ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1633–1644

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ

© 2022 г. Д. К. Дурдиев

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Прямая задача представляет собой аналог задачи Трикоми для этого уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. В обратной задаче неизвестным является переменный коэффициент при младшем члене в гиперболическом уравнении. Для его определения исследована обратная задача, когда относительно решения, определяемого в гиперболической части области прямой задачи, задаётся условие переопределения на характеристиках: на одной – значение нормальной производной, а на другой – значение самой функции. Доказаны теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

DOI: 10.31857/S0374064122120056, EDN: NCCOHF

1. Постановка задачи. Пусть задана конечная открытая область $\Omega_T\subset\mathbb{R}^2$, ограниченная при $y>0$ отрезками AB, BC, CD, где $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(T,1)$, $D(T,0)$, T – фиксированное положительное число, а при $y<0$ – характеристиками AE $(x+y=0)$ и DE $(x-y=T)$ уравнения

$$Lu=\begin{cases}u_x-u_{yy}=0, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}-q(x)u=0, & y<0.\end{cases}\tag{1}$$

Уравнение (1) – смешанного параболо-гиперболического типа. Для него линия изменения типа $y=0$ не является характеристикой (параболическое вырождение первого рода [1, с. 258]).

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$u|_{AB}=\varphi(y),\quad u|_{BC}=0,\tag{2}$$

$$u|_{AE}=\psi(x),\quad x\in[0,T/2],\tag{3}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Обозначим

$$\Omega_{1T}:=\Omega_T\bigcap\{0<y\leqslant 1\},\quad \Omega_{2T}:=\Omega_T\bigcap\{-T/2\leqslant y<0\}.$$

Определение. *Решением задачи* (1)–(3) назовём функцию $u(x,y)$ из класса

$$C^1(\overline{\Omega}_T)\bigcap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})\bigcap C^2(\Omega_{2T}),$$

удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В **обратной задаче** предполагается неизвестным коэффициент $q(x)$ уравнения (1) и требуется определить его по следующим дополнительным условиям относительно решения прямой задачи, заданным на характеристиках AE и DE:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\vec n}\right|_{AE}=\psi_1(x),\quad x\in[0,T/2],\quad u|_{DE}=\psi_2(x),\quad x\in[T/2,T],\tag{4}$$

где $\vec n=(1,1)$ – вектор нормали к AE, внутренней по отношению к области Ω_{2T}, а $\psi_i(x)$, $i=1,2$, – заданные функции.

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

$(B1)$: $(B1)_1$ $\varphi(y) \in C^3[0,1]$, $(B1)_2$ $\psi(x) \in C^2[0,T/2]$;

$(B2)$: $(B2)_1$ $\varphi(0) = \psi(0)$, $(B2)_2$ $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $(B2)_3$ $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi''(1) = 0$, $(B2)_4$ $\psi'(0) = 0$, $(B2)_5$ $|\psi(x)| \geqslant \psi_0 > 0$, $\psi_0 = \mathrm{const}$, $x \in [0,T/2]$;

$(B3)$: $(B3)_1$ $\psi_1(x) \in C^1[0,T/2]$, $(B3)_2$ $\psi_2(x) \in C^2[T/2,T]$;

$(B4)$: $(B4)_1$ $\psi(T/2) = \psi_2(T/2)$, $(B4)_2$ $\psi_1(T/2) = \psi_2'(T/2)$, $(B4)_3$ $|\psi_2(x)| \geqslant \psi_{00} > 0$, $\psi_{00} = \mathrm{const}$, $x \in [T/2,T]$.

Важность рассмотрения уравнений смешанного типа, когда уравнение в одной части области имеет параболический тип, а в другой – гиперболический, впервые была указана И.М. Гельфандом в 1959 г. [2]. Изучение электрических колебаний в проводах приводит к задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В однородной среде, в случае её малой проводимости, напряжённость электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости, когда можно перенебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, упомянутая величина удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. [3, с. 443–447]). Другим примером может служить явление движения жидкости в канале, окруженном пористой средой; так, в канале гидродинамическое давление жидкости удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде – уравнению фильтрации, которое в данном случае совпадает с уравнением диффузии [4, с. 74–86]. В этом случае на границе канала выполняются некоторые условия согласования. Уравнения такого типа также возникают и во многих других областях естествознания.

