ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1702–1706

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 917.977

ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗБРОСА ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

© 2022 г. М. С. Никольский

Рассматривается динамический управляемый объект, находящийся под воздействием двух управлений. Первым управлением распоряжается минимизирующий игрок, оно является постоянным вектором, выбираемым из заданного множества. Второе управление является переменным вектором и имитирует воздействие на систему различных возмущений. Фиксируется терминальный функционал. Первый игрок стремится к минимизации целевого функционала, цели второго игрока не фиксируются, предполагается только, что управление второго игрока не известно первому игроку. В таких условиях для оценки возможностей первого игрока можно использовать минимаксный подход. Отметим, что рассматривается случай зависимых ограничений на управления. Получены эффективные достаточные условия, при которых минимакс целевого функционала определён корректно.

DOI: 10.31857/S0374064122120123, EDN: NDBQSJ

Введение. В статье рассматривается конфликтно управляемая динамическая система, описываемая традиционной для математической теории оптимального управления системой дифференциальных уравнений (см., например, [1, с. 16–23; 2, с. 31–39; 3, с. 8–12; 4]), в которой одно из двух управлений является постоянным вектором, выбираемым из фиксированного множества. Второе управление является переменным вектором и моделирует воздействие возмущений (например, природных возмущений), которые наперёд не известны. Сам процесс движения системы происходит из фиксированного начального состояния на отрезке времени $[0,T]$, где $T>0$ – фиксированная константа. Динамический процесс рассматривается с точки зрения игрока, выбирающего постоянное управление. Он стремится к минимизации заданного терминального функционала. Так как поведение возмущений считается неизвестным на промежутке $[0,T]$, то для оценки эффективности выбора управляющего субъекта естественно использовать минимаксный подход, часто используемый в теории исследования операций. В данной работе минимаксный подход применяется к терминальному функционалу, который в приложениях может быть проинтерпретирован, например, как характеристика разброса концов траекторий управляемой системы в момент $T>0$.

Отметим, что ограничения на управления предполагаются зависимыми, и это значительно усложняет исследование задачи. Зависимые ограничения на стратегии игроков для игровых процессов в статической форме рассматривались в работах Ю.Б. Гермейера [5], В.В. Фёдорова [6] и других авторов.

Цель настоящей статьи – получить эффективные достаточные условия, при которых гарантируется существование минимакса в рассматриваемых классах управлений. Такого рода условия важны для приложений.

Основная часть. Рассматривается нелинейный управляемый объект вида (ср. с [1, с. 16–23; 2, с. 31–39])

$$\dot{x}=f(x,u,v), \tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 1)$, $u\in P$, P – компакт из $\mathbb{R}^p$ $(p\geqslant 1)$, $v\in Q(u)$, $Q(u)$ – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^q$ $(q\geqslant 1)$, причём многозначное отображение $Q(u)$ непрерывно по $u\in P$ в смысле метрики Хаусдорфа (см. [3, с. 57]). Символом $\mathbb{R}^k$ $(k\geqslant 1)$ будем обозначать k-мерное арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов, с обычными определениями операций над векторами, скалярного произведения векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и длины вектора $|\cdot|$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) n-мерная функция $f(x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (x,u,v) на $\mathbb{R}^n\times P\times\hat{Q}$, где

$$\hat{Q}=\bigcup_{u\in P}Q(u); \tag{2}$$

2) для каждого непустого компакта $G\subset\mathbb{R}^n$ существует такая константа $\lambda(G)\geqslant 0$, что при $x',x''\in G$, $u',u''\in P$ и $v',v''\in\hat{Q}$ справедливо неравенство

$$|f(x',u',v')-f(x'',u'',v'')|\leqslant\lambda(G)(|x'-x''|+|u'-u''|+|v'-v''|); \tag{3}$$

3) при $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in P$, $v\in\hat{Q}$ выполняется неравенство (ср. с [4]) вида

$$\langle x,f(x,u,v)\rangle\leqslant c(1+|x|^2), \tag{4}$$

где c – неотрицательная константа;

4) множество $f(x,u,Q(u))$ является выпуклым при всех $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in P$.

Отметим, что в силу непрерывности многозначного отображения $Q(u)$ на компакте P множество $\hat{Q}$ (см. (2)) ограничено.

Для управляемого объекта (1) фиксировано начальное условие

$$x(0)=x_0, \tag{5}$$

где $x_0\in\mathbb{R}^n$. В качестве допустимых управлений для управляемого объекта (1), (5) выступают пары: постоянный вектор $u\in P$ и измеримое по Лебегу управление $v(t)\in Q(u)$ при $t\in$ $\in[0,T]$. Обозначим $\Delta=[0,T]$. В нашей управляемой модели управление $v(t)$ на отрезке Δ моделирует воздействие помех и возмущений, воздействующих на управляемый объект. Отметим, что из неравенства (4) в силу результатов статьи [4] для абсолютно непрерывного решения задачи Коши (1), (5) $x(t,u,v(\cdot))$, соответствующего допустимой паре $(u,v(\cdot))$, при $t\in\Delta$ выполняется априорная оценка

$$|x(t,u,v(\cdot))|\leqslant e^{cT}\sqrt{1+|x_0|^2}, \tag{6}$$

причём решение $x(t,u,v(\cdot))$ определено и единственно на всём отрезке Δ.

