ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1645–1653

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.222

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. В. С. Климов

Пусть A – линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка, определённый на функциях n переменных. Изучается множество $\mathscr{K}(A;B)$ решений неравенства $A(u)\geqslant 0$, удовлетворяющих краевому условию типа Неймана $Bu=0$. Устанавливается оценка вида $\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C(w)(u,w)$, в которой $H_1^2(\Omega)$ – пространство Никольского, $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, w – неотрицательная ненулевая функция из пространства Шварца $\mathscr{D}(\Omega)$. Если $u_j\in\mathscr{K}(A,B)$ $(j=1,2,\ldots)$ и последовательность $\{u_j\}$ сходится в $\mathscr{D}'(\Omega)$ к функции u, то $u\in H_1^2(\Omega)$ и $\{u_j\}$ сходится к u в пространстве Соболева $W_p^1(\Omega)$, где $p(n-1)<n$.

DOI: 10.31857/S0374064122120068, EDN: NCEKSJ

Введение. В работе изучается множество $\mathscr{K}(A;B)$ решений дифференциального неравенства $Au\geqslant 0$, удовлетворяющих краевому условию типа Неймана $Bu=0$. Здесь A – равномерно эллиптический оператор второго порядка. Неравенство $Au\geqslant 0$ означает, что u есть решение уравнения $Au=f$, где f – мера. Неприятной особенностью эллиптических краевых задач является то, что их теория не применима в пространстве $C(\overline{\Omega})$ и в сопряжённом к нему пространстве $M(\overline{\Omega})$. В частности, для подобных пространств не выполняется неравенство коэрцитивности, играющее первостепенную роль при исследовании граничных задач в пространствах $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$. Решающее значение в преодолении возникающих здесь трудностей имеют точные по порядку особенностей оценки функции Грина [1] и теоремы о полном наборе гомеоморфизмов [2, с. 9].

В п. 1 приводятся сведения о различных классах функций, основное внимание уделяется пространствам Соболева $W_p^k(\Omega)$ [3] и Никольского $H_1^k(\Omega)$ [4, 5], напоминаются определения пространства Шварца $\mathscr{D}(\Omega)$ и сопряжённого к нему пространства распределений $\mathscr{D}'(\Omega)$ [6].

В п. 2 содержится доказательство оценки

$$\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C\|Au;M(\overline{\Omega})\|$$

при ряде предположений относительно краевой задачи типа Неймана $Au=f$, $Bu=0$. Главные предположения – единственность решения и достаточная гладкость данных задачи.

Основные результаты работы приведены в п. 3: для функций класса $\mathscr{K}(A;B)$ устанавливаются обратные неравенства вида $\|u;H_1^2(\Omega)\|\leqslant C\Lambda(u)$, где C – не зависящая от функции u из множества $\mathscr{K}(A;B)$ постоянная, Λ – линейный функционал. Если функция Грина для рассматриваемой краевой задачи положительна, то функционал Λ можно определить равенством

$$\Lambda(u)=\int\limits_{\Omega}u(x)w(x)\,dx,$$

в котором w – неотрицательная и ненулевая функция класса $\mathscr{D}(\Omega)$.

1. Функциональные пространства. Всюду далее $\mathbb{R}^n$ – действительное n-мерное евклидово пространство с нормой $|x|$; Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$; $L_p(\Omega)$ – пространство Лебега, как обычно, эквивалентные относительно n-мерной меры Лебега mes_n функции отождествляются; $1\leqslant p\leqslant\infty$; норма в пространстве $L_p(\Omega)$ вводится стандартным образом.

Для натурального числа k и $q \in [1,\infty)$ через $W_q^k(\Omega)$ обозначается совокупность функций из $L_q(\Omega)$, производные в смысле Соболева [3, 4] которых до порядка k включительно принадлежат пространству $L_q(\Omega)$. Норма в $W_q^k(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u; W_q^k(\Omega)\| = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u; L_q(\Omega)\|.$$

Здесь и всюду ниже $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ – порядок мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} u$, $D_i = \partial/\partial x_i$.