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами в областях, где гиперболическая часть представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками $y+x=0$, $y-x=1$ и характеристической линией изменения типа $x=0$ [5–11] (см. также библиографию в [8, 9]). Методы решения прямых и обратных задач, связанные с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений параболо-гиперболического типа и неизвестной правой части (линейная задача) этого уравнения в прямоугольной области, были предложены в монографии [12] (см. также библиографию в ней). Среди работ по исследованию начально-краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа $t=0$ отметим работы [13–16], в которых исследовались задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями.

Насколько нам известно, обратная коэффициентная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа исследуется в данной работе впервые. Отметим, что различные обратные задачи для классических типов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка изучены достаточно полно (см., например, монографии [17–22] и приведённую там обширную библиографию).

Изучение обратных задач требует исследования дифференциальных свойств решений прямых задач. Особенно ярко это проявляется в коэффициентных обратных задачах (нелинейных задачах), где для получения теорем о разрешимости необходимо внимательно следить за точной зависимостью дифференциальных свойств решений прямой задачи от гладкости коэффициентов и других данных задачи.

2. Исследование прямой задачи. В этом пункте будет исследована прямая задача (1)–(3). Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (B1), (B2) и* $q(x) \in C[0,T]$. *Тогда существует в области* Ω_T *единственное решение прямой задачи (1)–(3).*

Доказательство. Предположим, что функция $q(x)$ известна и $q(x) \in C[0,T]$. Введём обозначения $\tau(x) := u(x,0)$, $\nu(x) := \dfrac{\partial}{\partial y}u(x,0)$. Тогда решение уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = F(x,y)$$

в области Ω_{2T}, согласно формуле Даламбера, записывается в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(s)ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0} F(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_{2T}. Перенесём член, содержащий произведение $q(y)u$, в правую часть равенства и, использовав формулу (5), получим интегральное уравнение для функции $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x+y)+\tau(x-y)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi. \tag{6}$$

С учётом (3) и $\tau(0)=\psi(0)$ из равенства (6) получим

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[\psi(0)+\tau(2x)]-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x}q(\xi)\int\limits_{-x+|\xi-x|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi,\quad x\in[0,T/2]. \tag{7}$$

Продифференцировав это равенство, имеем

$$\tau'(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+\nu(x)+\int\limits_{x/2}^{x}q(\xi)u(\xi,-x+\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,T]. \tag{8}$$

Равенства (7) и (8) можно условно назвать основными соотношениями для функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Введём обозначения

$$G_k(x-\xi,y,\eta)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right)+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right)\right],\quad k=1,2.$$

Используя функцию Грина $G_1(x-\xi,y,\eta)$ первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1T}, решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD}=\tau(x)$ представим в виде

$$u(x,y)=\int\limits_{0}^{1}G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int\limits_{0}^{x}G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Отметим, что функции $G_k(x-\xi,y,\eta)$, $k=1,2$, имеют эквивалентные представления

$$G_1(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-(n\pi)^2(x-\xi)]\sin(n\pi y)\sin(n\pi\eta),$$
$$G_2(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-(n\pi)^2(x-\xi)]\cos(n\pi y)\cos(n\pi\eta)$$

и являются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_{1T} [3, с. 200–204].

Найдём производные правой части (9), используя легко проверяемые соотношения

$$G_{1y}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2\eta}(x-\xi,y,\eta),$$
$$G_{1\eta}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2y}(x-\xi,y,\eta),\quad G_{2\xi}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2yy}(x-\xi,y,\eta). \tag{10}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_{0}^{1}G_{1y}(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=-\int\limits_{0}^{1}G_{2\eta}(x,y,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta=$$
$$=G_2(x,y,0)\varphi(0)-G_2(x,y,1)\varphi(1)+\int\limits_{0}^{1}G_2(x,y,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta.$$

Используя (10) и интегрируя по частям, вычислим производную по y второго слагаемого в правой части формулы (9):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi = -\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{2y}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x G_{2\xi}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)\,d\xi = -G_2(x,y,0)\tau(0) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,y,0)\tau'(\xi)\,d\xi.$$

С учётом этих соотношений дифференцируем теперь (9) по y и полагаем $y=0$. Так как $(\partial/\partial y)u(x,0)=\nu(x)$, то ввиду условий согласования $(B2)_1$ находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённое из параболической части:

$$\nu(x) = \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\tau'(\xi)\,d\xi, \quad x\in[0,T]. \tag{11}$$

Заметим, что для функции $G_2(x-\xi,0,0)$ имеет место представление

$$G_2(x-\xi,0,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}} + \frac{2}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right). \tag{12}$$

Отсюда следует, что функция $G_2(x-\xi,0,0)$ имеет слабо полярную особенность.

