ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1666–1682

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ДВУМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УПРУГИХ ПРОКЛАДОК

© 2022 г. С. А. Назаров

Построена и обоснована асимптотика собственных чисел и вектор-функций системы Ламе в тонком цилиндре с краевыми условиями Дирихле на всей границе. В качестве предельной выступает плоская задача теории упругости с новыми упругими постоянными. Показано, что при постановке условий Неймана на боковой поверхности цилиндра какая-либо краевая задача для системы дифференциальных уравнений на сечении не может предоставить асимптотику собственных чисел трёхмерной задачи, так как собственные вектор-функции локализуются около кромки тонкого цилиндра. Сформулированы открытые вопросы.

DOI: 10.31857/S0374064122120081, EDN: NCGZOG

1. Постановка задач. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, ограниченная простым замкнутым гладким (класса C^∞; см. п. $7, 1^\circ$) контуром $\gamma = \partial\omega$. Масштабированием сведём характерный размер фигуры ω к единице, т.е. сделаем декартовы координаты $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и все геометрические параметры безразмерными. Цилиндр малой высоты $h > 0$

$$\Omega^h = \{x : y = (x_1, x_2) \in \omega, \quad z = x_3 \in (0, h)\} \tag{1}$$

интерпретируем как однородное изотропное тонкое упругое тело с постоянными Ламе $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$ и плотностью ρ, которую также приравняем к единице. Систему дифференциальных уравнений теории упругости

$$-\mu\Delta_x u^h(x) - \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Omega^h, \tag{2}$$

дополним краевыми условиями Дирихле

$$u^h(y, 0) = u^h(y, 1) = 0, \quad y \in \omega, \tag{3}$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma^h := \gamma \times (0, h), \tag{4}$$

означающими, что поверхность $\partial\Omega^h$ полностью жёстко зафиксирована, т.е. пластина Ω^h вставлена в полость той же формы и прикреплена к её стенкам. При этом $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\nabla_x \cdot = \mathrm{div}$, точкой обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, Λ^h – спектральный параметр (квадрат частоты собственных колебаний) и u^h – вектор смещений с декартовыми компонентами u_1^h, u_2^h и u_3^h. Также рассматривается смешанная краевая задача, в которой краевые условия (4) заменены условиями

$$\sigma_{nn}(u^h; x) = \sigma_{nz}(u^h; x) = \sigma_{ns}(u^h; x) = 0, \quad x \in \Gamma^h. \tag{5}$$

Здесь (n, s) – естественная система криволинейных координат в окрестности $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ контура γ: n – ориентированное расстояние до γ, $n < 0$ в $\omega \bigcap \mathcal{V}$, а s – длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Кроме того, $\sigma_{nn}(u^h)$, $\sigma_{ns}(u^h)$ и $\sigma_{nz}(u^h)$ – проекции на оси n, s и z вектора нормальных напряжений $\sigma^{(n)}(u^h)$, т.е.

$$\sigma^{(n)}(u^h) = \sum_{i=1,2} n_i \sigma^{(i)}(u^h), \quad \sigma^{(j)}(u^h) = (\sigma_{j1}(u^h), \sigma_{j2}(u^h), \sigma_{j3}(u^h)),$$

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu\left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j}\right) + \delta_{j,k}\lambda\left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3}\right), \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{6}$$

причём n_1 и n_2 – проекции на оси y_1 и y_2 единичного вектора внешней нормали на $\partial\omega$, а $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. В этом случае тело Ω^h – упругая прокладка между абсолютно жёсткими прямыми штампами, а её боковая поверхность Γ^h свободна от внешних воздействий.

Вариационная формулировка задачи (2)–(4) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$\mu(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h)_{\Omega^h} + (\lambda+\mu)(\nabla_x \cdot u^h, \nabla_x \cdot \psi^h)_{\Omega^h} = \Lambda^h (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{при всех} \quad \psi^h \in H^1_0(\Omega^h)^3. \quad (7)$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{\Omega^h}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, $H^1_0(\Omega^h)$ – пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega^h$, а последний верхний индекс 3 в формуле (7) указывает количество компонент пробной вектор-функции $\psi^h = (\psi^h_1, \psi^h_2, \psi^h_3)$. Билинейная форма $E_\square(u^h, \psi^h; \Omega^h)$ в левой части тождества (7) положительно определена и симметрична на пространстве $\mathcal{H}^h = H^1_0(\Omega^h)^3$, а значит, согласно [3, гл. 10, § 1, 2], задаче (7) ставится в соответствие положительно определённый самосопряжённый оператор $A^h_\square$ с дискретным спектром

$$0 < \Lambda^h_1 \leqslant \Lambda^h_2 \leqslant \Lambda^h_3 \leqslant \ldots \leqslant \Lambda^h_m \leqslant \ldots \to +\infty. \quad (8)$$

Соответствующие собственные вектор-функции $u^h_{(1)}, u^h_{(2)}, u^h_{(3)}, \ldots, u^h_{(m)}, \ldots \in H^1_0(\Omega^h)^3$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u^h_{(p)}, u^h_{(q)})_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}. \quad (9)$$

Функционал $E_\square(u^h, u^h; \Omega^h)$, часто называемый *упругой квазиэнергией*, вообще говоря, отличается от обычной (ср., например, [4]) удвоенной упругой энергии пластины

$$E(u^h, u^h; \Omega^h) = \int\limits_{\Omega^h} \biggl(\mu \sum_{j,k=1}^{3} \biggl| \frac{\partial u^h_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u^h_k}{\partial x_j} \biggr|^2 + \lambda \biggl| \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u^h_j}{\partial x_j} \biggr|^2 \biggr) dx, \quad (10)$$

которая порождает билинейную форму в левой части интегрального тождества

$$E(u^h, \psi^h; \Omega^h) = \Lambda^h (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{при всех} \quad \psi^h \in \mathcal{H}^h_= := H^1_0(\Omega^h; \omega^0 \bigcup \omega^h)^3, \quad (11)$$

служащего вариационной постановкой задачи (2), (3), (5). Здесь фигурирует пространство Соболева $H^1_0(\Omega^h; \omega^0 \bigcup \omega^h)$ функций, обращающихся в нуль на основаниях $\omega^0 = \omega \times \{0\}$ и $\omega^h \times \{h\}$ пластины (1). Интегрированием по частям легко проверить, что для полей смещений $u^h \in H^1_0(\Omega^h)^3$, удовлетворяющих обоим краевым условиям (3) и (4), левые части соотношений (7) и (11) совпадают. Неравенство Корна (см., например, [5; 6, гл. 3, § 1]) показывает, что

$$E(u^h, u^h; \Omega^h) \geqslant C h^{-2} \| u^h; L^2(\Omega^h) \|^2 \quad \text{для} \quad u^h \in \mathcal{H}^h_=. \quad (12)$$

Множитель C не зависит от параметра $h \in (0, h_=]$ при некотором $h_= > 0$ и, разумеется, от вектор-функции u^h. Для $u^h \in H^1_0(\Omega^h)^3$ можно взять $C = \mu\pi^2$ и $h_= := h_\square = 1$, но при отказе от условия Дирихле (4) на поверхности Γ^h точная оценка константы C неизвестна.

Основная цель работы – исследовать поведение собственных пар $\{\text{число}; \text{вектор-функция}\}$ задач (2)–(4) и (2), (3), (5). Для первой из них – задачи Дирихле – в п. 2 построена плоская модель, а в пп. 3 и 5 доказаны теоремы 1–3, предоставляющие информацию о точности приближения собственных частот и мод трёхмерной прокладки (1) собственными парами двумерной задачи на сечении ω. Таким образом, получены традиционные результаты о деформации тонких упругих тел (ср. монографии [6–9] и др.), хотя ранее спектр задачи (2)–(4) не исследовался.

Для второй задачи – смешанной краевой – характерны существенные отличия как в поведении собственных пар при $h \to +0$, так и в степени исполнения асимптотического анализа. В п. 6 на основе изучения явления пограничного слоя (см. п. 4) продемонстрирована "ущербность" плоской модели прокладки Ω^h со свободной боковой поверхностью Γ^h: во-первых, не удаётся обоснованно (с оценками погрешностей) назначить краевые условия на границе γ сечения ω, и, во-вторых, асимптотика любого количества собственных чисел (8) не может быть описана посредством решений какой-либо краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в области $\omega\subset\mathbb{R}^2$ (теорема 4). Кроме того, в теореме 5 из п. 6 установлено, что собственные вектор-функции задачи (2), (3), (5) сугубо локализованы в малой окрестности кромки пластины и экспоненциально затухают при удалении от неё.

Вместе с тем асимптотическое строение собственных пар рассматриваемой смешанной краевой задачи осталось невыясненным, хотя в статье [10] уже были приведены асимптотические конструкции в похожей, но более простой скалярной задаче. В последнем п. 7 обсуждаются родственные задачи об упругих пластинах и упоминаются другие открытые вопросы асимптотического анализа.