Напомним определение пространства Никольского $H_1^k(\Omega)$. Обозначим через Ω_η совокупность точек из Ω, отстоящих от границы области Ω на расстояние большее, чем η. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $H_1^1(\Omega)$, если она суммируема по Ω и выполняется условие Зигмунда

$$\|f(\cdot + h) - 2f(\cdot) + f(\cdot - h); L_1(\Omega_\eta)\| \leqslant M|h|, \quad |h| < \eta. \tag{1}$$

Класс $H_1^1(\Omega)$ образует пространство Банаха, если ввести норму

$$\|f; H_1^1(\Omega)\| = \|f; L_1(\Omega)\| + M_f,$$

где M_f – наименьшая константа, с которой выполняется неравенство (1) для всех η, для которых Ω_η имеет смысл. Для натурального $k > 1$ пространство $H_1^k(\Omega)$ состоит из функций класса $W_1^{k-1}(\Omega)$, все производные которых порядка $k-1$ принадлежат пространству $H_1^1(\Omega)$. В $H_1^k(\Omega)$ вводится норма

$$\|f; H_1^k(\Omega)\| = \|f; W_1^{k-1}(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|=k-1} \|D^\alpha f; H_1^1(\Omega)\|.$$

Хорошо известны определения пространств Никольского $H_1^k(\Omega)$ и для нецелых значений параметра k [4, с. 180].

Приведём два вспомогательных утверждения о пространствах Никольского.

Предложение 1 [5]. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Тогда из всякой последовательности $\{u_s\}$ функций с ограниченными нормами*

$$\|u_s; H_1^r(\Omega)\| \leqslant M \tag{2}$$

можно выделить подпоследовательность $\{u_{s_k}\}$ со следующими свойствами:

1) $\{u_{s_k}\}$ сходится в любой метрике, более слабой чем метрика $H_1^r(\Omega)$, к некоторой функции u из пространства $H_1^r(\Omega)$;

2) для этой функции u выполняется неравенство $\|u; H_1^r(\Omega)\| \leqslant M$, где константа M та же, что и в (2).

Предложение 1 называют *теоремой об ослабленной компактности пространств Никольского.* Под метрикой, более слабой чем метрика в $H_1^r(\Omega)$, можно понимать метрику пространства $H_1^{r_1}(\Omega)$ при $0 < r_1 < r$ или метрику пространства $L_1(\Omega)$.

Предложение 2 [7]. *Пусть $\mathscr{X}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $F\colon \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ – функция, непрерывная по совокупности переменных вне диагонали $x = y$ вместе со всеми частными производными $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ второго порядка. Пусть для любых $x \neq y$ имеют место неравенства*

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{c}{|x-y|^{n-1}}, \quad \left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c}{|x-y|^{n+1}}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Тогда совокупность функций $F_y(\cdot) = F(\,\cdot\,, y)$ $(y \in \mathscr{X})$ есть ограниченное множество в пространстве Никольского $H_1^1(\mathscr{X})$.

Для компактного множества $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ обычным образом [8, с. 261; 9, с. 63] вводится банахово пространство $C(\mathbb{K})$ непрерывных на $\mathbb{K}$ действительных функций. Норма в $C(\mathbb{K})$ определяется равенством

$$\|u; C(\mathbb{K})\| = \max_{x \in \mathbb{K}} |u(x)|.$$

Через $\operatorname{rca}(\mathbb{K})$ обозначается множество всех регулярных счётно-аддитивных функций μ, заданных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств из $\mathbb{K}$ и имеющих конечную полную вариацию $|\mu|(\mathbb{K}) < \infty$. Сопряжённое к $C(\mathbb{K})$ пространство $(C(\mathbb{K}))^*$ состоит из линейных функционалов Λ, допускающих представление

$$\Lambda(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{K}} \varphi(x)\, d\mu(x), \quad \varphi \in C(\mathbb{K}),$$