Исключив функцию $\tau(x)$ в (6) с помощью равенства (7), а $\tau'(x)$ в (11) с помощью (8), получим систему интегральных уравнений для функций $u(x,y)$, $\nu(x)$:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \int\limits_0^{x+y}\nu(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}q(\xi)\int\limits_{-(x+y)/2+|\xi-(x+y)/2|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-y}q(\xi)\int\limits_{-(x-y)/2+|\xi-(x-y)/2|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)\int\limits_{y+|\xi-x|}^{0}u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{13}$$

$$\nu(x) = \nu_0(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\int\limits_{\xi/2}^{\xi}q(\eta)u(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{14}$$

где

$$u_0(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0), \tag{15}$$

$$\nu_0(x) = -\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)\,d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta. \tag{16}$$

Уравнения (13) и (14) представляют собой систему линейных интегральных уравнений вольтеровского типа второго рода для определения неизвестных функций $u(x,y)$, $\nu(x)$ с непрерывными свободными членами и ядрами, согласно (12) имеющими слабо полярную особенность. Из теории интегральных уравнений известно, что система уравнений (13) и (14) разрешима в классе непрерывных в $\overline{\Omega}_{2T}$ функций. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений с учётом $\nu(0) = 0$ в силу $\lim\limits_{x\to 0} G_2(x,0,\eta) = 0$ для $\eta \in (0,1)$. Гладкость решения зависит от гладкости функций $\varphi(y)$, $\psi(x)$, входящих в свободные члены уравнений (13) и (14).

В силу сказанного выше и выполнения условий $(B1)$ выражение, стоящее в формуле (6) справа, имеет по x, y частные производные первого порядка. Поэтому и левая часть этого равенства, т.е. функция $u(x,y)$, также имеет производные первого порядка в области Ω_{2T}:

$$u_x(x,y) = \frac{1}{2}[\tau'(x+y) + \tau'(x-y)] + \frac{1}{2}[\nu(x+y) - \nu(x-y)] -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} q(\xi)u(\xi, y+|\xi-x|)\,\mathrm{sign}\,(\xi - x)\,d\xi, \tag{17}$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{2}[\tau'(x+y) - \tau'(x-y)] + \frac{1}{2}[\nu(x+y) + \nu(x-y)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} q(\xi)u(\xi, y+|\xi-x|)\,d\xi, \tag{18}$$

где $\tau'(\cdot)$ определяется по формуле (8).

Предполагая далее существование производной у функции $\nu(x)$, на основании условий (2), (3) и $(B1)$ из (14) получим для $\nu'(x)$ уравнение

$$\nu'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\left[q(\xi)u(\xi,0) - \frac{1}{2}q(\xi/2)\psi(\xi/2) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u_y(\eta, -\xi+\eta)\,d\eta\right]d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu'(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Согласно формуле (16) вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x) = -\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi + \int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta. \tag{20}$$

Учитывая равенство

$$\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta,$$

с помощью интегрирования по частям на основе условий $(B1)$, $(B2)_2$ и $(B2)_3$ находим

$$\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta.$$

С учётом этого запишем (20) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta. \tag{21}$$

Отсюда и из непрерывности функций $u(x,y)$ и $u_y(x,y)$ в области Ω_{2T} заключаем, что свободный член интегрального уравнения (19) является непрерывной функцией на отрезке $[0,T]$. Таким образом, уравнение (19) разрешимо в классе непрерывных функций. Обозначая решение уравнения (20) через $N(x)$, положим $\nu(x)=\int_0^x N(\xi)\,d\xi$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (15) и принадлежит классу $C^1[0,T]$.

