,\ldots,0), \varphi_{Rj}(z) = z^{m_j+[q/(2p)]}\exp\{Rz^q\}.$$

Заметим, что в силу леммы 5 вектор-функция $\varphi_R(z) \in \mathrm{Exp}_{m,R,q;p}(C)$. В качестве правой части системы (1) возьмём $h(t,z) \equiv 0$.

Так как задача Коши (1), (2) является локально корректной в шкале $\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p}(C)$, то существует единственное решение этой задачи $u_R(t,z) \in \vartheta(\delta;\mathrm{Exp}_{m,R,\sigma,q;p})$, для которого справедливо равенство

$$\frac{\partial u_{Ri}}{\partial t}(0,z) = \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(0,z)D^{\alpha}\varphi_{Rj}(z).$$

Вычислив производные функций $\varphi_{Rj}(z)$, получим следующие равенства для любого $\alpha = \overline{0,m_{ij}}$:

$$D^{\alpha}\varphi_{Rj}(z) = (Rq)^{\alpha}z^{m_j+[q/(2p)]+\alpha(q-1)}\exp\{Rz^q\} + \ldots$$

(записано только слагаемое, которое содержит в качестве множителя переменную z в максимальной степени, т.е. $z^{m_j+[q/(2p)]+\alpha(q-1)}$). Следовательно, решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial u_{Ri}}{\partial t}(0,z) = z^{m_j+[q/(2p)]-m_{ij}}\exp\{Rz^q\} \times$$

$$\times \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}[(a_0^{i,j,\alpha} + a_1^{i,j,\alpha}z + \ldots + a_{m_i+q+\alpha}^{i,j,\alpha}z^{m_i+q+\alpha})((Rq)^{\alpha}z^{m_{ij}+\alpha(q-1)} + \ldots)]. \qquad (6)$$

В силу леммы 4 функция, стоящая в левой части равенства (6), принадлежит пространству $\mathrm{Exp}_{m_i+q,R,q;p}(C)$, поэтому функция, стоящая в правой части (6), тоже должна принадлежать данному классу. Исходя из этого, получим условия на коэффициенты многочленов $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$.

Отметим, что в правой части равенства (6) под знаком суммы стоит многочлен, степень которого не превосходит $m_i + m_{ij} + m_{ij}q + q$. Будем задавать значения параметра s от $m_i + m_{ij}(q+1) + q$ до $m_i + q - m_j + m_{ij} + 1$ (включительно), последовательно уменьшая значение параметра на единицу. При каждом значении s в силу леммы 5 получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов $a_{ij}^{\alpha}(0,z)$ следующего вида:

$$\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}(Rq)^{\alpha}a_{s-m_{ij}-\alpha(q-1)}^{i,j,\alpha} = 0, \quad R = \overline{1,m_{ij}+1}.$$

Определитель матрицы этой системы линейных алгебраических уравнений не равен нулю, так как является определителем Вандермонда, а значит, сама система имеет только тривиальное решение. Поэтому справедливы равенства $a^{i,j,\alpha}_{s-m_{ij}-\alpha(q-1)}=0$ при любых $\alpha=\overline{0,m_{ij}}$, $s\geqslant m_i+q-m_j+m_{ij}+1$ или, что то же самое, $a^{i,j,\alpha}_k=0$ для $k\geqslant m_i-m_j-\alpha(q-1)+q+1$. Последние равенства и означают, что $\deg a^{\alpha}_{ij}(0,z)\leqslant m_i-m_j-\alpha(q-1)+q$, $i,j=\overline{1,N}$, $\alpha=\overline{0,m_{ij}}$. Необходимость условий (3) доказана.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши в комплексной области. М., 1996.
2. *Бирюков А.М.* Необходимые и достаточные условия разрешимости комплексной задачи Коши в классах функций вектор-экспоненциального типа // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1055–1064.
3. *Chin Ngok Min.* Linear differential infinite degree operator and its applications // Acta Math. Vietnamica. 1987. V. 12. № 1. P. 101–124.
4. *Одиноков О.В.* О корректности задачи Коши для операторов с гладкими символами// Изв. АН Армянской ССР. 1988. Т. 23. № 1. С. 65–75.
5. *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М., 1964.
6. *Бирюков А.М.* О корректности аналитической задачи Коши в классах целых функций конечного порядка // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1336–1350.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 19.06.2022 г.
После доработки 07.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.