и обозначаемых через μ_Λ [8, 9]. Если функционал Λ положителен, то его норма равна

$$\|\Lambda; (C(\mathbb{K}))^*\| = \Lambda(1) = \mu(\mathbb{K}),$$

соответствующий ассоциированный функционал μ_Λ называют *мерой*. Далее пространство $(C(\mathbb{K}))^*$ обозначается символом $M(\mathbb{K})$, его элементы называются *зарядами*. Совокупность положительных функционалов обозначим через $M_+(\mathbb{K})$. Любой функционал Λ из пространства $M(\mathbb{K})$ представим в виде разности двух положительных функционалов: $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$; при этом

$$\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = \|\Lambda_1; M(\mathbb{K})\| + \|\Lambda_2; M(\mathbb{K})\|.$$

Функционал Λ назовём *дискретным*, если он допускает представление

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{y_i},$$

где коэффициенты c_i – действительные числа, y_i – различные элементы компакта $\mathbb{K}$; здесь и далее δ_y – единичная мера Дирака, сосредоточенная в точке y. Норма дискретного функционала

$$\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = |c_1| + \ldots + |c_N|;$$

положительность Λ равносильна неотрицательности коэффициентов c_i. Для любого положительного функционала Λ существует последовательность дискретных положительных функционалов Λ_i, слабо сходящаяся к Λ, т.е.

$$\lim_{i \to \infty} \Lambda_i(z) = \Lambda(z) \quad \text{для любой} \quad z \in C(\mathbb{K}).$$

Поскольку $\|\Lambda_i; M(\mathbb{K})\| = \Lambda_i(1)$, $\|\Lambda; M(\mathbb{K})\| = \Lambda(1)$, то

$$\lim_{i \to \infty} \|\Lambda_i; M(\mathbb{K})\| = \|\Lambda; M(\mathbb{K})\|.$$

Пусть $C_+(\mathbb{K})$ – конус неотрицательных функций класса $C(\mathbb{K}), u_0$ – ненулевая функция из $C_+(\mathbb{K})$. Линейный оператор Q, действующий в пространстве $C(\mathbb{K})$, назовём u_0-положительным, если для каждой ненулевой функции w из $C_+(\mathbb{K})$ существуют такие положительные числа τ_1 и τ_2, что справедливы неравенства $\tau_1 u_0 \leqslant Qw \leqslant \tau_2 u_0$. Это понятие в более широком смысле вводилось в монографии [4, с. 60].

Ниже в основном будет рассматриваться случай, когда компакт $\mathbb{K}$ есть замыкание $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$. В этом случае пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$ при $q > n$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$. Отсюда следует компактность оператора вложения пространства $M(\overline{\Omega})$ в сопряжённое к $W_q^1(\Omega)$ пространство $W_p^{-1}(\Omega)$ $(1 < p < n/(n-1))$. Негативное пространство Соболева $W_p^{-1}(\Omega)$ состоит из распределений z, допускающих представление

$$z = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} D^\alpha z_\alpha,$$

где $z_\alpha \in L_p(\Omega)$ при всех $|\alpha| \leqslant 1$. Вложение $M(\overline{\Omega})$ в $W_p^{-1}(\Omega)$ при $p(n-1) < n$ является усиленно непрерывным в следующем смысле: если последовательность функционалов $\{\Lambda_j\}$ класса $M(\overline{\Omega})$ слабо сходится к функционалу Λ, то она сильно сходится к Λ в метрике пространства $W_p^{-1}(\Omega)$ (это также следует из теорем вложения).

Через $\mathscr{D}(\Omega)$ далее обозначается линейное пространство всех финитных в области Ω бесконечно дифференцируемых функций, наделённое обычной топологией. Непрерывный линейный функционал $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ называют *обобщённой функцией* или *распределением*. Линейное топологическое пространство всех распределений обозначают символом $\mathscr{D}'(\Omega)$ [6].