Ранее полученные равенства (17), (18) показывают, что $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ являются непрерывными функциями в области Ω_{2T}. В силу $\nu(x)\in C^1[0,T]$ имеем $\tau(x)\in C^2[0,T]$. Отсюда вытекает, что правые части равенств (17), (18) также имеют по x, y частные производные первого порядка и, следовательно, функция $u(x,y)$ имеет непрерывные в Ω_{2T} производные второго порядка. В дальнейшем нам понадобятся выражения для этих производных:

$$u_{xx}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)]+q(x)u(x,y)-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)+q(x-y)u(x-y,0)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\,d\xi, \tag{22}$$

$$u_{xy}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)-\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)+\nu'(x-y)]-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)-q(x-y)u(x-y,0)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\operatorname{sign}(\xi-x)\,d\xi, \tag{23}$$

$$u_{yy}(x,y)=\frac{1}{2}[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)]+\frac{1}{2}[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)]-$$

$$-\frac{1}{2}[q(x+y)u(x+y,0)+q(x-y)u(x-y,0)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}q(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\,d\xi. \tag{24}$$

Формулы (22)–(24) показывают, что $\{u_{xx},u_{yx},u_{yy}\}\in C(\Omega_{2T})$.

Итак, по найденным функциям $\nu(x)\in C^1[0,T]$, $u(x,y)\in C^2(\Omega_{2T})$ функция $\tau(x)$ находится из формулы (7). Тогда функция $u(x,y)$, построенная по формуле (9) как решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD}=\tau(x)$, принадлежит классу $C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})$. Таким образом, найденные в Ω_{2T} решение $u(x,y)$ и функция (9) в области Ω_{1T} в совокупности определяют решение прямой задачи (1)–(3) в области Ω_T. Теорема доказана.

3. Исследование обратной задачи. Пусть выполнены условия $(B2)$. Предположим, что неизвестная функция $q(x)$, $x\in[0,T]$, имеет вид $q(x)=q_1(x)$, $x\in[0,T/2]$, $q(x)=q_2(x)$, $x\in[T/2,T]$, причём $q_1(T/2)=q_2(T/2)$. Записав первое условие в (4) в виде

$$u_x(x,-x)+u_y(x,-x)=\psi_1(x),\quad x\in[0,T/2],$$

и продифференцировав его, имеем

$$u_{xx}(x,-x)-u_{yy}(x,-x)=\psi_1'(x),\quad x\in[0,T/2]. \tag{25}$$

Используя формулы (22) и (24) при $y=-x$, из (25) находим функцию $q_1(x)$:

$$q_1(x)=\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)},\quad x\in[0,T/2]. \tag{26}$$

Дифференцируя теперь два раза второе равенство в (4), получаем

$$u_{xx}(x,x-T)+2u_{xy}(x,x-T)+u_{yy}(x,x-T)=\psi_2''(x),\quad x\in[T/2,T]. \tag{27}$$

С учётом формул (22)–(24) при $y = x - T$ из (27) следует равенство

$$\psi_2''(x) = 2\tau''(2x-T) + 2\tau'(2x-T) - 2q(2x-T)u(2x-T,0) + q(x)u(x,x-T) + \\ + 2\int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi), \quad x \in [T/2, T]. \tag{28}$$

Вычислив производную от обеих частей (8) и заменив переменную x на $2x-T$, исключим $\tau''(2x-T)$ в правой части (28). Разрешая при этом получающееся уравнение относительно $q_2(x)$ и используя (3), (26), а также второе условие в (4), находим

$$q_2(x) = \frac{1}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \frac{4\nu'(2x-T)}{\psi_2(x)} + \\ + \frac{2}{\psi_2(x)}\biggl[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} q(\xi)u_y(\xi, -2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi)\,d\xi\biggr], \quad x \in [T/2, T]. \tag{29}$$

Из условия (3) и первого соотношения в (4) также следует равенство

$$u_y(x, -x) = (1/2)[\psi_1(x) - \psi_1'(x)].$$

В силу $\lim\limits_{x\to 0} G_2(x, 0, \eta) = 0$ для $\eta \in (0,1)$ из (19) и (21) находим $\nu'(0) = 0$. Используя эти соображения и (В3), получим условие для заданных функций (при выполнении которого имеет место равенство $q_1(T/2) = q_2(T/2)$):

$$\psi_1'(T/2) = \psi_2''(T/2) - \psi''(0) + \psi_1'(0) - \int\limits_0^{T/2} \frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}[\psi_1(\xi) - \psi_1'(\xi)]\,d\xi. \tag{30}$$