2. Формальная асимптотика в задаче Дирихле. Для собственных пар $\{\Lambda^h;u^h\}\in\in\mathbb{R}_+\times H_0^1(\Omega^h)$ задачи (2)–(4) примем анзацы

$$\Lambda^h=\mu\pi^2h^{-2}+\beta+\ldots \tag{13}$$

и

$$u_i^h(x)=v_i(y)\sin(\pi\zeta)+h^2V_i(y,\zeta)+\ldots,\quad i=1,2, \tag{14}$$

$$u_3^h(x)=hV_3(y,\zeta)+\ldots \tag{15}$$

Вектор $v=(v_1,v_2)$, число β и функции V_k подлежат определению, $\zeta=h^{-1}z$ – растянутая поперечная координата, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом анализе. Первые слагаемые в правых частях соотношений (13) и (14) подобраны так, чтобы в главном выполнялись равенства (2) и (3). Собрав множители при h^{-1} в системе (2), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(\lambda+2\mu)\partial_\zeta^2V_3(y,\zeta)-\mu\pi^2V_3(y,\zeta)=(\lambda+\mu)\pi\cos(\pi\zeta)\nabla_y\cdot v(y),\quad \zeta\in(0,1), \tag{16}$$

с параметром $y\in\omega$. Дополнив это уравнение проистекающими из (3) условиями Дирихле

$$V_3(y,0)=V_3(y,1)=0,$$

для главного члена анзаца (15) находим, что $V_3(y,\zeta)=Z(\zeta)\nabla_y\cdot v(y)$ и

$$Z(\zeta)=\frac{1}{\pi}\biggl(\cos(\pi\zeta)-\cos(\pi\alpha\zeta)+\frac{1+\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\sin(\pi\alpha\zeta)\biggr),\quad \alpha=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\in(0,1/\sqrt{2}]. \tag{17}$$

Отметим, что $\sin(\pi\alpha)>0$.

Очередная задача для вектора $V'=(V_1,V_2)$ получается такой:

$$-\mu\partial_\zeta^2V'(y,\zeta)-\mu\pi^2V'(y,\zeta)=F(y,\zeta):=(\lambda+\mu)\partial_\zeta Z(\zeta)\nabla_y\nabla_y\cdot v(y)+$$

$$+\sin(\pi\zeta)(\beta v(y)+\mu\Delta_y v(y)+(\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y\cdot v(y)),\quad \zeta\in(0,1),$$

$$V'(y,0)=V'(y,1)=0. \tag{18}$$

Задача (18) имеет решение в том и только в том случае, если среднее значение произведения $\sin(\pi\zeta)F(y,\zeta)$ по $\zeta\in(0,1)$ обращается в нуль. Непосредственными вычислениями такое требование превращается в систему двух дифференциальных уравнений

$$-\mu\Delta_y v(y)-(\lambda_\sharp(\alpha)+\mu)\nabla_y\nabla_y\cdot v(y)=\beta v(y),\quad y\in\omega, \tag{19}$$

в которой

$$\lambda_\sharp(\alpha)=4(\lambda+\mu)\alpha(\sin(\pi\alpha))^{-1}(1+\cos(\pi\alpha))-\mu. \tag{20}$$

Соблюдая для функций (14) условия (4) на боковой поверхности цилиндра (1), замкнем систему (19) условиями Дирихле

$$v(y) = 0, \quad y \in \gamma = \partial\omega. \tag{21}$$

Итак, получена плоская задача теории упругости на сечении ω. Её вариационная постановка принимает вид

$$\mu(\nabla_y v, \nabla_y \varphi)_\omega + (\lambda_\sharp(\alpha) + \mu)(\nabla_y \cdot v, \nabla_y \cdot \varphi)_\omega = \beta(v, \varphi)_\omega \quad \text{при всех} \quad \varphi \in H_0^1(\omega)^2. \tag{22}$$

Новая постоянная Ламе (19), положительная при больших $\lambda > 0$, становится отрицательной при $\lambda = 0$. Вместе с тем $\lambda_\sharp(\alpha) + \mu > 0$ для всех $\lambda \geqslant 0$, и поэтому билинейная форма из левой части интегрального тождества (22) положительно определена.

Предложение 1. *Спектр задачи (22) (или (19), (21) в дифференциальной форме) образует монотонную положительную последовательность нормальных собственных чисел*

$$0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{23}$$

Соответствующие собственные вектор-функции $v_{(1)}, v_{(2)}, v_{(3)}, \ldots, v_{(m)}, \ldots \in H_0^1(\omega)^2$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$(v_{(m)}, v_{(m)})_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

3. О сходимости. Зафиксируем номер $m \in \mathbb{N}$. Далее в замечании из п. 5 будет пояснено соотношение

$$\Lambda_m^h - \mu\pi^2 h^{-2} \leqslant B_m, \tag{25}$$

а значит, вдоль некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеет место сходимость

$$\Lambda_m^{h_j} - \mu\pi^2 h_j^{-2} \to \boldsymbol{\beta}_m. \tag{26}$$

Далее индексы j и m по возможности не пишем.

Положим

$$\mathbf{v}^h(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \int\limits_0^h u^h(y,z) \sin\left(\pi\frac{z}{h}\right) dz, \quad \mathbf{V}^h(y,z) = u^h(y,z) - \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left(\pi\frac{z}{h}\right) \mathbf{v}^h(y). \tag{27}$$

Поскольку среднее произведения $\sin(\pi h^{-1} z)\mathbf{V}^h(y,z)$ по $z \in (0,h)$ равно нулю, справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_0^h |\partial_z \mathbf{V}^h(y,z)|^2 \, dz \geqslant 4\frac{\pi^2}{h^2} \int\limits_0^h |\mathbf{V}^h(y,z)|^2 \, dz. \tag{28}$$

Кроме того, в силу условия нормировки (9) имеем

$$1 = \|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 = \|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2. \tag{29}$$

Отбрасывая ненужные члены, выводим из интегрального тождества (7) соотношение

$$\Lambda^h(\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2) \geqslant \mu\|\partial_z u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 =$$

$$= \mu\frac{\pi^2}{h^2}\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 + \mu\|\partial_z \mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + 2\mu\frac{\pi}{h} \int\limits_{\Omega^h} \cos\left(\pi\frac{z}{h}\right) \mathbf{v}^h(y) \partial_z \mathbf{V}^h(y,z) \, dy \, dz. \tag{30}$$

При учёте определений (27) интегрированием по частям превращаем последний интеграл в нуль. Таким образом, соотношения (25) и (28)–(30) приводят при малом h к оценкам

$$C \geqslant (\Lambda^h - \mu\pi^2 h^{-2})\|\mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 \geqslant (4\mu\pi^2 h^{-2} - \Lambda^h)\|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2, \quad \|\mathbf{V}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant ch^2. \tag{31}$$

Обозначим $u^{h\prime} = (u_1^h, u_2^h)$ и заметим, что

$$\mu\|\nabla_y u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime} + \partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}\mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + 2\mu\int\limits_{\Omega^h} \partial_z u_3^h \nabla_y \cdot u^{h\prime} dx \geqslant \frac{\mu}{3}\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2.$$

Следовательно, при малом $h > 0$ верны формулы

$$\Lambda^h(\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2) \geqslant \mu\|\partial_z u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\nabla_y u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 +$$

$$+ \mu\|\nabla_y \cdot u^{h\prime} + \partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant \mu\frac{\pi^2}{h^2}\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 + \mu\frac{4\pi^2}{3h^2}\|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2,$$

$$\left(\mu\frac{4\pi^2}{3h^2} - \Lambda^h\right)\|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant \left(\Lambda^h - \mu\frac{\pi^2}{h^2}\right)\|u^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad \text{и} \quad \|u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \leqslant ch^2. \tag{32}$$

Наконец, полученные соотношения приводят к неравенствам

$$\Lambda^h\|u^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \geqslant \mu\|\partial_z u_3^h; L^2(\Omega^h)\|^2 + \|\nabla_y(\mathbf{v}^h\sqrt{2h^{-1}}\sin(\pi h^{-1}z) + \mathbf{V}^h); L^2(\Omega^h)\|^2,$$

$$\|\nabla_y \mathbf{v}^h; L^2(\omega)\|^2 \leqslant c. \tag{33}$$

Подведём итог. Согласно формулам (29) и (33) вдоль подпоследовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (сохраняем обозначение) имеют место сходимости

$$\mathbf{v}_{(m)i}^{h_j} \to \mathbf{v}_{(m)i}^0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{v}_{(m)3}^{h_j} \to \mathbf{v}_{(m)3}^0 \quad \text{слабо в } H_0^1(\omega) \text{ и сильно в } L^2(\omega), \tag{34}$$

