

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–ПУАССОНА С ОДНОРОДНЫМ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 2022 г. А. Л. Скубачевский

Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним магнитным полем в бесконечном цилиндре. Для решений с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих строго во внутреннем цилиндре, получена априорная оценка напряжённости самосогласованного электрического поля через начальные функции плотности распределения.

DOI: 10.31857/S0374064122120093, EDN: NCOYVN

Введение. Уравнениям Власова посвящена обширная литература (см. [1–18] и имеющуюся там библиографию). Одним из наиболее важных приложений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона является термоядерный синтез. Как известно [12], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти его разрушение. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечить существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование таких решений рассматривалось в работах [4, 5, 16, 17]. Наличие ограниченного внешнего магнитного поля в уравнениях Власова–Пуассона и его влияние на удержание двухкомпонентной плазмы на определённом расстоянии от границы области является принципиальным отличием данной статьи от других математических работ. Для указанных решений получена априорная оценка напряжённости самосогласованного электрического поля через начальные функции плотности распределения частиц в случае бесконечного цилиндра, который соответствует реактору типа “пробочной ловушки”.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v, t) dv, \quad x \in Q, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0, \quad x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x, v, t)|_{t=0} = f_0^{\beta}(x, v), \quad x \in \overline{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \quad (3)$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, – ограниченная область с границей $\partial G \subset C^{\infty}$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$; $f^{\beta} = f^{\beta}(x, v, t)$ – функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $f_0^{\beta}(x, v) \geq 0$

≥ 0 – начальные функции плотности распределения; $\varphi = \varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$; $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

2. Основные определения. Введём следующие обозначения:

– $C^k(\mathbb{R}^n)$ ($C^k(\overline{Q})$), $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – пространство функций, непрерывных в $\mathbb{R}^n$ ($\overline{Q}$) и имеющих непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ ($\overline{Q}$) вплоть до k -го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |D^\alpha u(x)|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0;$$

– $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]$, у которых производные первого порядка также непрерывны и ограничены на этом множестве;

– $\dot{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями;

– $C_0^k(\overline{Q})$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – замыкание множества функций из $C^k(\overline{Q})$ с компактными в $\overline{Q}$ носителями;

– $\hat{C}^k(\mathbb{R}^3)$ – пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с координатами $Y_i \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{N}$;

– $C([0, T], C_0^k(\overline{Q}))$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, – банахово пространство непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C_0^k(\overline{Q})$ с нормой $\|\varphi\|_{k,T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\cdot, t)\|_k$;

– $M_{1,R} = \{\varphi \in C([0, T], C_0^1(\overline{Q})) : \varphi|_{\partial Q} = 0, \|\nabla \varphi\|_{0,T} \leq R\}$, $R > 0$, – полное метрическое пространство с метрикой $\rho_{1,R}(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|_{1,T}$;

– $W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, – пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщённые производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leq k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha v(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Определение. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0, T], C_0^2(\overline{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, $\beta = \pm 1$, назовём *классическим решением задачи* (1)–(4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (1), (2) и условиям (3), (4).

Пусть

$$B_r(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^0| < r\}, \quad B_r := B_r(0), \quad |B_r| := 4\pi r^3/3$$

и

$$G_\delta := \{x' \in G : \text{dist}(x', \partial G) > \delta\}, \quad Q_\delta := \{x \in Q : \text{dist}(x, \partial Q) > \delta\},$$

где $\delta > 0$, $x' = (x_1, x_2)$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Пусть $f_0^\beta \in \dot{C}^1(\mathbb{R}^6)$ и $\text{supp } f_0^\beta \subset D_0 := (Q_{5\delta/4} \cap B_\kappa) \times B_\rho$, где $\delta, \kappa, \rho > 0$.

