ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1688–1693

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.32

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

© 2022 г. Э. Л. Шишкина

Для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу энергетическим методом доказана теорема о единственности решения задачи Коши. Решение такой задачи оказывается единственным только при неотрицательных значениях параметра k в операторе Бесселя, действующего по временно́й переменной.

DOI: 10.31857/S037406412212010X, EDN: NCVYIW

Введение. Основным объектом исследования в этой статье выступает общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$(\Delta_\gamma)_x u = (B_k)_t u, \quad u = u(x,t), \quad t>0, \quad x=(x_1,\ldots,x_n), \tag{1}$$

где B_k – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (см., например, [1, с. 5])

$$(B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^k}\frac{\partial}{\partial t}t^k\frac{\partial}{\partial t}, \quad t>0, \quad k\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$\triangle_\gamma$ – B-эллиптический оператор вида

$$\triangle_\gamma = (\triangle_\gamma)_x = \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}. \tag{3}$$

Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу исследуется методами, обобщающими классические, и имеет очень много приложений, например, в электростатической теории поля, гидродинамике, теории упругости и др.

Решение сингулярной задачи Коши для уравнения (1) при произвольном действительном значении параметра k является предметом многих исследований. При $n=1$ и $\gamma=0$ уравнение (1) появилось в работе Л. Эйлера (см. [2, с. 227]), затем изучалось С.Д. Пуассоном [3] и Г. Дарбу [4]. Интерес к многомерному уравнению (1) в случае, когда оператор Лапласа действует по переменной x, появился с работ А. Ванштейна [5, 6], и его изучение было продолжено в работах [7, 8]. Абстрактному уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу $Au=(B_k)_t u$, $u=u(x,t;k)$, где A – линейный оператор, действующий только по x, посвящены статьи А.В. Глушака [9, 10]. В книгах [11–13] изучен вопрос разрешимости различных задач для классического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

В настоящей статье единственность решения задачи Коши для уравнения (1) при $k>0$ будет установлена энергетическим методом. При $k<0$ решение этой задачи не единственно, но множество решений имеет определённую структуру (см. [14]).

1. Основные определения и утверждения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \ \ x_1>0, \ \ \ldots, \ \ x_n>0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \ \ x_1\geqslant 0, \ \ \ldots, \ \ x_n\geqslant 0\},$$

$\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i, $i=\overline{1,n}$, и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$. Введём обозначения $\Omega_+=\Omega\bigcap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\bigcap\overline{\mathbb{R}}^n_+$, тогда $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Пусть $C^m(\Omega_+)$ – множество, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i=\overline{1,n}$ непрерывно продолжаются на плоскость $x_i=0$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$ таких, что $\partial^{2k+1}f/\partial x_i^{2k+1}|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leqslant m$ при $i=\overline{1,n}$ (см. [1, с. 21] и далее).

Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\ldots$, $\vec{e}_n$ – единичные векторы по осям x_1, x_2, $\ldots$, x_n соответственно,

$$\nabla'_\gamma=\left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i$$

– первый взвешенный оператор набла,

$$\nabla''_\gamma=\left(x_1^{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,x_n^{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i$$

– второй взвешенный оператор набла, тогда справедливо равенство $(\nabla'_\gamma\cdot\nabla''_\gamma)=\Delta_\gamma$. Имеем

$$\nabla'_\gamma(uv)=u\nabla'_\gamma v+v\nabla'_\gamma u. \tag{4}$$

Для доказательства единственности решения задачи Коши для уравнения (1) нам потребуется обобщённая дивергентная теорема из работы [15].

Теорема 1. *Пусть G^+ – область в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, либо не пересекает G^+, либо имеет один общий отрезок с G^+ (возможно, вырождающийся в точку) вида*

$$\alpha_i(x')\leqslant x_i\leqslant\beta_i(x'),\quad x'=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad i=\overline{1,n}.$$

Если $\vec{g}=(g_1(x),\ldots,g_n(x))$ является непрерывно дифференцируемым в области G^+ векторным полем и $\vec{F}=(F_1(x),\ldots,F_n(x))$, $F_1(x)=x_1^{\gamma_1}g_1(x),\ldots,F_n(x)=x_n^{\gamma_n}g_n(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{G^+}(\nabla'_\gamma\cdot\vec{F})x^\gamma\,dx=\int\limits_{\partial G^+}(\vec{g}\cdot\vec{\nu})x^\gamma\,dS, \tag{5}$$

где $\vec{\nu}=\vec{e}_1\cos\eta_1+\ldots+\vec{e}_n\cos\eta_n$ – внешний вектор нормали к поверхности ∂G^+, η_i – угол между вектором $\vec{\nu}$ и осью Ox_i, $i=\overline{1,n}$.