Исключив в правой части (29) функцию $\nu'(2x-T)$ с помощью (19) и отделив свободный от неизвестных член, имеем

$$q_2(x) = q_{02}(x) - \frac{4}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi, 0, 0)\nu'(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{4}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\biggl[q(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} q(\eta)u_y(\eta, -\xi+\eta)\,d\eta\biggr]\,d\xi + \\ + \frac{4}{\psi_2(x)}\biggl[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} q(\xi)u_y(\xi, -2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} q(\xi)u_y(\xi, 2x-T-\xi)\,d\xi\biggr], \quad x \in [T/2, T], \tag{31}$$

где

$$q_{02}(x) = \frac{1}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^1 G_2(2x-T, 0, \eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta + \\ + \frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi, 0, 0)[\psi''(\xi/2) - \psi_1'(\xi/2)]\,d\xi, \quad x \in [T/2, T]. \tag{32}$$

Соотношения (26) и (31) объединим в одно уравнение

$$q(x)=q_0(x)-\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T}G_2(2x-T-\xi,0,0)\nu'(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T}G_2(2x-T-\xi,0,0)\biggl[q(\xi)\varphi(\xi)+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}q(\eta)u_y(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\biggr]\,d\xi+$$

$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\biggl[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T}q(\xi)u_y(\xi,-2x+T+\xi)\,d\xi+\int\limits_{2x-T}^{x}q(\xi)u_y(\xi,2x-T-\xi)\,d\xi\biggr],\quad x\in[0,T],\tag{33}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда: $\theta(t)=1,\ t\geqslant 0,\ \theta(t)=0,\ t<0;$

$$q_0(x)=\theta(T/2-x)\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)}+\theta(x-T/2)q_{02}(x),\quad x\in[0,T].\tag{34}$$

Нетрудно заметить, что если выполнено условие

$$\psi_1'(T/2)=\psi_2''(T/2)-\psi''(0)+\psi_1'(0),\tag{35}$$

то функция $q_0(x)$ является непрерывной на отрезке $[0,T]$. Тогда, как следует из (30), для того чтобы $q(x)\in C[0,T]$ достаточно выполнения условия

$$\int\limits_0^{T/2}\frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}[\psi_1(\xi)-\psi_1'(\xi)]\,d\xi=0.\tag{36}$$

В дальнейшем будем считать выполненными условия (35) и (36).

Замечание 1. Условиям $(B2)_4$, $(B2)_5$, $(B3)$, $(B4)$, (36) и (37), в частности, удовлетворяют функции

$$\psi(x)=\exp(x^2),\quad \psi_1(x)=\exp(x),$$
$$\psi_2(x)=\exp(x)+\frac{x^2}{2}-\frac{Tx}{2}+\exp\biggl(\frac{T^2}{4}\biggr)-\exp\biggl(\frac{T}{2}\biggr)+\frac{T^2}{8}.$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B1)–(B4), (35), (36). Тогда для достаточно малых T существует единственное решение $q(x)\in C[0,T]$ обратной задачи (1)–(4).*

Доказательство. Введём в рассмотрение вектор функцию, определив её компоненты с помощью неизвестных функций:

$$p(x,y)=[p_1(x,y),p_2(x),p_3(x)]^{\mathrm{т}}:=[u_y(x,y),\nu'(x),q(x)]^{\mathrm{т}},$$

$^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования. Тогда, используя очевидные соотношения

$$\nu(x)=\int\limits_0^x p_2(\xi)\,d\xi,\quad u(x,y)=\psi(x)+\int\limits_{-x}^{y}p_1(x,\eta)\,d\eta\tag{37}$$

и исключая сначала функцию $\tau'(x)$ в (18) с помощью (8), а затем $\nu(x)$ и $u(x,y)$ в получающемся уравнении и в (20) с помощью (37), запишем уравнения (18), (19), (33) в векторно-операторном виде

$$p(x,y)=Ap(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_{2T},\tag{38}$$