Условимся оценивать качество управления $u\in P$ с помощью фиксированной непрерывной на пространстве $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x)$ функционалом вида

$$g(u)=\max_{v(\cdot)}\varphi(x(T,u,v(\cdot))), \tag{7}$$

где $v(\cdot)$ означает произвольную измеримую функцию $v(t)\in Q(u)$, $t\in\Delta$. Отметим, что существование максимума в формуле (7) следует из непрерывности $\varphi(x)$ и компактности множества достижимости $D(T,x_0,u)$ управляемого объекта (1), (5) при фиксированном $u\in$ $\in P$. Компактность множества $D(T,x_0,u)$ можно обосновать с помощью результатов работ [2, 4], учитывая постулированную выпуклость множества $f(x,u,Q(u))$ при всех $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in P$.

Касаясь физической интерпретации изучаемой модели конфликтного управления, отметим, что в теории исследования операций (см., например, [5, 6]), в частности, изучаются модели взаимодействия двух игроков со связанными ограничениями на множество стратегий. В таких игровых моделях первый игрок – Центр (минимизирующий игрок) объявляет свой выбор стратегии второму игроку – Исполнителю (максимизирующему игроку). Второй игрок, зная выбор первого игрока, получает информацию о своих возможностях и делает выбор своей стратегии. В такой игровой модели рамки выбора стратегии вторым игроком могут существенно зависеть от выбора стратегии первого игрока. В изучаемой нами модели таким первым игроком является субъект, управляющий системой (1), (5) (он выбирает вектор $u\in P$), а вторым игроком является игрок, выбирающий измеримое управление $v(t)\in Q(u)$, $t\in\Delta$. Второго игрока иногда называют Природой, поведение которой является непредсказуемым заранее на отрезке Δ.

Отметим, что для приложений представляет интерес, например, функция $\varphi(x) = |x - \xi|$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный целевой вектор. С помощью этой функции можно оценить разброс векторов множества достижимости $D(T, x_0, u)$ относительно целевого вектора ξ. В более общем случае можно рассмотреть функцию расстояния $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, M)$, где M – компакт из $\mathbb{R}^n$, и оценить отклонение точек $D(T, x_0, u)$ от терминального множества M минимаксным образом.

Обоснуем существование минимума функционала $g(u)$ (см. (7)) на компакте P или, иначе, минимакса функционала $\varphi(x(T, u, v(\cdot)))$ на допустимых парах управлений. Для этого рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, для которой справедливо предельное равенство

$$\lim_{k\to\infty} g(u_k) = \gamma, \tag{8}$$

где через γ обозначен инфимум функционала $g(u)$ на P. Так как P – компакт, то (проведя, если надо, перенумерацию) можно считать, что при $k \to \infty$

$$u_k \to u_*, \tag{9}$$

где u_* – некоторый вектор из P. Докажем, что

$$g(u_*) = \gamma. \tag{10}$$

Поскольку неравенство $\gamma \leqslant g(u_*)$ следует из определения величины γ, то требуется доказать лишь неравенство $g(u_*) \leqslant \gamma$. Поэтому согласно (7) для доказательства равенства (10) достаточно обосновать неравенство

$$\varphi(x(T, u_*, \tilde{v}(\cdot))) \leqslant \gamma \tag{11}$$

для произвольной измеримой функции $\tilde{v}(t) \in Q(u_*)$, $t \in \Delta$. Далее фиксируем произвольное измеримое управление $\tilde{v}(t) \in Q(u_*)$, $t \in \Delta$. Используя определение непрерывности многозначного отображения (см. [3, с. 57]), можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $u \in P$ при $|u - u_*| \leqslant \delta$ выполняется включение

$$Q(u_*) \subset Q(u) + S_\varepsilon, \tag{12}$$

где $S_\varepsilon = \{v \in \mathbb{R}^q : |v| \leqslant \varepsilon\}$, знак “ + ” означает алгебраическое сложение множеств. Для векторов $\omega \in \mathbb{R}^q$, $u \in P$ определим метрическую проекцию $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ вектора $\omega \in \mathbb{R}^q$ на выпуклый компакт $Q(u)$ как вектор $\xi \in Q(u)$, для которого имеет место соотношение

$$|\omega - \xi| = \min_{\eta \in Q(u)} |\omega - \eta|.$$

С помощью выпуклого анализа обосновывается, что вектор $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}^q$, $u \in$ $\in P$ определён однозначным образом, причём при фиксированном $u \in P$ векторная функция $\operatorname{Pr}(\omega, u)$ непрерывна по ω на пространстве $\mathbb{R}^q$.