В подпространстве $\mathbb{R}^n_+$ рассматривается многомерный обобщённый сдвиг, отвечающий мультииндексу γ, вида

$${}^\gamma\mathbf{T}^y_x={}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\cdots{}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n},$$

где каждый из одномерных обобщённых сдвигов определён выражением

$${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}f(x)=\frac{\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{\Gamma(\gamma_i/2)\Gamma(1/2)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i},x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha_i.$$

На основе многомерного обобщённого сдвига ${}^\gamma\mathbf{T}^y$ конструируется весовое сферическое среднее функции f, которое при $n\geqslant2$ имеет вид

$$M^\gamma_t[f(x)]=\frac{1}{|S^+_1(n)|_\gamma}\int\limits_{S^+_1(n)}{}^\gamma\mathbf{T}^{t\theta}_x f(x)\theta^\gamma\,dS, \tag{6}$$

где $\theta^\gamma=\prod_{i=1}^n\theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n)=\{\theta:|\theta|=1,\ \theta\in\mathbb{R}_+^n\}$ – часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$, а

$$|S_1^+(n)|_\gamma=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{2^{n-1}\Gamma((n+|\gamma|)/2)}.$$

При $n=1$ положим

$$M_t^\gamma[f(x)]={}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta}f(x).\tag{7}$$

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)=L_p^\gamma$, $1\leqslant p<\infty$, – пространство всех измеримых на $\mathbb{R}_+^n$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i=\overline{1,n}$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma\,dx<\infty,$$

здесь и далее $x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Для вещественных чисел $1\leqslant p<\infty$ норма в L_p^γ функции f определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)}=\|f\|_{p,\gamma}=\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^p x^\gamma\,dx\biggr)^{1/p}.$$

При $p=\infty$ норма в пространстве L_∞^γ функции f имеет вид

$$\|f\|_{L_\infty^\gamma(\mathbb{R}_+^n)}=\|f\|_{\infty,\gamma}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|.$$

Известно [1, с. 42], что L_p^γ – банахово пространство.

Оператор M_t^γ ограничен в $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ при $1\leqslant p\leqslant\infty$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\|M_t^\gamma u\|_{p,\gamma}\leqslant\|u\|_{p,\gamma},\quad t>0.$$

И.А. Киприянов в монографии [1] представил B-полигармоническую порядка p функцию $u=u(x)=u(x_1,\ldots,x_n)$ такую, что $\Delta_\gamma^p u=0$, где Δ_γ – оператор (3). B-полигармоническая первого порядка функция называется B-гармонической.

2. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Рассмотрим Γ – лоренцево расстояние между точками (x,t) и (ξ,τ) сингулярной гиперплоскости:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^2-\sum_{i=1}^m(x_i-\xi_i)^2.$$

Пусть (ξ,τ) – точка в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Через G^+ обозначим часть конической области в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ограниченную нижней полостью конуса $\Gamma(x,t;\xi,\tau)=0$ с вершиной в точке (ξ,τ) и плоскостями $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, $t=0$.

При $t=0$ получаем основание G^+ в $\mathbb{R}_+^n$, представляющее собой шар (часть шара) $B_n^+(\xi,\tau)$ с центром в точке ξ радиуса τ: $B_n^+(\xi,\tau)=\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x-\xi|\leqslant\tau\}$.

Теорема 2. *Пусть u – функция из $C_{ev}^2(\overline{G^+})$, удовлетворяющая общему уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу*

$$(\Delta_\gamma)_x u=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k)\tag{8}$$

в G^+, и предположим, что $k\geqslant0$, а функции u, u_t обращаются в нуль на основании G^+, т.е.

$$u(x,0;k)=u_t(x,0;k)=0,\quad x\in B_n^+(\xi,\tau),\tag{9}$$

тогда $u(x,t;k)$ обращается в нуль в области $\overline{G^+}$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ внутри или на границе множества $\overline{G^+}$ и построим новый конус (часть конуса) $(t-\widetilde{t})^2=\sum_{i=1}^m(x_i-\widetilde{x}_i)^2$. Через D^+ обозначим часть конической области в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ограниченную нижней полостью конуса $(t-\widetilde{t})^2=$ $=\sum_{i=1}^m(x_i-\widetilde{x}_i)^2$ с вершиной в точке $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ и плоскостями $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, $t=0$. Область D^+ ограничена в плоскости $t=0$ шаром (частью шара) $B_n^+(\widetilde{x},\widetilde{t})$, который составляет часть первоначального шара (части шара) $B_n^+(\xi,\tau)$, следовательно, в $B_n^+(\widetilde{x},\widetilde{t})$ верны соотношения (9).