Условие 2. Пусть $B \in \hat{C}^1(\overline{Q})$ и $B(x) = (0, 0, h)$ для $x \in \overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}(\rho m_{+1} + \sqrt{2}eTR) < h, \quad R > 0. \quad (5)$$

Замечание 1. Условие 1 означает, что в начальный момент времени заряженные частицы расположены в шаре B_κ , находятся на расстоянии более $5\delta/4$ до границы цилиндра ∂Q и имеют скорости меньше ρ . Условие 2 означает, что внешнее магнитное поле однородно во внутреннем цилиндре $Q_{\delta/4}$ и направлено по оси цилиндра. Это приводит к возникновению силы Лоренца, препятствующей попаданию частиц на границу. Выполнение неравенства (5)

для индукции внешнего магнитного поля приводит к тому, что проекция на плоскость $x_3 = 0$ отклонения ларморовской траектории, возмущённой самосогласованным электрическим полем с потенциалом φ , от начальной точки $x \in Q_{5\delta/4}$ не превышает $\delta/8$ (см. лемму 1).

3. Свойства характеристик. Для заданной функции $\varphi \in C([0, T], C_0^2(\overline{Q}))$ уравнения (2) с начальными условиями (3) можно решить, используя метод характеристик. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < t, \quad \beta = \pm 1, \quad (6)$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < t, \quad \beta = \pm 1, \quad (7)$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \quad \beta = \pm 1, \quad (8)$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $0 < t \leq T$. Для любых $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (6)–(8) для $\tau \in (T_\varphi^\beta(x, v, t), t]$, $0 \leq T_\varphi^\beta(x, v, t) < t$. Обозначим это решение через $(X_\varphi^\beta(x, v, t, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, t, \tau))$.

Лемма 1. Пусть выполнено условие 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ решение задачи (6)–(8) обладает следующими свойствами: если $(x, v) \in D_1 := (Q_{9\delta/8} \cap B_{\kappa_1}) \times B_{\rho_1}$, то $T_\varphi^\beta(x, v, t) = 0$ и $(X_\varphi^\beta(x, v, t, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, t, \tau)) \in D_2 := (Q_\delta \cap B_{\kappa_2}) \times B_{\rho_2}$, $\tau \in (0, t)$, где $\kappa_j = \kappa + T\rho_1 j$, $\rho_j = \rho + \frac{\sqrt{3}TR}{m_{-1}}j$, $j = 1, 2$.

Доказательство см. в работе [4, лемма 3.3].

Замечание 2. Утверждение леммы 1 означает, что траектории заряженных частиц, начинающиеся в области D_1 , за время t , $t \leq T$, могут попасть лишь в несколько большую область D_2 , причём их расстояние до границы ∂Q может уменьшиться не более, чем на $\delta/8$.

Продолжая функции $X_\varphi^\beta(x, v, t, \tau)$, $V_\varphi^\beta(x, v, t, \tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, положим $\hat{X}_\varphi^\beta(x, v, t) = X_\varphi^\beta(x, v, t, 0)$, $\hat{V}_\varphi^\beta(x, v, t) = V_\varphi^\beta(x, v, t, 0)$.

Для $0 < t \leq T$ рассмотрим отображение $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(\cdot, \cdot) : D_1 \rightarrow D_2$ вида $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x, v) = (\hat{X}_\varphi^\beta(x, v, t), \hat{V}_\varphi^\beta(x, v, t))$. Положим $\hat{S}_{\varphi,0}^\beta(x, v) = (x, v)$.

Для $\varphi \in C([0, T], C_0^2(\overline{Q})) \cap M_{1,R}$ определим функцию $f_\varphi^\beta(x, v, t)$ по формуле

$$f_\varphi^\beta(x, v, t) = \begin{cases} f_0^\beta(\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x, v)), & (x, v) \in D_1, \quad t \in [0, T], \\ 0, & (x, v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D_1, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (9)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ и $0 < t \leq T$ мы имеем включение $\text{supp } f_0^\beta(\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x, v)) \subset D_1$.

Доказательство основано на использовании леммы 1 (см. [4, лемма 4.2]).