где $A = [A_1, A_2, A_3]^{\text{т}}$ и A_i, $i = 1, 2, 3$, определяются равенствами

$$A_1 p(x,y) = p_{01}(x,y) + \in t_0^{x+y} p_2(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\bigg\{ \int\limits_{(x+y)/2}^{x+y} p_3(\xi)\bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{-(x+y)+\xi} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\bigg]\,d\xi -$$

$$- \int\limits_{(x-y)/2}^{x-y} p_3(\xi)\bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{-(x-y)+\xi} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\bigg]\,d\xi\bigg\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} p_3(\xi)\bigg[\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{y+|\xi-x|} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\bigg]\,d\xi,$$

$$A_2 p(x) = p_{02}(x) - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)p_2(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0) \times$$

$$\times \bigg[p_3(\xi)\bigg(\psi(\xi) + \int\limits_{-\xi}^{0} p_1(\xi,\eta)\,d\eta\bigg) - \frac{1}{2}p_3(\xi/2)\psi(\xi/2) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p_3(\eta)p_1(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\bigg]\,d\xi,$$

$$A_3 p(x) = p_{03}(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)p_2(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\bigg[p_3(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p_3(\eta)p_1(\eta,-\xi+\eta)\,d\eta\bigg]\,d\xi +$$

$$+ \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\bigg[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} p_3(\xi)p_1(\xi,-2x+T+\xi)\,d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} p_3(\xi)p_1(\xi,2x-T-\xi)\,d\xi\bigg].$$

Здесь через функции p_{01}, p_{02} и p_{03} обозначены выражения

$$p_{01}(x,y) := \frac{1}{2}\bigg[\psi'\bigg(\frac{x+y}{2}\bigg) - \psi'\bigg(\frac{x-y}{2}\bigg)\bigg], \quad p_{02}(x) := \frac{\partial}{\partial x}\nu_0(x), \quad p_{03}(x) := q_0(x). \qquad (39)$$

Далее нам необходимы оценки интегралов с участием функции G_2, входящей в уравнение (38). Ниже проведём оценки по одному из однотипных интегралов. Для этого, использовав легко проверяемые соотношения

$$\int\limits_0^1 G_2(x,y,\eta)\,d\eta = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \quad z > 0,$$

получим неравенства

$$\bigg|\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)\,d\eta\bigg| \leqslant \max_{y\in[0,1]} |\varphi'''(y)|, \qquad (40)$$

$$\bigg|\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)\,d\xi\bigg| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{\psi''(\xi/2)}{\sqrt{x-\xi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\bigg(-\frac{n^2}{x-\xi}\bigg)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)| \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x-\xi}\right)\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)| \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + x \right| \leqslant \sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\right) \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)|. \tag{41}$$

Обратимся к уравнению (38). Очевидно, что оператор A переводит функции $p(x,y) \in C(\overline{\Omega}_{2T})$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\overline{\Omega}_{2T})$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(p_0,r) \subset C(\overline{\Omega}_{2T})$ радиуса r с центром в точке $p_0(x,y) = (p_{01}(x,y), p_{02}(x), p_{03}(x))$ в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (38) имеет в области $\overline{\Omega}_{2T}$ при достаточно малом T единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|p-p_0\|_T \leqslant r$. Норму p естественно здесь определить равенством

$$\|p\|_T = \max\left\{ \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}} |p_1(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]} |p_2(x)|,\ \max_{x\in[0,T]} |p_3(x)| \right\}.$$

Очевидно, что для элементов $p \in S(p_0,r)$ имеет место оценка

$$\|p\|_T \leqslant \|p_0\|_T + r =: R,$$

где

$$\|p_0\|_T = \max\left\{ \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}} |p_{01}(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]} |p_{02}(x)|,\ \max_{x\in[0,T]} |p_{03}(x)| \right\}.$$

Из соотношений (39), (21), (34) и (32) с учётом (40), (41) для $\|p_0\|_T$ следует оценка

$$\|p_0\|_T \leqslant \max\left\{ \max_{x\in[0,T/2]} |\psi'(x)|,\ \max_{y\in[0,1]} |\varphi'''(y)| + \sqrt{T}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{T}}{2}\right) \max_{x\in[0,T/2]} |\psi''(x)|, \right.$$

$$\frac{1}{\psi_0} \max_{x\in[0,T/2]} |\psi_1'(x)| + \frac{1}{\psi_{00}} \left[\max_{x\in[T/2,T]} |\psi_2''(x)| + 2 \max_{y\in[0,1]} |\varphi'''(y)| + \right.$$

$$\left.\left. + \left(1 + 2\sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\right) \max_{x\in[0,T/2]} (|\psi''(x)| + |\psi_1'(x)|) \right] \right\}.$$

Теперь покажем, что для некоторых малых T оператор A является на шаре $S(p_0,r)$ оператором сжатия.