Равенство (8) умножим на u_t и преобразуем следующим образом:

$$0=u_t(B_k)_tu-u_t\Delta_\gamma u=u_t\cdot u_{tt}+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)+\partial_t\biggl(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\biggr)=$$

$$=\partial_t\biggl(\frac{1}{2}u_t^2\biggr)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)+\partial_t\biggl(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\biggr)=\partial_t\biggl(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\biggr)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u). \quad (10)$$

Здесь были использованы соотношения, полученные из (4), а именно

$$u_t\Delta_\gamma u=(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)-(\nabla'_\gamma u_t\cdot\nabla''_\gamma u)$$

и

$$(\nabla'_\gamma u_t\cdot\nabla''_\gamma u)=\biggl(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}}\frac{\partial u_t}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{x_n^{\gamma_n}}\frac{\partial u_t}{\partial x_n}\biggr)\cdot\biggl(x_1^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,x_n^{\gamma_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}\biggr)=\sum_{i=1}^n\biggl(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\biggr)\cdot\biggl(x_i^{\gamma_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)=$$

$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^n\partial_t\biggl(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)^2=\partial_t\sum_{i=1}^n\biggl(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)^2=\partial_t\biggl(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\biggr).$$

Проинтегрируем равенство (10) по области D^+ и применим формулу (5), положив

$$\vec{F}=\biggl(\frac{1}{2}\biggl(u_t^2+|\nabla u|^2\biggr),\,-u_tx_1^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\,-u_tx_n^{\gamma_n}\frac{\partial u}{\partial x_1}\biggr),$$

$$\vec{g}=\biggl(\frac{1}{2}\biggl(u_t^2+|\nabla u|^2\biggr),\,-u_t\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\,-u_t\frac{\partial u}{\partial x_n}\biggr),$$

в результате получим

$$0=\int\limits_{D^+}\biggl(\partial_t\biggl(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\biggr)+\frac{k}{t}u_t^2-(\nabla'_\gamma\cdot u_t\nabla''_\gamma u)\biggr)x^\gamma\,dt\,dx=$$

$$=\int\limits_{\partial D^+}\biggl(\frac{1}{2}\biggl(u_t^2+|\nabla u|^2\biggr)\cos\eta_0-\sum_{i=1}^n u_t\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_i\biggr)x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D^+}\biggl(u_t^2\cos\eta_0-2u_t\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_i+\sum_{i=1}^n\biggl(\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)^2\cos\eta_0\biggr)x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx,$$

где $\vec{n}=(\cos\eta_0,\cos\eta_1,\ldots,\cos\eta_n)$ – внешний вектор нормали к поверхности ∂D^+, η_0 – угол между вектором $\vec{n}$ и осью Ot, η_i – угол между вектором $\vec{n}$ и осью Ox_i, $i=\overline{1,n}$, кроме того, $\cos\eta_0=1/\sqrt{2}$. Умножим последнее равенство на $\cos\eta_0$. Учитывая, что $\sum_{i=0}^n\cos\eta_i^2=1$ и $1/2=\cos\eta_0^2=1-\cos\eta_0^2=\sum_{i=1}^n\cos\eta_i^2$, будем иметь

$$0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_{\partial D^+}\biggl(u_t\cos\eta_i-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_0\biggr)^2x^\gamma\,dS+\int\limits_{D^+}\frac{k}{t}u_t^2x^\gamma\,dt\,dx.$$

На плоскости $t=0$ имеем $u_t(x,0)=0$. Поскольку $k\geqslant 0$, $t>0$, то из последнего равенства получаем, что на боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ справедливы тождества

$$u_t\cos\eta_i-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\eta_0\equiv 0$$

и $u_t\equiv 0$ в D^+. Отсюда следует, что $\partial u/\partial x_i\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$. Это означает, что на боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ вектор $\operatorname{grad}u$ параллелен нормали. Возьмём на ∂D^+ произвольную точку (x,t) и проведём через неё образующую ℓ. Вектор $\operatorname{grad}u$ ортогонален к ℓ, поэтому $\partial u/\partial\ell=0$. Это означает, что u постоянна вдоль любой образующей боковой поверхности конуса (части конуса) ∂D^+ и значение u в вершине $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ совпадает со значением u в точке образующей ℓ, которая лежит в плоскости $t=0$. Но по условиям (9) имеем, что $u(x,0;k)=0$, следовательно $u(\widetilde{x},\widetilde{t};k)=0$. Так как точка $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ была взята произвольно в $\overline{G^+}$, то $u(x,t;k)\equiv 0$ в $\overline{G^+}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $(\widetilde{x},\widetilde{t})$ – точка и G^+ – область, описанные в теореме 2. Предположим, что две функции u_l и u_2 из класса $C^2_{ev}(\overline{G^+})$ удовлетворяют уравнению (8) в G^+, кроме того, $u_1(x,0)=u_2(x,0)$ и $\partial u_1/\partial t|_{t=0}=\partial u_2/\partial t|_{t=0}=0$. Тогда $u_1\equiv u_2$ в $\overline{G^+}$.*