Функция $\hat{S}_{\varphi,t}^\beta(x, v)$ непрерывно дифференцируема по $(x, v) \in D_1$ и $t \in (0, T)$. Поэтому в силу леммы 2 имеем $\text{supp } f_\varphi^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset D_1$ для $t \in [0, T]$ и $f_\varphi^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, при этом для заданной функции φ функции $f^\beta = f_\varphi^\beta$ удовлетворяют уравнениям (2) с начальными условиями (3).

4. Априорная оценка.

Теорема. Пусть выполнены условия 1 и 2. Предположим, что вектор-функция $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in M_{1,R}$, $\beta = \pm 1$, является классическим решением задачи (1)–(4). Тогда $\text{supp } f^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset D_1$, $t \in [0, T]$, $\beta = \pm 1$, при этом справедлива оценка

$$\|\nabla \varphi\|_{0,T} \leq c_1 \max_\beta \|f_0^\beta\|_0,$$

где $c_1 = c_1(Q, \rho, \kappa) > 0$ – константа, не зависящая от f_0^β и φ .

Доказательство. Пусть φ – первая компонента классического решения задачи (1)–(4) $\{\varphi, f^{+1}, f^{-1}\}$ и $\varphi \in M_{1,R}$. Определим функции f_φ^β по формуле (9). Из метода характеристик следует, что функции f_φ^{+1} и f_φ^{-1} являются соответственно второй и третьей компонентами классического решения, т.е. $f_\varphi^{+1} = f^{+1}$ и $f_\varphi^{-1} = f^{-1}$.

Рассмотрим краевую задачу (1), (4). В силу теоремы Соболева об ограниченности вложения $W_4^2(Q)$ в $C^1(\overline{Q})$ и теоремы 6.4 из [19, гл. 3, § 6] об однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве Соболева $W_4^2(Q)$ в случае бесконечного цилиндра получим неравенства

$$\|\nabla\varphi(\cdot, t)\|_0 \leq k_1 \|\varphi(\cdot, t)\|_{W_4^2(Q)} \leq 4k_2\pi e \sum_{\beta} I_{\beta}, \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

где $k_1, k_2 > 0$ – константы, зависящие от области Q и не зависящие от f_φ^β и φ ,

$$I_{\beta} = \left\{ \int_Q \left(\int_{\mathbb{R}^3} f^{\beta}(x, v, t) dv \right)^4 dx \right\}^{1/4}.$$

Положив $f^{\beta} = f_\varphi^{\beta}$, в силу (9) имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in Q} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} f^{\beta}(x, v, t) \leq \sup_{(y,p) \in D_0} f_0^{\beta}(y, p) = \|f_0^{\beta}\|_0. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует оценка

$$\|\nabla\varphi(\cdot, t)\|_0 \leq 8k_2\pi e |B_{\infty}|^{1/4} |B_{\rho}| \max_{\beta} \|f_0^{\beta}\|_0.$$

Теорема доказана.

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы для доказательства существования обобщённых решений смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с компактными носителями функций плотности распределения заряженных частиц по пространственным переменным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00392).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсеньев А.А. О существовании обобщённых и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
2. Bardos C., Degond P. Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
3. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
4. Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л. Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
5. Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L. A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.
6. Власов А.А. Теория многих частиц. М., 1950.
7. Weckler J. On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Arch. Ration. Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
6. Guo Y. Regularity for the Vlasov equations on a half-space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.

8. *DiPerna R.J., Lions P. L.* Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson // C. R. Acad. Sci. Sér. I. Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
9. *Добрушин Р.Л.* Уравнения Власова // Функци. анализ и его приложения. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
10. *Козлов В.В.* Обобщённое кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
11. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Т. 11. М., 1978. С. 153–234.
12. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., 2007.
13. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
14. *Pfaffmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. Differ. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
15. *Schäffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions // Comm. Partial Differ. Equat. 1991. V. 16. № 8–9. P. 1313–1335.
16. *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Докл. РАН. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
17. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 2. С. 107–148.
18. *Hwang H.J., Valázquez J.J.L.* On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half-space // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
19. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., 1991.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 25.09.2022 г.
После доработки 25.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.