причём $\|\mathbf{v}_{(m)i}^{0\prime}; L^2(\omega)\| = 1$ и $\mathbf{v}_{(m)3}^0 = 0$ в силу соотношений (29), (31) и (32). Кроме того, взяв $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, подставим в интегральное тождество (7) пробную вектор-функцию ψ^h с компонентами

$$\psi_i^h(x) = \sqrt{2h^{-1}}\sin(\pi h^{-1}z)\varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \quad \psi_3^h(x) = \sqrt{2h}Z(h^{-1}z)\nabla_y \cdot \varphi(y).$$

После интегрирования по частям и простых преобразований приходим к равенству

$$\sqrt{2h^{-1}}(u^{h\prime}, \sin(\pi\zeta)(\mu\Delta_y\varphi + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot \varphi(1 + \partial_\zeta Z)))_{\Omega^h} + \sqrt{2h^{-1}}(\Lambda^h - \mu\pi^2h^{-2})(u^{h\prime}, \sin(\pi\zeta)\varphi)_{\Omega^h} =$$

$$= \sqrt{2h^{-3}}(u^{h\prime}, ((\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 Z + \mu\pi^2h^{-2}Z + (\lambda + \mu)\pi\cos(\pi\zeta))\nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h} +$$

$$+ \sqrt{2h}(u_3^h, \mu Z\Delta_y\nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h} + \sqrt{2h}(\Lambda^h - \mu\pi^2h^{-2})(u_3^h, Z\nabla_y \cdot \varphi)_{\Omega^h}. \tag{35}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль благодаря уравнению (16), а пределы остальных двух – нули, так как выполняются соотношения (32), (25) и неравенство

$$\|Z\Delta_y\nabla_y \cdot \varphi; L^2(\Omega^h)\| + \|Z\nabla_y \cdot \varphi; L^2(\Omega^h)\| \leqslant c_\varphi\sqrt{h}.$$

Согласно сходимостям (26), (34) и формулам (27), (31) предел второго слагаемого из левой части равенства (35) – скалярное произведение $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}^{0\prime}, \varphi)_\omega$. На основании оценки (31) в первом слагаемом можно сделать замену $u^{h\prime} \mapsto \sqrt{2h^{-3}}\mathbf{v}^h\sin(\pi\zeta)$ – его предел аннулируется после подстановки $u^{h\prime} \mapsto \mathbf{V}^h$. Наконец, вычисления из п. 2, касающиеся условий разрешимости задачи (18), позволяют найти общий предел

$$(\mathbf{v}^{0\prime}, \mu\Delta_y\varphi + (\lambda_\sharp(\alpha) + \mu)\nabla_y\nabla_y \cdot \varphi + \boldsymbol{\beta}\varphi)_\omega = 0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in C_c^\infty(\omega)^2. \tag{36}$$

Соотношение (36) превращаем в интегральное тождество (22) и по замыканию переносим на все пробные вектор-функции $\varphi \in H_0^1(\omega)^2$. Итак, в предположении (25) доказана

Теорема 1. *Предельные переходы (26) и (34) предоставляют собственную пару* $\{\boldsymbol{\beta}_m; \mathbf{v}^{0\prime}_{(m)}\}$ *задачи (36).*

Полученное утверждение обладает несколькими недостатками, например, неизвестны скорости сходимостей и номер собственного числа $\boldsymbol{\beta}_m$ в последовательности (23). Для их устранения изучим явление пограничного слоя.

4. Спектральная задача в полуполосе. Формальный вывод системы (19) совершенно безразличен к типу краевых условий на боковой поверхности Γ^h пластины Ω^h и поэтому "обслуживает" смешанную краевую задачу (2), (3), (5). Осложнения возникают при постановке краевых условий на границе γ сечения ω. Как обычно (ср. [11–13; 14, гл. 16] и др.), нужно построить пограничный слой вблизи кромки пластины – требование его экспоненциального затухания как раз и определяет искомые условия. Растянем координаты

$$(n, z) \mapsto \xi = (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}n, h^{-1}z), \tag{37}$$

но сохраним прежний масштаб для координаты s. Замена $x \mapsto (\xi, s)$ и формальный переход к $h = 0$, исключая переменную s, расщепляют систему (2) на две: систему двух уравнений о плоском деформированном состоянии пластины

$$-\mu\Delta_\xi w'(\xi) - (\lambda+\mu)\nabla_\xi\nabla_\xi \cdot w'(\xi) = Mw'(\xi), \quad \xi \in \Pi, \tag{38}$$

для вектора $w' = (w_1, w_2)$ в полуполосе

$$\Pi = \{\xi : \xi_1 < 0, \ \ \xi_2 \in (0,1)\} \tag{39}$$

и скалярное уравнение

$$-\mu\Delta_\xi w_3(\xi) = Mw_3(\xi), \quad \xi \in \Pi, \tag{40}$$

для депланации w_3. При этом M – новое обозначение спектрального параметра, и с допустимой погрешностью координаты (37) можно интерпретировать как декартовы, т.е. $w_1 = w_n$, $w_2 = w_z$ и $w_3 = w_s$ – образы смещений u_n^h, u_z^h и u_s^h, а напряжения вычисляются по формулам (6) при замене дифференцирования по x_i дифференцированием по ξ_i и удалении всех производных по x_3. В соответствии с равенствами (3) и (4) или (5) замыкаем систему (38) следующими краевыми условиями на боковых сторонах и торце $\varpi = \{\xi : \xi_1 = 0, \ \ \xi_2 \in (0,1)\}$ полуполосы (39):

$$w'(\xi_1, 0) = w'(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 < 0, \tag{41}$$

$$w'(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi) + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}(\xi) = \mu\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) + \mu\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi. \tag{42}$$

Краевые условия для уравнения (40) принимают вид

$$w_3(\xi_1, 0) = w_3(\xi_1, 1) = 0, \quad \xi_1 < 0,$$

$$w_3(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad \mu\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad \xi \in \varpi. \tag{43}$$

Спектры скалярных задач Дирихле или смешанной краевой легко изучаются при помощи метода Фурье. Для задачи (40), (43) непрерывный спектр – луч $[M_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки

$$M_\dagger = \mu\pi^2, \tag{44}$$

а точечный спектр пуст, т.е. нет ни изолированных, ни вкраплённых в непрерывный спектр собственных чисел.

Исследование спектров задач теории упругости (38), (41), (42) значительно сложнее, и до сих пор нет полных ответов для смешанной краевой задачи. В работах [10, 15, 16] доказано, что при постановке на торце ϖ краевых условий в напряжениях непрерывный спектр – луч $[M_\dagger, +\infty)$ с прежней точкой отсечки (44), но дискретный спектр содержит по крайней мере одно собственное число

$$M_1 \in (0, M_\dagger). \tag{45}$$

Соответствующая собственная вектор-функция $W_{(1)} \in H^1(\Pi)^2$ обращается в нуль на боковых сторонах полуполосы Π, исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и удовлетворяет следующему из вариационной постановки задачи равенству

$$M_1 \|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 = E_\sqsupset(W_{(1)}, W_{(1)}; \Pi) :=$$

$$:= \int\limits_\Pi \left(2\mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} \right|^2 + 2\mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial W_{(1)2}}{\partial \xi_1} \right|^2 + \lambda \left| \frac{\partial W_{(1)1}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W_{(1)2}}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) d\xi. \tag{46}$$

Кратность дискретного спектра смешанной задачи теории упругости (38), (41), (42) осталась неизвестной и, что особенно важно, неочевидно, возникает ли в этой задаче пороговый резонанс? Согласно публикациям [17, 18] пороговый резонанс реализуется тогда, когда у задачи при $M = M_\dagger$ появляется нетривиальное ограниченное решение

$$w^\dagger(\xi) = T e_{(1)} \sin(\pi \xi_2) + \widetilde{w}^{\,\dagger}(\xi), \tag{47}$$

в котором остаток $\widetilde{w}^{\,\dagger}(\xi)$ экспоненциально затухает на бесконечности, $e_{(1)} = (1, 0)$ и $T \in \mathbb{R}$. Если коэффициент T обратился в нуль, то $M_\dagger$ – собственное число из точечного спектра и $w^\dagger = \widetilde{w}^{\,\dagger} \in H^1(\Pi)^2$ – собственная вектор-функция, т.е. захваченная упругая волна. В случае $T \neq 0$ решение (47) – почти стоячая волна и пороговый резонанс правильный по терминологии [18]. Например, в смешанной краевой задаче (40), (43) реализуется именно правильный пороговый резонанс и $\sin(\pi\xi_2)$ – нужное решение, но в скалярной задаче Дирихле для того же уравнения (40) пороговый резонанс отсутствует полностью.