2. Оценки обобщённых решений задачи типа Неймана. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ – её замыкание. Будет изучаться краевая задача типа Неймана

$$Au := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\biggl(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\biggr) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f, \tag{3}$$

$$Bu := \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \beta(x)u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{4}$$

Предполагаем, что определяемый равенством (3) оператор A равномерно эллиптичен:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)t_1t_j \geqslant \gamma\sum_{i=1}^n t_i^2 \quad (\gamma > 0),$$

причём $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$; $\partial u/\partial\nu$ – производная по внешней конормали; $\beta(x) \geqslant 0$. Для упрощения будем считать границу $\partial\Omega$ и коэффициенты операторов A и B бесконечно дифференцируемыми:

$$\partial\Omega \in C^\infty, \quad a_{ij} \in C^\infty, \quad a_i \in C^\infty, \quad a \in C^\infty, \quad \beta \in C^\infty. \tag{5}$$

Задачу (3), (4) называют невырожденной, если при $f = 0$ она имеет только нулевое решение. Невырожденность задачи (3), (4) влечёт за собой её однозначную разрешимость для широкого класса правых частей. Если, например, $f \in L_p(\Omega)$ и $1 < p < \infty$, то единственное решение u задачи (3), (4) принадлежит пространству Соболева $W_p^2(\Omega)$ и допускает интегральное представление

$$u(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y)\,dy,$$

где $G(x,y)$ – функция Грина задачи (3), (4).

Обозначим через $\psi(t;k)$ $(t > 0,\ k \in \mathbb{R})$ функцию, определяемую соотношениями: $\psi(t;k) = t^k$, если $k < 0$; $\psi(t;0) = 1 + (-\ln t)_+$; $\psi(t;k) = 1$, если $k > 0$.

Предложение 3 [1]. *Функция Грина $G(x,y)$ задачи (3), (4) удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$|G_\beta^\gamma(x,y)| \leqslant c\psi(|x-y|; 2-n-|\beta|-|\gamma|),$$

где под $G_\beta^\gamma(x,y)$ понимается $D_x^\beta D_y^\gamma G(x,y)$;

$$|G_\beta^\gamma(x,y_1)| - |G_\beta^\gamma(x,y_2)| \leqslant c|y_1-y_2|^\nu \sum_{i=1}^2 \psi(|x-y_i|; 2-n-\beta-\gamma-\nu),$$

здесь $0 < \nu < 1$, c – некоторая постоянная.

Предложение 3 характеризует свойства гладкости функции Грина. Оно оказывается полезным при изучении решений краевой задачи (3), (4) в случае, когда $f \in M(\overline{\Omega})$. Из теорем о полном наборе гомеоморфизмов следует, что если f есть элемент негативного пространства Соболева $W_p^{-1}(\Omega)$, сопряжённого к пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, то обобщённое решение $u = Tf$ задачи (3), (4) принадлежит пространству $W_p^1(\Omega)$. Определённый таким образом оператор $T\colon W_p^{-1}(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ непрерывен. Если $1 < p < n/(n-1)$, то $q = p/(p-1) > n$. Пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$ при $q > n$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$. Отсюда следует, что пространство $M(\overline{\Omega})$ компактно вложено в пространство $W_p^{-1}(\Omega)$. Оператор $T\colon M(\overline{\Omega}) \to W_p^1(\Omega)$ $(1 < p < n/(n-1))$ вполне непрерывен.

Усилим это утверждение, используя предложение 3. Справедливо равенство

$$T\delta_y = G_y = G(\cdot\,, y), \tag{6}$$

которое можно принять в качестве определения функции Грина задачи (3), (4).

Лемма. *Множество функций* $\{G_y\}$ *ограничено в пространстве* $H_1^2(\Omega)$:

$$\|G_y; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1,$$

постоянная R_1 *не зависит от* y *из* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Функция $F(x,y) = D_\alpha G(x,y)$ $(|\alpha| \leqslant 1)$ в силу предложения 3 удовлетворяет оценкам, фигурирующим в предложении 2; в рассматриваемом случае $\mathscr{X} = \Omega$. Лемма доказана.

Следствие. *Справедлива оценка* $\|T\delta_y; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1$ *для любого* $y \in \overline{\Omega}$.