Объединив результат теоремы 2 и результаты из [16], получим следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть область G^+ имеет вид, описанный в теореме 2, точка (x,t) находится внутри или на границе множества $\overline{G^+}$, и пусть $u\in C^2_{ev}(\overline{G^+})$. Тогда при $k\geqslant n+|\gamma|-1$ единственное решение задачи*

$$\triangle_\gamma u(x,t)=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k),$$

$$u(x,0;k)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

имеет вид

$$u(x,t;k)=\frac{2t^{1-k}\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k-n-|\gamma|+1)/2)\Gamma((n+|\gamma|)/2)}\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{(k-n-|\gamma|-1)/2}r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma f(x)\,dr,$$

где $M_t^\gamma f(x)$ – весовое сферическое среднее, определяемое равенством (6) или (7).

Пусть $k\geqslant n+|\gamma|-1$ и $1\leqslant p\leqslant\infty$, тогда решение задачи Коши $u=u(x,t;k)$ из теоремы 3 при начальной функции $f\in L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ допускает оценку

$$\|u(\,\cdot\,,t;k)\|_{p,\gamma}\leqslant C_{n,\gamma,k}\|f\|_{p,\gamma},\quad t>0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{t\to 0}u(x,t;k)=f(x)$ почти при всех $x\in\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 4. *Пусть область G^+ имеет вид, описанный в теореме 2, точка (x,t) находится внутри или на границе множества $\overline{G^+}$, и пусть $u\in C_{ev}^{2+[(n+|\gamma|-k)/2]}(\overline{G^+})$. Решение задачи Коши*

$$\triangle_\gamma u(x,t)=(B_k)_t u,\quad u=u(x,t;k),\tag{11}$$

$$u(x,0;k)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\tag{12}$$

при $k<n+|\gamma|-1$, $k\neq -1,-3,-5,\ldots$, имеет вид

$$u(x,t;k)=t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\,\partial t}\right)^m(t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)),\tag{13}$$

где m – минимальное целое число такое, что $m\geqslant\dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}$ и $u(x,t;k+2m)$ – решение задачи Коши

$$(B_{k+2m})_t u=(\Delta_\gamma)_x u,$$

$$u(x,0;k+2m) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\cdots(k+2m-1)}, \quad u_t(x,0;k+2m) = 0.$$

Решение (13) единственно при $k \geqslant 0$ *и не единственно при* $k < 0$. *Если* f *–* B*-полигармоническая функция порядка* $(1-k)/2$ *и* $f \in C_{ev}^{1-k}$, *то одно из решений задачи Коши (11), (12) при* $k = -1, -3, -5, \ldots$ *имеет вид*

$$u(x,t;k) = f(x), \quad k = -1,$$

$$u(x,t;k) = f(x) + \sum_{h=1}^{-(k+1)/2} \frac{\Delta_\gamma^h f}{(k+1)\cdots(k+2h-1)} \frac{t^{2h}}{2\cdot 4\cdots 2h}, \quad k = -3, -5, \ldots$$

Заключение. Приведённая теорема о единственности решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, доказанная энергетическим методом, дополняет результаты исследований задач для сингулярных гиперболических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
2. *Euler L.* Institutiones Calculi Integralis. V. III. Petropoli, 1770.
3. *Poisson S.D.* Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux diffŕences partielles // J. de L'École Polytechechnique. 1823. Ser. 1. V. 19. P. 215–248.
4. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. II. Paris, 1888.
5. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler–Poisson // Proc. of Symposia in Applied Mathematics. V. 5. Wave Motion and Vibration Theory. New York; Toronto; London, 1954. P. 137–147.
6. *Weinstein A.* The generalized radiation problem and the Euler–Poisson–Darboux equation // Summa Brasiliensis Mathematicae. 1955. V. 3. P. 125–147.
7. *Bresters D.W.* On the equation of Euler–Poisson–Darboux // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 1. P. 31–41.
8. *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973.
9. *Глушак А.В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 364–371.
10. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
11. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара, 2008.
12. *Уринов А.К.* К теории уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Фергана, 2015.
13. *Зайцева Н.В.* Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя. М., 2021.
14. *Шишкина Э.Л.* Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.
15. *Шишкина Э.Л.* Обобщённая дивергентная теорема и второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. 2019. Т. 51. № 4. С. 506–513.
16. *Shishkina E.L., Sitnik S.M.* General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method // Electron. J. Differ. Equat. 2017. V. 2017. № 177. P. 1–20.

Воронежский государственный университет,
Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 14.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.