Предложение 2. *В векторной задаче Дирихле (38), (41), (42) нет ни точечного спектра, ни порогового резонанса.*

Доказательство. Простой способ проверки утверждения, основанный на классическом приёме [19], заимствуем из статей [15, 16]. Пусть w' – либо захваченная волна, либо почти стоячая волна (47) на пороге. Благодаря слабой сингулярности напряжений в вершине прямого угла с данными Дирихле на его сторонах (см. [20] и [21, гл. III, § 8]), производная $W' = \partial w'/\partial \xi_1$ принадлежит пространству $H^1(\Pi)^2$, затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и удовлетворяет равенствам (38) и (41). Таким образом, для w' и W' верна формула Грина, из которой исчезают все интегралы, кроме

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=1,2} \sigma_{1i}(w'; 0, \xi_2) W'_i(0, \xi_2)\, d\xi_2 = \int\limits_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) \right|^2 \right) d\xi_2,$$

а значит, аннулируется и он, т.е. поле w' обращается в нуль на торце ϖ вместе со своими производными, что невозможно в силу теоремы о единственности продолжения решений системы Ламе (см., например, [22, гл. 4]).

Общие принципы анализа явления пограничного слоя в тонких областях (см. [11; 14, гл. 16; 23; 24] и др.) связывают тип краевого условия в предельной задаче пониженной размерности именно с качеством порогового резонанса, в частности, с его отсутствием. Так, правомочность постановки условия Дирихле (21), замыкающего систему дифференциальных уравнений (19), обусловлена именно предложением 2 (в п. 2 краевое условие назначено эвристически). Поскольку о пороговом резонансе в смешанной краевой задаче (38), (41), (42) сведений нет, обоснованно снабдить систему (19) краевыми условиями автор не может, но это обстоятельство непринципиально, так как в п. 6 будет показано, что анзац (13) просто непригоден для её собственных чисел (8), асимптотику которых следует искать из совершенно иной предельной задачи. Вывод последней выходит за рамки данной работы.

5. Обоснование асимптотической модели. В гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^h := H_0^1(\Omega^h)^3$$

введём скалярное произведение

$$\langle u^h, \psi^h \rangle_h = E_\square(u^h, \psi^h; \Omega^h) \tag{48}$$

и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{K}^h$,

$$\langle \mathcal{K}^h u^h, \psi^h \rangle_h = (u^h, \psi^h)_{\Omega^h} \quad \text{для всех} \quad u^h, \psi^h \in \mathcal{H}^h. \tag{49}$$

Оператор $\mathcal{K}^h$ компактный и, следовательно, в силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 из [3] его существенный спектр – одна точка $\kappa = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность собственных чисел

$$\kappa_1^h \geqslant \kappa_2^h \geqslant \kappa_3^h \geqslant \ldots \geqslant \kappa_m^h \geqslant \ldots \to +0. \tag{50}$$

Благодаря определениям (48) и (49), вариационная постановка (7) задачи (2)–(4) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^h u^h = \kappa^h u^h \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^h,$$

а члены последовательностей (50) и (8) находятся в отношении

$$\kappa_m^h = (\Lambda_m^h)^{-1}. \tag{51}$$

Следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [25]), обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, книгу [3, гл. 6]).

Лемма 1. *Пусть $U^h \in \mathcal{H}^h$ и $K^h \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|U^h; \mathcal{H}^h\| = 1, \quad \|\mathcal{K}^h U^h - K^h U^h; \mathcal{H}^h\| =: \delta^h \in [0, K^h). \tag{52}$$

Тогда у оператора $\mathcal{K}^h$ есть собственное число $\kappa_{n(h)}^h$, подчинённое неравенству $|K^h - \kappa_{n(h)}^h| \leqslant \delta^h$. Более того, для любого $\delta_*^h \in (\delta^h, K^h)$ найдутся коэффициенты $\mathbf{C}_{\mathcal{N}^h}, \ldots, \mathbf{C}_{\mathcal{N}^h + \mathcal{X}^h - 1}$, при которых верны формулы

$$\Bigg\| U^h - \sum_{\ell = \mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h + \mathcal{X}^h - 1} \mathbf{C}_\ell^h \mathbf{U}_{(\ell)}^h; \mathcal{H}^h \Bigg\| \leqslant 2 \frac{\delta^h}{\delta_*^h}, \qquad \sum_{\ell = \mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h + \mathcal{X}^h - 1} |\mathbf{C}_\ell^h|^2 = 1, \tag{53}$$

где $\kappa_{\mathcal{N}^h}^h, \ldots, \kappa_{\mathcal{N}^h + \mathcal{X}^h - 1}^h$ – набор всех собственных чисел оператора $\mathcal{K}^h$ из сегмента $[K^h - \delta_*^h, K^h + \delta_*^h]$, а соответствующие собственные векторы $\mathbf{U}_{(\mathcal{N}^h)}^h, \ldots, \mathbf{U}_{(\mathcal{N}^h + \mathcal{X}^h - 1)}^h$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathbf{U}_{(p)}^h, \mathbf{U}_{(q)}^h \rangle_h = \delta_{p,q}. \tag{54}$$

Согласно связи (51) спектральных параметров и асимптотическим конструкциям из п. 2 в качестве почти собственной пары возьмём

$$K_m^h = h^2 (\mu \varpi^2 + h^2 \beta_m)^{-1}, \tag{55}$$

$$U_{(m)}^h(x) = \|V_{(m)}^h + W_{(m)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} (V_{(m)}^h(x) + W_{(m)}^h(x)). \tag{56}$$

Здесь β_m – собственное число предельной задачи (19), (21), а из соответствующей собственной вектор-функции $v_{(m)}$, нормированной равенством (9), сформируем сложно устроенный вектор $V^h_{(m)} \in \mathcal{H}^h$ с компонентами

$$V^h_{(m)i}(x) = (v_{(m)i}(y) + hv^{\#}_{(m)i}(y))\sin(\pi\zeta) + h^2 X_h(y) V_{(m)i}(y,\zeta), \quad i = 1,2,$$

$$V^h_{(m)3}(x) = hZ(\zeta)\nabla_y \cdot v_{(m)}(y), \tag{57}$$

где $(V_{(m)1}, V_{(m)2})$ – решение задачи (18), в которой $\beta = \beta_m$ и $v = v_{(m)}$, а $v^{\#}_{(m)} = (v^{\#}_{(m)1}, v^{\#}_{(m)2})$ – какая-нибудь гладкая в $\overline{\omega} = \omega \bigcup \partial\omega$ вектор-функция, удовлетворяющая краевому условию

$$v^{\#}_i(y) = T\nabla_y \cdot v(y), \quad y \in \gamma. \tag{58}$$

Множитель T и экспоненциально затухающее при $\xi_1 = h^{-1}n \to -\infty$ слагаемое

$$W^h_{(m)}(x) = h\chi_\omega(y)\widetilde{w}(h^{-1}n, h^{-1}z)\nabla_y \cdot v_{(m)}(y) \tag{59}$$

взяты из разложения (47) решения w' системы (38) при $M = M_\dagger$ с краевыми условиями (41) и

$$w'_1(\xi) = 0, \quad w'_2(\xi) = -Z(\xi_2), \quad \xi \in \varpi, \tag{60}$$

причём $\widetilde{w}_1$ и $\widetilde{w}_2$ – проекции вектора $\widetilde{w}(h^{-1}n, h^{-1}z)$ на оси n и z, а проекция на ось s нулевая. Существование решения, стабилизирующегося на бесконечности к выражению $Te_{(1)}\sin(\pi\xi_2)$, обеспечено общими результатами [26, гл. 5, §§ 4, 5] и [16] в силу отсутствия порогового резонанса (см. предложение 2). Наконец, гладкие срезающие функции $\chi_\omega, X_h \in C^\infty(\overline{\omega})$ удовлетворяют требованиям

$$\chi_\omega = 1 \ \text{в} \ d\text{-окрестности} \ \mathcal{V}_d \ \text{контура} \ \gamma, \ \ \chi_\omega = 0 \ \text{вне окрестности} \ \mathcal{V},$$

$$X_h = 0 \ \text{в} \ \mathcal{V}_h, \ \ X_h = 1 \ \text{вне} \ \mathcal{V}_{2h}. \tag{61}$$

Первая из них нужна для продолжения пограничного слоя с множества $\mathcal{V} \times (0,h)$, где введены координаты (n,s,z), на всю область Ω^h, а вторая благодаря соотношениям (58) и (60) обеспечивает выполнение краевого условия (4) суммой $V^h_{(m)} + W^h_{(m)}$, которая в итоге попадает в пространство $H^1_0(\Omega^h)^3$.