Теорема 1. *Для любого заряда* f *из пространства* $M(\overline{\Omega})$ *имеет место оценка*

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть вначале f – дискретный положительный функционал и

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{y_i}, \tag{8}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ – положительные числа, $y_1, \ldots, y_N$ – различные элементы из $\overline{\Omega}$. Имеет место равенство

$$\|f; M(\overline{\Omega})\| = f(1) = \sum_{i=1}^{N} c_i. \tag{9}$$

В силу (8) верно равенство

$$Tf = \sum_{i-=1}^{N} c_i T\delta_{y_i}.$$

Из (8) и (9) вытекают соотношения

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} R_1 c_i = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|,$$

влекущие за собой оценку (7) в рассматриваемом случае.

Если $f \in M_+(\overline{\Omega})$, то существует последовательность дискретных положительных функционалов f_k, слабо сходящаяся к функционалу f. Верно равенство

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z) \quad \text{при любом} \quad z \in C(\overline{\Omega}). \tag{10}$$

Равенство (10) влечёт за собой сходимость $f_k \to f$ в метрике пространства $W_p^{-1}(\Omega)$, поэтому последовательность $u_k = Tf_k$ сходится в пространстве $W_p^1(\Omega)$ к функции $u = Tf$. В силу уже доказанного справедливы оценки

$$\|u_k; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|f_k; M(\overline{\Omega})\|.$$

Так как $\|f_k; M(\overline{\Omega})\| = f_k(1)$, $\|f; M(\overline{\Omega})\| = f(1)$, то из (10) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k; M(\overline{\Omega})\| = \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Из теоремы Никольского (предложение 1) вытекают неравенства

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| = \|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \|u_k; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \varlimsup_{k\to\infty} \|f_k; M(\overline{\Omega})\| = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Таким образом, оценка (7) установлена для положительного функционала f.

В общем случае функционал f из $M(\overline{\Omega})$ допускает представление $f = f^1 - f^2$, в котором f^1, f^2 – положительные функционалы и

$$\|f; M(\overline{\Omega})\| = \|f^1; M(\overline{\Omega})\| + \|f^2; M(\overline{\Omega})\|.$$

Справедливы соотношения

$$\|Tf; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \|Tf^1; H_1^2(\Omega)\| + \|Tf^2; H_1^2(\Omega)\| \leqslant$$
$$\leqslant R_1 \|f^1; M(\overline{\Omega})\| + R_1 \|f^2; M(\overline{\Omega})\| = R_1 \|f; M(\overline{\Omega})\|.$$

Теорема доказана.

Неравенство (7) эквивалентно оценке

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|Au; M(\overline{\Omega})\| \tag{11}$$

для решений краевой задачи (3), (4). Действительно, если $Au = f$, то $u = Tf$, верно и обратное утверждение. Оценки (7), (11) можно рассматривать как варианты неравенства коэрцитивности.

3. Обратные неравенства. Вместе с краевой задачей (3), (4) будем рассматривать и сопряжённую к ней, которая заключается в отыскании решения уравнения

$$A^*v := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x)v\right) + a(x)v = w(x), \tag{12}$$

удовлетворяющего краевому условию

$$B^*v := \frac{\partial v}{\partial \nu} + b(x)v = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{13}$$

Известно, что при выполнении условий гладкости (5) функция $b(x)$ принадлежит классу $C^\infty(\partial\Omega)$; предположение $b(x) \geqslant 0$ может не выполняться.

Невырожденность задачи (3), (4) эквивалентна невырожденности задачи (12), (13); справедливо равенство

$$v = T^*w = \int\limits_{\Omega} G_*(x,y) w(y)\, dy,$$

в котором $G_*(x,y) = G(y,x)$ и $G(x,y)$ – функция Грина задачи (3), (4).

Предложение 4. *При некотором действительном λ краевая задача*

$$A^*v = \lambda v, \quad B^*v = 0$$

имеет единственное положительное решение v_1, *нормированное условием*

$$\min\{v_1(x), x \in \overline{\Omega}\} = 1. \tag{14}$$

Предложение 4 следует из результатов работ [10, 11].