Рассмотрим последовательность функций

$$v_k(t) = \operatorname{Pr}(\tilde{v}(t), u_k), \tag{13}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $t \in \Delta$. Используя упомянутые свойства проекции $\operatorname{Pr}(\omega, u)$, можно обосновать, что при $t \in \Delta$ функции $v_k(t)$ (см. (13)) измеримы по Лебегу, причём

$$v_k(t) \in Q(u_k).$$

Обозначим при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$

$$x_*(t) = x(t, u_*, \tilde{v}(\cdot)), \tag{14}$$

$$x_k(t) = x(t, u_k, v_k(\cdot)). \tag{15}$$

Для абсолютно непрерывных функций $x_*(t)$, $x_k(t)$ при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ в силу (1), (5), (14), (15) имеем равенства

$$x_*(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_*(s), u_*, \tilde{v}(s))\, ds, \tag{16}$$

$$x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_k(s), u_k, v_k(s))\, ds, \tag{17}$$

здесь интегралы понимаются в смысле Лебега. Введём обозначение (см. (6))

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant e^{cT}\sqrt{1 + |x_0|^2}\}. \tag{18}$$

Из определения $x_*(t)$, $x_k(t)$ при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ и соотношений (6), (18) получаем включения

$$x_*(t) \in G_1, \quad x_k(t) \in G_1.$$

Обозначим через β константу $\lambda(G_1)$ (см. неравенство (3)). Из соотношений (3), (16)–(18) и определения константы β при $t \in \Delta$, $k \in \mathbb{N}$ имеем неравенства

$$\delta_k(t) \leqslant \int\limits_0^t \beta(\delta_k(s) + |u_k - u_*| + |v_k(s) - v_*(s)|)\, ds, \tag{19}$$

где

$$\delta_k(t) = |x_k(t) - x_*(t)|, \tag{20}$$

интегралы понимаются в смысле Лебега. Используя известную теорему сравнения (см. в [7] теорему 1.6.1), с помощью (19), (20) получаем при $k \in \mathbb{N}$ неравенства

$$|x_k(T) - x_*(T)| \leqslant \beta e^{\beta T} \int\limits_0^T (|u_k - u_*| + |v_k(s) - \tilde{v}(s)|)\, ds. \tag{21}$$

Обозначим для произвольного непустого компакта $M \subset \mathbb{R}^q$ и произвольного $z \in \mathbb{R}^q$ величину

$$\operatorname{dist}(z, M) = \min_{\eta \in M} |z - \eta|. \tag{22}$$

По определению метрической проекции для функций $v_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \Delta$ (см. (13)) выполняется соотношение

$$\operatorname{dist}(\tilde{v}(t), Q(u_k)) = |\tilde{v}(t) - v_k(t)|. \tag{23}$$

Далее, обозначим при $k \in \mathbb{N}$

$$h_k = \sup_{t \in \Delta} |\tilde{v}(t) - v_k(t)|. \tag{24}$$

Используя сходимость последовательности векторов u_k к вектору $u_* \in P$ и соотношения (9), (12), (13), (23), можно обосновать, что (см. (24))

$$h_k \to 0 \tag{25}$$

при $k \to \infty$. Из формул (21)–(24) при $k \in \mathbb{N}$ получаем неравенства

$$|x_k(T) - x_*(T)| \leqslant \beta T e^{\beta T}(|u_k - u_*| + h_k),$$

из которых вытекает (см. (9), (25)), что при $k \to \infty$

$$x_k(T) \to x_*(T). \tag{26}$$

Отметим, что из формулы (15) и определения величин $g(u_k)$ (см. (7)) при $k \in \mathbb{N}$ следуют при $k \in \mathbb{N}$ оценки

$$\varphi(x_k(T)) \leqslant g(u_k). \tag{27}$$

Из соотношений (8), (26), (27) и непрерывности функции $\varphi(x)$ после перехода к пределу в (27) при $k \to \infty$ получаем, что

$$\varphi(x_*(T)) \leqslant \gamma.$$

Тем самым неравенство (11) обосновано.

На основании рассуждений выше доказана

Теорема. *Функционал $g(u)$ (см. (7)) достигает своего минимума на компакте P. Следовательно, величина*

$$\min_{u \in P} \max_{v(\cdot)} \varphi(x(T, u, v(\cdot))),$$

где $v(\cdot)$ означает произвольную измеримую функцию $v(t) \in Q(u)$, $t \in \Delta$, определена корректно.

Заключение. В статье получены эффективные достаточные условия, при которых в рассматриваемом динамическом игровом процессе двух игроков с зависимыми ограничениями на управления минимакс целевого функционала определён корректно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., 1972.
3. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М., 2001.
4. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1959. № 2. С. 25–38.
5. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М., 1976.
6. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М., 1979.
7. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев, 1991.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.11.2021 г.
После доработки 10.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.