Оценим величину δ^h_m, найденную согласно формуле (52) по паре (55). Далее индекс m не пишем. При учёте соотношений (48) и (49) имеем

$$\delta^h = \sup|\langle \mathcal{K}^h U^h - K^h U^h, \Psi^h\rangle_h| = \tag{62}$$

$$= (\mu\pi^2 h^{-2} + \beta)^{-1}\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \sup|E(V^h + W^h, \Psi^h; \Omega^h) - (\mu\pi^2 h^{-2} + \beta)(V^h + W^h, \Psi^h)_{\Omega^h}| =$$

$$= (\mu\pi^2 h^{-2} + \beta)^{-1}\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \sup|((\mu\Delta_x + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla \cdot + \mu\pi^2 h^{-2} + \beta)(V^h + W^h), \Psi^h)_{\Omega^h}|.$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^h$, т.е. $\|\Psi^h; \mathcal{H}^h\| \leqslant 1$ и выполнено неравенство (12). В лемме 2 будет проверено, что

$$\|V^h + W^h; \mathcal{H}^h\| \geqslant ch^{-1/2}, \quad c > 0. \tag{63}$$

Скалярное произведение между последними знаками модуля в (62) представим в виде

$$((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot + \beta)v\sin(\pi\zeta) + (\lambda+\mu)\partial_\zeta Z\nabla_y \cdot v + \mu(\partial^2_\zeta + \pi^2)V', \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} +$$

$$+ \mu(\partial^2_\zeta V', (1 - X_h)\Psi^{h\prime})_{\Omega^h} + h^{-1}((((\lambda+2\mu)\partial^2_\zeta Z + \mu\pi^2 Z + \pi(\lambda+\mu)\cos(\pi\zeta))\nabla_y \cdot v, \Psi^h_3)_{\Omega^h} +$$

$$+ h((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_y\nabla_y \cdot + \beta)(v^{\#}\sin(\pi\zeta) + Z\nabla_y \cdot v), \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} +$$

$$+ h((\mu\Delta_x + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x\cdot + \mu\pi^2 h^{-2} + \beta)(\chi_\omega \widetilde{w}), \Psi^h)_{\Omega^h} +$$

$$+ h^2((\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x\cdot + \beta)(X_h V'), \Psi^{h\prime})_{\Omega^h} =: I_v^h + I_X^h + h^{-1} I_Z^h + h I_\#^h + h I_w^h + h^2 I_V^h.$$

В силу уравнений (16) и (18) слагаемые I_v^h и I_Z^h обращаются в нуль. Оценим остальные. При учёте формул (61) и (12) находим, что

$$|I_X^h| \leqslant c\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(\mathrm{mes}_3\,\mathrm{supp}\,(1-X_h))^{1/2} \leqslant Ch^2,$$

$$h|I_\#^h| \leqslant c\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(\mathrm{mes}_3\Omega^h)^{1/2} \leqslant Ch^{5/2},$$

$$h^2|I_V^h| \leqslant ch^2\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(h^{-2}\mathrm{mes}_3\,\mathrm{supp}\,|\nabla_y X_h| + \mathrm{mes}_3\Omega^h)^{1/2} \leqslant Ch^2. \tag{64}$$

Здесь учтены объёмы $O(h)$ и $O(h^2)$ множеств Ω^h и $\mathrm{supp}\,(1-X_h) \supset \mathrm{supp}\,|\nabla_y X_h|$, а также мажоранты $c_1 h^{-1}$ и $c_2 h^{-2}$ для модулей первых и вторых производных функции X_h.

Осталось исследовать слагаемое hI_w^h, содержащее экспоненциально затухающий пограничный слой (59). Обозначив через $L(\nabla_x)$ матрицу дифференциальных операторов из левой части системы (2), заметим, что носители коэффициентов коммутатора $[L(\nabla_x), \chi_\omega]$, т.е. дифференциального оператора $L(\nabla_x)\chi_\omega - \chi_\omega L(\nabla_x)$ первого порядка, расположены на множестве

$$\{x \in \overline{\Omega^h} : y \in \mathcal{V},\quad \mathrm{dist}\,(y,\gamma) > h\},$$

где величины $\widetilde{w}(\xi)$ и $\nabla_\xi \widetilde{w}(\xi)$ становятся экспоненциально малыми. Кроме того, замена координат (37) и переход к $h=0$ в п. 4 сопровождался спрямлением границы Γ^h и замораживанием коэффициентов в операторе $L(\nabla_x)$, а значит, выражение $\chi_\omega(y)L(\nabla_x)(\widetilde{w}(\xi)\nabla_y \cdot v(y))$ представляет собой линейную комбинацию самой вектор-функции $\widetilde{w}$ и её производных первого и второго порядков с коэффициентами $O(1)$ и $O(h^{-1})$, $O(h^{-1}|n|)$ соответственно. Поскольку интеграл по пластине Ω^h от функции $F^h(x) = O((\mathrm{dist}\,(y,\gamma))^k e^{-\delta\,\mathrm{dist}\,(y,\gamma)/h})$ есть $O(h^{2+k})$, обнаруживаем, что

$$h|I_w^h| \leqslant ch\|\Psi^{h\prime}; L^2(\Omega^h)\|(e^{-\delta d/h} + h(1+h^{-1})) \leqslant Ch^2. \tag{65}$$

Итак, из соотношений (55), (63)–(65) следует, что величина (62) не превосходит $c_m h^{9/2}$, т.е. по лемме 1 найдётся собственное число $\kappa^h_{n(h)}$ оператора $\mathcal{K}^h$, подчинённое неравенству $|\kappa^h_{n(h)} - K^h_m| \leqslant c_m h^{9/2}$, или согласно связи (51) – собственное число $\Lambda^h_{n(h)}$ задачи (2)–(4), для которого выполнено соотношение

$$|\Lambda^h_{n(h)} - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant c_m h^{5/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m)\Lambda^h_{n(h)}. \tag{66}$$

Отсюда вытекает формула

$$\Lambda^h_{n(h)} \leqslant 2(\mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m) \tag{67}$$

при таких h, что $2c_m h^{5/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m) \leqslant 1$, влекущая за собой искомое неравенство

$$|\Lambda^h_{n(h)} - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant 2c_m h^{1/2}(\mu\pi^2 + h^2\beta_m)^2 \leqslant C_m h^{1/2} \quad \text{при} \quad h \in (0, h_m] \tag{68}$$

с некоторыми величинами $h_m > 0$ и C_m.

Пусть теперь β_m – $\varkappa_m$-кратное собственное число задачи (19), (21), т.е.

$$\beta_{m-1} < \beta_m = \ldots = \beta_{m+\varkappa_m-1} < \beta_{m+\varkappa_m}. \tag{69}$$

По формулам (56), (57) определим почти собственные вектор-функции $U^h_{(p)}$, $p = \overline{m, m+\varkappa_m-1}$, отвечающие почти собственному числу (55).

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$|\langle U^h_{(p)}, U^h_{(q)}\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant c_m h, \quad p,q = \overline{m, m+\varkappa_m-1}. \tag{70}$$

Доказательство. Структуры (57) и (59) обеспечивают простые формулы

$$|\langle V^h_{(p)}, V^h_{(q)}\rangle_h - \mu\pi^2(2h)^{-1}(v_{(p)}, v_{(q)})_\omega| \leqslant c_m, \quad |\langle W^h_{(p)}, W^h_{(q)}\rangle_h| \leqslant c_m h.$$

В первой из них использовано определение (48), а также вычислены производная $\partial_z \sin(\pi z/h)$ и интеграл от $\cos^2(\pi z/h)$. Кроме того, приняв во внимание соотношение (24), применяем эти формулы дважды – сначала при $p = q$ для обработки нормы $\|V^h_{(p)} + W^h_{(p)}; \mathcal{H}^h\|$, а затем при разных индексах $p, q = \overline{m, m + \varkappa_m - 1}$. В итоге приходим к неравенствам (70). Лемма доказана.

Применим вторую часть леммы 1 при $\delta^h = \max\{\delta^h_m, \ldots, \delta^h_{m+\varkappa_m-1}\}$ и $\delta^h_* = t^{-1}\delta^h$, причём величину $t \in (0,1)$ зафиксируем далее. Обозначим через $\mathbf{C}^h_{(p)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h}$ и $\mathbf{S}^h_{(p)} \in \mathcal{H}^h$ столбец коэффициентов и линейную комбинацию собственных векторов $\mathbf{U}^h_{(m)}, \ \ldots, \ \mathbf{U}^h_{(m+\varkappa_m-1)}$, найденных по $U^h_{(p)}$. Благодаря условиям ортогональности и нормировки (54) имеем

$$|\mathbf{C}^h_{(p)} \cdot \mathbf{C}^h_{(q)} - \delta_{p,q}| = |\langle \mathbf{S}^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)}\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant |\langle \mathbf{S}^h_{(p)} - U^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)}\rangle_h| +$$

$$+ |\langle U^h_{(p)}, \mathbf{S}^h_{(q)} - U^h_{(p)}\rangle_h| + |\langle U^h_{(p)}, U^h_{(q)}\rangle_h - \delta_{p,q}| \leqslant 2t + 2t + c_m h.$$

Таким образом, при малых t и h столбцы $\mathbf{C}^h_{(m)}, \ldots, \mathbf{C}^h_{(m+\varkappa_m-1)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^h}$ "почти ортонормированы", что возможно лишь в случае $\mathcal{X}^h \geqslant \varkappa_m$, а значит, на сегменте $[K^h_m - tc_m h^{9/2}, K^h_m + tc_m h^{9/2}]$ расположено не менее $\varkappa_m$ собственных чисел оператора $\mathcal{K}^h$. В итоге, повторив выкладки (66) и (67), получаем, что при некотором $n(h) \in \mathbb{N}$ собственные числа $\Lambda^h_{n(h)}, \ \ldots \ldots, \ \Lambda^h_{n(h)+\varkappa_m-1}$ задачи (2)–(4) удовлетворяют оценке (68) с новым множителем C_m.