Обозначим через $\mathscr{K}(A;B)$ множество $TM_+(\overline{\Omega})$. Таким образом, если $u \in \mathscr{K}(A;B)$, то Au – положительный функционал, $\mu = \mu_{Au}$ – ассоциированная мера. Из условия (14) и теоремы 1 вытекают неравенства

$$\int\limits_{\Omega} v_1(x)\,d\mu(x) = (Au)(v_1) \geqslant \|Au; M(\overline{\Omega})\| \geqslant \frac{1}{R_1}\|u; H_1^2(\Omega)\|. \tag{15}$$

С другой стороны,

$$Au(v_1) = (u, A^* v_1)_{L_2(\Omega)} = \lambda(u, v_1)_{L_2(\Omega)}. \tag{16}$$

Объединение (15), (16) влечёт за собой следующее утверждение.

Теорема 2. *Для функций* u *из множества* $\mathscr{K}(A;B)$ *имеет место оценка*

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \lambda R_1 \int\limits_{\Omega} u(x) v_1(x)\,dx. \tag{17}$$

Более сильные обратные неравенства можно получить в случае, когда функция Грина $G(x,y)$ задачи (3), (4) положительна. Простое достаточное условие положительности $G(x,y)$ – неравенство $a(x) > 0$.

Предложение 5 [11]. *Для положительности функции Грина* $G(x,y)$ *задачи (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная функция* v *из* $C^2(\overline{\Omega})$, *для которой справедливы неравенства*

$$Av \geqslant 0, \quad Bv \geqslant 0, \quad \|Av; C(\overline{\Omega})\| + \|Bv; C(\partial\Omega)\| > 0;$$

при этом сужение оператора T^* *на* $C(\overline{\Omega})$ u_0*-положительно с* $u_0(x) = 1$.

Теорема 3. *Пусть функция Грина задачи (3), (4) положительна. Тогда для любой ненулевой и неотрицательной функции* w *из пространства* $\mathscr{D}(\Omega)$ *найдётся такая постоянная* $C(w)$, *что выполняется неравенство*

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant C(w) \int\limits_{\Omega} u(x) w(x)\,dx \quad \text{для любой} \quad u \in \mathscr{K}(A;B). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть функция w удовлетворяет условиям теоремы и $v = T^* w$. Тогда v есть классическое решение краевой задачи (12), (13). В предположениях теоремы сужение T^* на $C(\overline{\Omega})$ есть u_0-положительный оператор, поэтому $v(x) \geqslant \tau_1$ для любых $x \in \overline{\Omega}$, τ_1 – положительная постоянная.

Если $u \in \mathscr{K}(A,B)$, то $\mu = Au$ есть мера. Тогда имеют место равенства

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\,d\mu(x) = (Au)(v) = (u, A^* v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x) w(x)\,dx \tag{19}$$

и справедливы соотношения

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant R_1 \|Au; M(\overline{\Omega})\| \leqslant \frac{R_1}{\tau_1} \int\limits_{\Omega} v(x)\,d\mu(x) = \frac{R_1}{\tau_1} \int\limits_{\Omega} u(x) v(x)\,dx. \tag{20}$$

Здесь последовательно использовались оценка (11), неравенство $v(x) \geqslant \tau_1$ и равенства (19). Из соотношений (20) вытекает неравенство (18) с постоянной $C(w) = R_1/\tau_1$. Теорема доказана.

Оценка (18) показывает, что функциональный класс $\mathscr{K}(A;B)$ является достаточно узким подмножеством пространства Никольского $H_1^2(\Omega)$. Основываясь на (18), можно установить нелинейные теоремы вложения [12; 13, с. 155], означающие, грубо говоря, что топологии, неэквивалентные в объемлющих линейных пространствах, оказываются эквивалентными при их сужениях на класс $\mathscr{K}(A;B)$. Приведём лишь один результат в данном направлении.