Действительно, пусть $p \in S(p_0,r)$. Тогда для всех точек $(x,y) \in \overline{\Omega}_{2T}$, учитывая соотношения (40), (41), получаем неравенства

$$|A_1p - p_{01}| \leqslant \left[1 + 3\left(\max_{x\in[0,T/2]} |\psi'(x)| + RT\right)\right] RT,$$

$$|A_2p - p_{02}| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + \frac{3}{2} \max_{x\in[0,T/2]} |\psi(x)| + \frac{3RT}{4}\right) R\sqrt{T},$$

$$|A_3p - p_{03}| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + \max_{x\in[0,T/2]} |\psi(x)| + \frac{TR}{2} + \frac{3R\sqrt{T}}{2}\right) R\sqrt{T}.$$

Обозначим через T^* наибольшее значение T, для которого правые части этих неравенств будут меньше чем R. Тогда для $T \leqslant T^*$ имеет место включение $Ap \in S(p_0,r)$. Остаётся показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(p_0,r)$. Для доказательства этого возьмём любые два элемента $p^1,p^2\in S(p_0,r)$ и оценим норму разности между их образами Ap^1, Ap^2. Обозначим компоненты элементов p^1, p^2 через p_i^1, p_i^2, $i=1,2,3$. При оценке $\|Ap^1-Ap^2\|_T$ воспользуемся неравенствами

$$|p_k^1p_s^1-p_k^2p_s^2|\leqslant|p_k^1-p_k^2||p_s^1|+|p_k^2||p_s^1-p_s^2|\leqslant 2R\|p^1-p^2\|_T,\quad k,s=1,2,3,$$

которые имеют место для произвольных $p^1,p^2\in S(p_0,r)$. В результате имеем оценки

$$|A_1p^1-A_1p^2|\leqslant\bigg[1+3\bigg(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|+2RT\bigg)\bigg]T\|p^1-p^2\|_T,$$

$$|A_2p^1-A_2p^2|\leqslant\bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\bigg(1+\frac{3}{2}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)|+\frac{3RT}{2}\bigg)\sqrt{T}\|p^1-p^2\|_T,$$

$$|A_3p^1-A_3p^2|\leqslant\frac{4}{\psi_{00}}\bigg(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\bigg)\bigg(1+\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)|+TR+3R\sqrt{T}\bigg)\sqrt{T}\|p^1-p^2\|_T,$$

откуда следует, что

$$\|Ap^1-Ap^2\|\leqslant\frac{T}{T^*}\|p^1-p^2\|_T,$$

и оператор A при $T\in(0,T^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(p_0,r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (38) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема доказана.

Замечание 2. По найденным $p_1(x,y)$, $p_2(x)$ функции $\nu(x)$, $u(x,y)$ находятся по формулам (37). Тогда из формулы (8) определим $\tau'(x)$ ($q(x)=p_3(x)$ – известна). Далее $\tau(x)$ вычисляется по формуле

$$\tau(x)=\psi(0)+\int\limits_0^x\tau'(\xi)\,d\xi,$$

а функция $u(x,y)$ в области $\overline{\Omega}_{1T}$ определяется из соотношения (9). Построенная таким образом функция $u(x,y)$ в областях $\overline{\Omega}_{1T}$ и $\overline{\Omega}_{2T}$ будет классическим решением прямой задачи в смысле указанного выше определения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочная математическая библиотека. М., 1964.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 3 (87). С. 3–19.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Лейбензон Л.Л.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л., 1947.
5. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
6. *Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
7. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
8. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент, 1979.
9. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
10. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.

11. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
12. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа, 2015.
13. *Капустин Н.Ю.* Об обобщённой разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.
14. *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.
15. *Елеев В.А.* Обобщённая задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 41–53.
16. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.* О задаче типа Франкеля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.
17. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
18. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
19. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
20. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. V. 231. New York, 1999.
21. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
22. *Hasanoğlu A. Hasanov, Romanov V.G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Cham, 2017.

Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Бухарский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 15.05.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.