Замечание. Поскольку каждому собственному числу β_k предельной задачи (19), (21) поставлено в соответствие собственное число $\Lambda^h_{n_k(h)}$ исходной задачи (2)–(4), расположенное в малой окрестности точки $\mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m$, при $h \leqslant \min\{h_1, \ldots, h_{m+\varkappa_m-1}\}$ справедливо неравенство $n_{m+\varkappa_m-1}(h) \geqslant m + \varkappa_m - 1$, влекущее за собой оценку (25) с мажорантой $B_m \geqslant \beta_m + C_m\sqrt{h_m}$.

Подведём итог проделанным вычислениям.

Теорема 2. *Собственные числа (8) и (23) задач (2)–(4) и (19), (21) находятся в отношении*

$$|\Lambda^h_m - \mu\pi^2 h^{-2} - \beta_m| \leqslant c_m\sqrt{h} \quad \text{при} \quad h \in (0, h_m],$$

где c_m и $h_m > 0$ – некоторые величины.

Доказательство. Осталось убедиться в том, что $n(h) = m$ в формуле (68). В замечании установлено, что $n(h) \geqslant m$. Предположим, что $n(h_j) > m$ для некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда найдутся собственные вектор-функции $u^{h_j}_{(k_j)}$, отвечающие собственным числам $\Lambda^{h_j}_{k_j} \leqslant \mu\pi^2 h^{-2} + \beta_m + c_m\sqrt{h}$, и ортогональные в $L^2(\Omega^{h_j})^3$ собственным вектор-функциям $u^{h_j}_{(1)}, \ \ldots, \ u^{h_j}_{(m+\varkappa_m-1)}$. Предельные переходы (26) и (34) предоставляют и собственное число $\boldsymbol{\beta}_m \leqslant \beta_m$, и отвечающую ему собственную вектор-функцию $\mathbf{v}_m$ задачи (19), (21), ортогональную в $L^2(\omega)^2$ функциям $v_{(1)}, \ \ldots, \ v_{(m+\varkappa_m-1)}$. Последнее противоречит правилу составления последовательности (23). Теорема доказана.

Теорема об асимптотике собственных вектор-функций исходной задачи, как обычно, выводится при помощи второй части леммы 1. Для упрощения её формулировки ограничимся указанием только главного члена асимптотики компонент вектора смещения.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и β_m – собственное число задачи (19), (21) из формулы (69). Найдутся такие величины c_m, $h_m > 0$ и столбцы коэффициентов $a^{h,p} = (a^{h,p}_m, \ldots, a^{h,p}_{m+\varkappa_m-1})$, $p = \overline{m, m+\varkappa_m-1}$, образующие ортогональную $(\varkappa_m \times \varkappa_m)$-матрицу $a^h = (a^{h,m}, \ldots, a^{h,m+\varkappa_m-1})$,* *что для собственных вектор-функций задач (2)–(4) и (19), (21), подчинённых условиям ортогональности и нормировки (9) и (24) соответственно, выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1,2}(\|\nabla_y(u^h_{(p)i}-S\mathbf{v}^h_{(p)i});L^2(\Omega^h)\|^2+h^{-1/2}\|u^h_{(p)i}-S\mathbf{v}^h_{(p)i};L^2(\Omega^h)\|^2+\|\partial_z u^h_{(p)i};L^2(\Omega^h)\|^2)+$$
$$+\|\partial_z u^h_{(p)3}-\partial_\zeta Z\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)};L^2(\Omega^h)\|^2+h^{-1}\|r_h\nabla_y(u^h_{(p)3}-hZ\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)});L^2(\Omega^h)\|^2+$$
$$+h^{-1}\|u^h_{(p)3}-hZ\nabla_y\cdot\mathbf{v}^h_{(p)};L^2(\Omega^h)\|^2\leqslant c_m\sqrt{h}\quad\text{\textit{при}}\quad h\in(0,h_m],\tag{71}$$

где $S(\zeta)=\sin(\pi\zeta)$, Z *– функция (17),* $r_h(y)=h+\operatorname{dist}(y,\gamma)$ *– весовой множитель и*

$$\mathbf{v}^h_{(p)}=(\mathbf{v}^h_{(p)1},\mathbf{v}^h_{(p)2})=\sqrt{\frac{2}{h}}\sum_{q=m}^{m+\varkappa_m-1}a^{h,p}_q v_{(q)},\quad p=\overline{m,m+\varkappa_m-1}.\tag{72}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением простого собственного числа β_m, при кратности $\varkappa_m>1$ рассуждения и выкладки вполне аналогичны, но более громоздки (см., например, [6, гл. 7]). Благодаря теореме 2 получаем, что $\mathcal{N}^h=m$, $\mathcal{X}^h=1$, $\mathbf{C}^h_m=\pm1$ в формулах (53) и, кроме того, в них можно взять $\delta^h_*=h^4d_m$, где

$$2d_m=\mu^{-2}\pi^{-4}\min\{\beta_m-\beta_{m-1},\beta_{m+1}-\beta_m\}$$

(учли расстояния $O(h^4)$ между соседними членами κ^h_m и $\kappa^h_{m\pm1}$ последовательности (50)). В итоге мажоранта в первой оценке (53) становится равной $2d_m^{-1}h^{1/2}$. Вектор-функции $U^h_{(m)}$ и $\mathbf{U}^h_{(m)}$ нормированы в пространстве $\mathcal{H}^h$ со скалярным произведением (48), но в соответствии с соотношениями (9) и (72) вектор-функции $u^h_{(m)}$ и $\mathbf{v}^h_{(m)}$ нормированы в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)^n$ при $n=3$ и $n=2$ соответственно. В силу интегрального тождества (7) выполнено равенство $\mathbf{U}^h_{(m)}=(\Lambda^h_m)^{-1/2}u^h_{(m)}$, а значит, при сравнении $u^h_{(m)}$ и $\mathbf{v}^h_{(m)}$ мажоранта приобретает порядок $h^{3/2}$, т.е. оценка получается в результате удаления “лишних” слагаемых из асимптотических конструкций $V^h_{(m)}$ и $W^h_{(m)}$. Подчеркнём, что ввиду экспоненциального затухания сомножителя $\widetilde{w}$ для пограничного слоя (59) верны соотношения

$$\|\nabla_x W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|+h^{-1}\|r_h\nabla_x W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|+h^{-1}\|W^h_{(m)};L^2(\Omega^h)\|\leqslant c_m h.$$

Именно они и коэффициент $O(h^{-1/2})$ в формуле (72) предопределяют строение левой и порядок правой частей неравенства (71).

6. О локализации собственных колебаний около свободной боковой поверхности. Незаконченность асимптотического анализа спектра задачи (2), (3), (5) объясняется двумя проверенными в данном пункте теоремами, указывающими, как упоминалось, на невозможность асимптотического описания собственных пар $\{\Lambda^h_m;u^h_{(m)}\}$ посредством какой-либо краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (19).

Теорема 4. *Для любых* $m\in\mathbb{N}$ *и* $\mathcal{M}\in[M_1,M_\dagger)$ *найдётся такая величина* $h_m(\mathcal{M})>0$, *что при* $h\in(0,h_m(\mathcal{M})]$ *замкнутый сегмент* $[0,\mathcal{M}h^{-2}]$ *содержит не менее* m *собственных чисел задачи (2), (3), (5).*

Доказательство. Билинейная форма в левой части интегрального тождества (11) замкнута, симметрична и положительно определена на пространстве $\mathcal{H}^h_=$ (см. формулы (10) и (12)), т.е. задаче (2), (3), (5) ставится в соответствие неограниченный самосопряжённый положительно определённый оператор $A_={}^h$ в пространстве $L^2(\Omega^h)^3$, а его собственные числа (8) вычисляются при помощи максиминимального принципа (см. [3, гл. 10, § 1, теорема 10.2.2])

$$\Lambda^h_m=\max_{\mathcal{L}^h_m}\inf_{\psi^h\in\mathcal{L}^h_m\setminus\{0\}}\frac{E(\psi^h,\psi^h;\Omega^h)}{\|\psi^h;L^2(\Omega^h)\|^2}.\tag{73}$$

Здесь $\mathcal{L}^h_m$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^h_=$ с коразмерностью $m-1$, в частности, $\mathcal{L}^h_1=\mathcal{H}^h_=$.