Теорема 4. *Пусть функция Грина задачи (3), (4) положительна. Пусть* $\{u_j\}$ – *последовательность функций из* $\mathscr{K}(A;B)$, *сходящаяся к функции* u *в топологии* $\mathscr{D}'(\Omega)$. *Тогда:*

1) последовательность $\{u_j\}$ *ограничена в пространстве* $H_1^2(\Omega)$ *и сходится к функции* u *в метрике пространства* $W_p^1(\Omega)$ $(1 \leqslant p < n/(n-1))$;

2) функция u *принадлежит пространству Никольского* $H_1^2(\Omega)$ *и справедлива оценка*

$$\|u; H_1^2(\Omega)\| \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \|u_j; H_1^2(\Omega)\|. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть w – ненулевая и неотрицательная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. Сходимость последовательность $\{u_j\}$ к функции u в топологии $\mathscr{D}'(\Omega)$ влечёт за собой ограниченность числовой последовательности

$$\int\limits_\Omega u_j(x)w(x)\,dx.$$

Отсюда в силу (18) вытекает ограниченность последовательности $\{u_j\}$ в пространстве $H_1^2(\Omega)$. Оператор вложения пространства $H_1^2(\Omega)$ в пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ при $p(n-1) < n$ вполне непрерывен. Сходимость $u_j \to u$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и ограниченность последовательности $\{u_j\}$ в пространстве $H_1^2(\Omega)$ влекут за собой сходимость $u_j \to u$ в метрике пространства $W_p^1(\Omega)$. Включение $u \in H_1^2(\Omega)$ и неравенство (21) следуют из предложения 1. Теорема доказана.

Кратко остановимся на возможных модификациях результатов работы. Предположение (5) можно заменить условиями достаточной гладкости коэффициентов операторов A, B и границы области Ω. Точные по порядку особенностей оценки функции Грина для эллиптических краевых задач установлены при весьма необременительных предположениях о гладкости данных [1]. Определённые трудности возникают в случае, когда правые части рассматриваемых уравнений являются элементами негативного пространства Соболева. Однако и здесь имеются возможности некоторого ослабления условия (5) (см. [2, с. 222]). Подобный резерв потенциальных обобщений в данной работе не используется.

В случае задачи Дирихле для эллиптического оператора A второго порядка известны условия положительной обратимости. Вместе с тем в теоремах 2–4 условие типа Неймана нельзя заменить условием Дирихле. Приведём простой пример, относящийся к функциям одного переменного.

Пусть $\Omega = (0,1)$, $Au = -u''$, класс $\mathscr{K}(A;B)$ совпадает с классом вогнутых на Ω функций, удовлетворяющих однородному условию Дирихле $u(0) = u(1) = 0$. Рассмотрим семейство принадлежащих множеству $\mathscr{K}(A;B)$ функций

$$u_t(x) = \min\left\{\frac{x}{t}, \frac{1-x}{1-t}\right\} \quad (0 < t < 1).$$

Как нетрудно видеть, справедливы соотношения

$$0 \leqslant u_t(x) \leqslant 1, \quad \gamma(t) := \int\limits_0^1 \left(\frac{d}{dx}u_t\right)^2(x)\,dx = \frac{1}{t(1-t)}.$$

Функция $\gamma(t)$ неограничена на интервале $(0,1)$, поэтому оценка (17) в данном случае неверна.

В работах [11, 14] доказаны ослабленные варианты теорем 2–4 для задачи Дирихле. Статья [7] содержит внутренние оценки решений эллиптических неравенств. В теореме 4 пространство $W_p^1(\Omega)$ можно заменить любым функциональным пространством $E(\Omega)$, если только $H_1^2(\Omega)$ компактно вложено в $E(\Omega)$. Условие $p(n-1) < n$ существенно для справедливости заключения теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. I // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1970. Т. 110. С. 107–145.
2. *Roitberg Y.* Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distrubutions. Dordrecht; Boston; London, 1996.
3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.
5. *Никольский С.М.* Компактность и неравенства для частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 194–203.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986.
7. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. 2021. Т. 85. № 8. С. 3–22.
8. *Данфорд Н., Шварц Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М., 1962.
9. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., 1967.
10. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М., 1962.
11. *Климов В.С.* О неотрицательных решениях краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 4. С. 718–726.
12. *Малышев В.А.* Нелинейные теоремы вложения // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 6. С. 1–38.
13. *Hormander L.* Notions of Convexity. Boston; Basel; Berlin, 1994.
14. *Климов В.С., Павленко А.Н.* Обратные функциональные неравенства и их приложения к нелинейным краевым задачам // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 781–795.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 13.12.2021 г.
После доработки 13.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.