Зафиксируем номер $m \in \mathbb{N}$ и построим набор пробных вектор-функций $\Psi^h_{(1)}, \ldots, \Psi^h_{(m)} \in \mathcal{H}^h_{=}$, для которых выполнены соотношения

$$(\Psi^h_{(p)}, \Psi^h_{(q)})_{\Omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q = \overline{1, m},$$

$$E(\Psi^h, \Psi^h; \Omega^h) \leqslant (M_1 h^{-2} + C_m h^{-1}) \|\Psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad \text{при всех} \quad \Psi^h = \sum_{p=1}^m a^h_m \Psi^h_m. \tag{74}$$

Тогда любое подпространство $\mathcal{L}^h_m \subset \mathcal{H}^h_{=}$ с коразмерностью $m-1$ содержит свою нетривиальную линейную комбинацию $\Psi^h(\mathcal{E}^h_m)$ построенных вектор-функций. В результате выводим из формул (73) и (74) соотношение

$$\Lambda^h_m \leqslant \max_{\mathcal{L}^h_m} \frac{E(\Psi^h(\mathcal{E}^h_m), \Psi^h(\mathcal{E}^h_m); \Omega^h)}{\|\Psi^h(\mathcal{E}^h_m); L^2(\Omega^h)\|^2} \leqslant \frac{M_1}{h^2} + \frac{C_m}{h},$$

которое завершит доказательство нужного утверждения.

Для построения нужного набора $\Psi^h_{(1)}, \ \ldots, \ \Psi^h_{(m)}$ выделим на контуре γ непустые попарно непересекающиеся открытые дуги $\gamma_1, \ \ldots, \ \gamma_m$ и выберем нетривиальные функции $\phi_p \in C^\infty_c(\gamma_p)$, $p = \overline{1, m}$. Положим

$$\Phi^h_{(p)n}(x) = \chi_\omega(y) \phi_p(s) W_{(1)1}(h^{-1}n, h^{-1}z),$$

$$\Phi^h_{(p)z}(x) = \chi_\omega(y) \phi_p(s) W_{(1)2}(h^{-1}n, h^{-1}z), \quad \Phi^h_{(p)s}(x) = 0.$$

Здесь указаны проекции на оси n, z и s вектора $\Phi^h_{(p)}(x)$, χ_ω – срезающая функция из списка (61), а $W_{(1)} = (W_{(1)1}, W_{(1)2})$ – собственная вектор-функция смешанной краевой задачи (38), (41), (42), которая отвечает найденному собственному числу (45) (см. п. 4).

Выполнив вычисления, аналогичные проведённым в п. 5, получим формулы

$$\|\Phi^h_{(p)}; L^2(\Omega^h)\| = \int_\gamma \int_{-d}^0 \int_0^h |\chi_\omega(y)|^2 \left| W_{(1)} \left(\frac{n}{h}, \frac{z}{h} \right) \right|^2 J(n, s) \, dn \, dz \, ds =$$

$$= h^2 \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (\|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)),$$

$$E(\Phi^h_{(p)}, \Phi^h_{(p)}; \Omega^h) = \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (E_\sqsupset(W_{(1)}, W_{(1)}; \Pi) + O(h)) =$$

$$= \|\phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (M_1 \|W_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 + O(h)). \tag{75}$$

При этом учтены якобиан $J(n, s) = 1 + O(|n|)$, экспоненциальное затухание собственной вектор-функции $W_{(1)}(\xi)$ при $\xi_1 \to -\infty$ и равенство (46). Бесконечно малые $O(h)$ в формулах (75) зависят от выбора дуги γ_p и плотности ϕ_p, однако в любом случае, положив $\Psi^h_{(p)} = \|\Phi^h_{(p)}; L^2(\Omega^h)\|^{-1} \Phi^h_{(p)}$, $p = \overline{1, m}$, добиваемся выполнения ограничений (74) с некоторой общей постоянной c_m. Теорема доказана.

Пусть Λ^h_m – собственное число задачи (2), (3), (5), подчинённое требованию

$$\Lambda^h \leqslant (\mu\pi^2 - \ell) h^{-2} \tag{76}$$

с некоторым $\ell > 0$. Убедимся в том, что соответствующая собственная вектор-функция $u^h_{(m)}$ оказывается экспоненциально малой на удалении от боковой поверхности Γ^h, на которой поставлены краевые условия в напряжениях. Далее индекс m не пишем.

Положим

$$\mathcal{R}^\theta_h(y) = e^{\theta \rho_h(y)}, \quad \rho_h(y) = \min\{1, h^{-1} \mathrm{dist}\,(y, \gamma)\}. \tag{77}$$

Подставим в интегральное тождество (11) пробную вектор-функцию $\psi^h = \mathcal{R}_h^\theta \mathcal{U}^h$, в которой $\mathcal{U}^h = \mathcal{R}_h^\theta u^h$. После несложных преобразований, сводящихся к коммутированию весовой функции $\mathcal{R}_h^\theta$ и градиент-оператора ∇_y, приходим к равенству

$$\Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega^h)\|^2 = E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta),$$

где последнее слагаемое представляет собой интеграл по подобласти

$$\Omega_\circ^h = \{x \in \Omega^h : \operatorname{dist}(y, \gamma) > h\},$$

а подынтегральное выражение не превосходит произведения

$$c|\mathcal{U}^h(x)|\mathcal{T}_h^\theta(y)(|\nabla_y \mathcal{U}^h(x)| + |\mathcal{U}^h(x)|\mathcal{T}_h^\theta(y)),$$

причём согласно определению (77) справедливы формулы

$$\mathcal{T}_h^\theta(y) = \mathcal{R}_h^{-\theta}(y)|\nabla_y \mathcal{R}_h^\theta(y)| \leqslant \theta h^{-1} \quad \text{в} \quad \Omega_\circ^h,$$

$$\mathcal{T}_h^\theta(y) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\circledcirc^h := \Omega^h \setminus \overline{\Omega_\circ^h}.$$

Обозначив через $\mathcal{X}^h$ гладкую срезающую функцию, равную единице на области $\Omega_\circ^h$ и нулю при $2\operatorname{dist}(y, \gamma) > h$, заметим, что

$$|E(\mathcal{X}^h\mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h\mathcal{U}^h; \Omega^h) - E(\mathcal{U}^h\mathcal{U}^h; \Omega^h)| \leqslant ch^{-1}\|\mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h\|(E(\mathcal{U}^h\mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h)^{1/2} + h^{-1}\|\mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h\|).$$

Принципиальный момент: поскольку произведение $\mathcal{X}^h\mathcal{U}^h$ обращается в нуль на боковой поверхности Γ^h и тем самым попадает в пространство $H_0^1(\Omega^h)$, функционал упругой энергии можно превратить в функционал квазиэнергии, т.е.

$$E(\mathcal{X}^h\mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h\mathcal{U}^h; \Omega^h) = E_\square(\mathcal{X}^h\mathcal{U}^h, \mathcal{X}^h\mathcal{U}^h; \Omega^h).$$

Принимая во внимание приведённые оценки, пользуемся интегральным тождеством (11) и условием нормировки (9) следующим образом:

$$\mu\pi^2 h^{-2} \geqslant \Lambda^h \geqslant \Lambda^h \|u^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2 = \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2 =$$

$$= E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta) - \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\tau_1 E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega^h) + (1 - 2\tau_1)E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h) - \Lambda^h \|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + \mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta) + (1 - 2\tau_1)\mathcal{I}(\mathcal{U}^h).$$

Кроме того, верны неравенства

$$|\mathcal{J}_h^\theta(\mathcal{U}^h; \mathcal{R}_h^\theta)| \leqslant c\theta(\|\nabla_x \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h\|^2 + \theta h^{-2}\|\mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h\|^2),$$

$$|\mathcal{I}_h^\theta(\mathcal{U}^h)| \leqslant \tau_1 E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circledcirc^h) + C\tau_1^{-1} h^{-2}\|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circledcirc^h)\|^2$$

и, что особенно важно,

$$(1 - 2\tau_1)E(\mathcal{U}^h, \mathcal{U}^h; \Omega_\circ^h) \geqslant \tau_2\mu\|\nabla_x \mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + (1 - 2\tau_1 - \tau_2)\mu\pi^2 h^{-2}\|\mathcal{U}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2.$$

Соберём в левой части слагаемые, содержащие лебегову норму вектор-функции $\mathcal{U}^h$ на тонком множестве $\Omega_\circ^h = \{x \in \Omega^h : \operatorname{dist}(y, \gamma) < h\}$. При учёте требования (76) выбираем положительные τ_1, τ_2 и θ настолько малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$h^2\|\nabla_x(\mathcal{R}_h^\theta u_{(m)}^h); L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 + \|\mathcal{R}_h^\theta u_{(m)}^h; L^2(\Omega_\circ^h)\|^2 \leqslant c_m. \tag{78}$$

Итак, установлена

Теорема 5. *Если собственное число задачи (2), (3), (5) (или (11) в вариационной постановке) удовлетворяет ограничению (76), то соответствующая собственная вектор-функция* $u^h_{(m)}$, *нормированная в* $L^2(\Omega^h)^3$, *подчинена оценке (78), в которой* $\mathcal{R}^\theta_h(y)$ *– вес (77), равный* $e^{\theta\,\mathrm{dist}\,(y,\gamma)/h}$ *вне* $\sqrt{2}h$*-окрестности кромки прокладки* Ω^h.

Собственные вектор-функции задачи (2), (3), (5) концентрируются около боковой поверхности Γ^h, а значит, как предполагалось в работах [11] и [14, гл. 16], они реализуются как пограничные слои, затухающие экспоненциально при удалении от кромки пластины (в теории упругости это явление ещё предстоит изучить). Для скалярной спектральной задачи схожие пограничные слои строились в статье [10].

7. Разное. 1°. *Гладкость границы.* Формальное построение асимптотики в п. 2 не подразумевает какого-либо ограничения на гладкость границы, но использованная процедура обоснования асимптотики в п. 5 потребовала построить пограничный слой, а значит, "спрямить" боковую поверхность Γ^h, т.е. придать контуру γ класс Гёльдера $C^{2,\alpha}$. По всей видимости, снять последнее ограничение, наложенное на контур, нельзя, так как в теореме 3 указана двучленная асимптотика собственных чисел Λ^h_m. При выборе главного члена асимптотики свойства боковой поверхности не имеют значения, однако соответствующее утверждение малосодержательно: все нормированные собственные числа $h^2\Lambda^h_m$ приобретают одинаковый предел $\mu\pi^2$, а их асимптотическое расщепление обусловлено поправочным слагаемым β_m.

В случае кусочно-гладкой границы сечения ω, согласно процедурам из статей [27, 28], нужно изучить спектр ещё одной предельной задачи теории упругости в секторе слоя с различными краевыми условиями, однако публикаций в этом направлении нет.

При C^∞-гладкости контура γ общие итерационные процессы, описанные в статье [11] и книге [14, гл. 16], позволяют построить бесконечные асимптотические ряды для собственных пар задачи (2)–(4) в тонкой цилиндрической области (1).

2°. *Заглубленная и приклеенная пластины.* Заменим условия (3) смешанными краевыми условиями

$$u^h(y,0)=0,\quad \sigma_{j3}(u^h;y,h)=0,\quad j=1,2,3,\quad y\in\omega. \tag{79}$$

Задача (2), (79), (4) о пластине, вмонтированной в паз тех же размеров, исследуется по прежней схеме, однако изменение краевых условий на верхнем основании пластины провоцирует следующую модификацию асимптотических анзацев (13) и (14):

$$\Lambda^h=\mu\frac{\pi^2}{4h^2}+\ldots,\quad u^h_i(x)=v_i(y)\sin\frac{\pi z}{2h}+h^2V_i\left(y,\frac{z}{h}\right)+\ldots,\quad i=1,2.$$

В результате несложных, но более громоздких чем в п. 5 вычислений имеем новые функцию (17) и коэффициент (20), а именно,

$$Z(\zeta)=\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\zeta\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}\left(2-\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\zeta\right)\right),$$

$$\lambda_\sharp(\alpha)=\frac{4}{\pi}(\lambda+2\mu)\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{-1}\left(4\alpha-(1+4\alpha^2)\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right)-\mu.$$

Новые постоянные Ламе удовлетворяют неравенству $\lambda_\sharp(\alpha)>-\mu$, и поэтому предельная задача (19), (21) сохраняет свои свойства.

Некоторые осложнения возникают в процедуре обоснования асимптотики из-за невозможности непосредственного применения функционала упругой квазиэнергии. Впрочем, продолжение поля u^h нулём с цилиндра Ω^h на слой $\mathbb{R}^2\times(0,h)$ и преобразование Фурье по переменным $y=(y_1,y_2)$ позволяют получить приемлемую оценку постоянной в неравенстве (12).

Задача (2), (79), (5) описывает деформацию накладки – пластины, приклеенной к абсолютно жёсткому полупространству. Модельная задача в полуполосе (39), состоящая из системы (38), а также краевых условий (42) и

$$w'(\xi_1,0)=0,\quad \xi_1<0,$$

$$\mu\frac{\partial w_1}{\partial\xi_2}(\xi)+\mu\frac{\partial w_2}{\partial\xi_1}(\xi)=\lambda\frac{\partial w_1}{\partial\xi_1}(\xi)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial w_2}{\partial\xi_2}(\xi)=0,\quad \xi\in\varpi,$$

по существу исследована в работах [15, 16]: точка отсечки непрерывного спектра равна $\mu\pi^2/4$, и ниже неё имеется собственное число. Гипотеза о локализации собственных вектор-функций – аналог теоремы 5 – вполне правомочна, но нуждается в строгом обосновании.

3°. *Прокладка переменной толщины.* Пусть H – гладкая и положительная в $\overline{\omega}=\omega\bigcup\partial\omega$ профильная функция. Рассмотрим задачу Дирихле (2)–(4) в области

$$\Omega^h_H=\{x=(y,z):y\in\omega,\quad z\in(0,hH(y))\}\tag{80}$$

и предположим, что у функции H имеется единственный строгий глобальный максимум во внутренней точке $y^\wedge\in\omega$, т.е.

$$H(y)=H_\wedge+Q(y-y^\wedge)+O(|y-y^\wedge|^3),\quad H(y)<H_\wedge\quad\text{при}\quad y\in\omega\setminus\{y^\wedge\},$$

$$Q(ty)=t^2Q(y)\quad\text{при}\quad t\in\mathbb{R},\quad Q(y)\geqslant q|y|^2,\quad q>0.\tag{81}$$

Аналогичная скалярная задача в разнообразных вариантах исследовалась в статьях [29–34] и др. Разработанные в них подходы без особого труда можно применять к векторным задачам теории упругости, хотя соответствующие результаты не публиковались. Укажем лишь аналог теоремы 5, который выводится по схеме из п. 5 при учёте соотношений (81) и простого следствия неравенства Фридрихса

$$E_\Box(u^h,u^h;\Omega^h_H)\geqslant\mu\frac{\pi^2}{h^2}\int\limits_{\Omega^h_H}H(y)^{-2}|u^h(x)|dx\quad\text{при всех}\quad u^h\in H^1_0(\Omega^h_H)^2.$$

Предложение 3. *Пусть выполнены ограничения (81) и собственное число задачи (2)–(4) в области (80) удовлетворяет неравенству*

$$\Lambda^h\leqslant\mu\pi^2h^{-2}(H_\wedge^{-2}+C_mh),\quad C_m>0.$$

Тогда найдутся положительные величины h_m, c_m и θ, при которых собственная вектор-функция $u^h_{(m)}$, нормированная равенством (9), подчинена следующей оценке с весовым множителем $\rho(y)=|y-y^\wedge|^2$:

$$\|e^{\theta\rho}\nabla_xu^h_{(m)};L^2(\Omega^h_H)\|^2+h^{-2}\|(h+\rho)^{1/2}e^{\theta\rho}u^h_{(m)};L^2(\Omega^h_H)\|^2\leqslant c_mh^{-1}\quad\textit{при всех}\quad h\in(0,h_m].$$

Обсуждаемой задаче в области (80) свойственно разнообразие постановок, среди которых нетрудно обнаружить неизученные как в скалярном, так и векторном случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.
3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
5. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.
7. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and its Applications. V. 27. Amsterdam, 1997.

8. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Coques elastiques minces: Propriétés asymptotiques. Paris, 1997.
9. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domains modélisation des jonctions et applications. Paris, 1991.
10. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы мат. анализа. Вып. 19. Новосибирск, 1999. С. 105–148.
11. *Назаров С.А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. Сер. 1. 1982. Вып. 2. № 7. С. 65–68.
12. *Зорин И.С., Назаров С.А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трёхмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. № 4. С. 642–650.
13. *Dauge M., Djurdjevic I., Faou E., Rössle A.* Eigenmode asymptotics in thin elastic plates // J. de Mathématiques Pures et Appliqués. 1999. V. 78. № 9. P. 925–964.
14. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1 & 2. Berlin, 1991.
15. *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 11. С. 99–130.
16. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
17. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
18. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
19. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
20. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
21. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М., 1981.
22. *Leis R.* Initial Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Stuttgart, 1986.
23. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
24. *Назаров С.А.* Волны в плоской прямоугольной решетке тонких упругих волноводов // Проблемы мат. анализа. Вып. 99. Новосибирск, 2019. С. 47–88.
25. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
26. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
27. *Назаров С.А.* Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57. № 1. С. 202–239.
28. *Назаров С.А.* Проявление пространственной структуры поля напряжений в окрестности угловой точки тонкой пластины // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. № 4. С. 653–661.
29. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
30. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
31. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linèaire. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
32. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
33. *Назаров С.А.* Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 3. С. 655–672.
34. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.
После доработки 15.08.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.