ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1707–1711

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2022 г. В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев

Рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ требуется найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы первое собственное значение матричного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным значением $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$. Основной результат работы заключается в установлении нового типа связи между указанной обратной спектральной задачей и системами нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, известными в математической физике как системы нелинейных уравнений Шрёдингера.

DOI: 10.31857/S0374064122120135, EDN: NDBWNF

Введение. Пусть $H = L_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением $(\vec{y},\vec{v}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n y_k(x)\overline{v}_k(x)\,dx$. $\mathcal{M}_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех матриц размера $n\times n$ с элементами – функциями из $L^2(0,1)$ с нормой $\|Q\|^2_{\mathcal{M}_n^2} = \int_0^1 \operatorname{tr}(Q^*(x)Q(x))\,dx$. В пространстве $L_n^2(0,1)$ рассматривается краевая задача Штурма–Лиувилля, порождённая на интервале $0<x<1$ системой уравнений

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x) = \lambda\vec{y}(x) \tag{1}$$

и граничными условиями Дирихле

$$\vec{y}(0) = \vec{y}(1) = 0, \tag{2}$$

где $Q(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ – вещественная эрмитова матрица, λ – спектральный параметр.

Хорошо известно, что если $Q_{k,j}(x)\in L^2(0,1)$, то дифференциальное выражение (1) вместе с граничными условиями (2) определяет самосопряжённый дифференциальный оператор в гильбертовом пространстве $L_n^2(0,1)$, который будем обозначать $\mathcal{L}[Q]$, а область его определения – $D(\mathcal{L}[Q])$.

Спектр оператора $\mathcal{L}[Q]$ является дискретным и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(\mathcal{L}[Q]) := \{\lambda_i(Q)\}_{i=1}^\infty$, а поскольку $Q(x)$ – эрмитова матрица, эти собственные значения можно перенумеровать в порядке возрастания: $\lambda_1(Q)\leqslant\lambda_2(Q)\leqslant\ldots$

Основной целью работы является исследование оптимизационной обратной спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}[Q]$ (см. [1–3]). При этом в качестве спектральных данных будем рассматривать первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[Q]$, которое можно определить следующим образом:

$$\lambda_1(Q) := \inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L}[Q])\\ \|\vec{v}\|=1}} \{(\vec{v}',\vec{v}') + (Q\vec{v},\vec{v})\}. \tag{3}$$

Рассматриваемая обратная спектральная задача относится к задачам с неполными спектральными данными. Такие задачи имеют бесконечное число решений и некорректны. Чтобы преодолеть эти трудности, можно предположить, что заранее известна некоторая информация о потенциале Q, например, что потенциал Q имеет наиболее близкую “форму” к $Q_0(x)$. Такой взгляд на обратные спектральные задачи, в известном смысле, является более естественным. Одной из причин тому является недоступность для измерения полной системы спектральных данных (для задач диагностики или идентификации объектов), а в задачах построения линейной динамической системы с заданными частотно-резонансными свойствами, наиболее близкой к "эталонной" системе, нет необходимости рассматривать весь диапазон частотно-резонансных характеристик. Эти замечания приводят к исследованию различных содержательных постановок обратных спектральных задач с неполными данными (см., например, работы [4–6]).

Разнообразные постановки обратных спектральных задач имеют довольно много естественных источников возникновения: математическая физика, квантовая механика, оптика, механика, инженерные науки, а также различные разделы самой математики [4, 5, 7]. Отдельный интерес представляет связь оптимизационных спектральных задач с нелинейными операторами математической физики (см., например, [2, 3] и [8, с. 278–290]) с различными экстремальными свойствами собственных значений (см. [9, 10] и содержащуюся в них библиографию). Несмотря на очевидную актуальность, многие из этих задач остаются нерешёнными.

В данной работе исследуется оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля:

Задача ($\mathcal{P}$). Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитова потенциала $Q_0(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ требуется найти потенциал $\hat{Q}(x)\in\mathcal{M}_n^2(0,1)$ такой, что

$$\|Q_0-\hat{Q}\|^2_{L^2}=\inf_{Q\in\mathcal{M}_n^2(0,1)}\{\|Q_0-Q\|^2_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}:\lambda_1(\hat{Q})=\lambda_1^*\}.$$

1. Существование и единственность решения. Введём в рассмотрение множество

$$M(\lambda):=\{Q\in\mathcal{M}_n^2(0,1):\ \lambda\leqslant\lambda_1(Q)\}.$$

Лемма. *Множество $M(\lambda_1^*)\subset\mathcal{M}_n(0,1)$ является выпуклым.*

Доказательство. Заметим, что множество $M(\lambda_1^*)$ – не пустое. Рассмотрим произвольные $Q_1,\,Q_2\in M(\lambda_1^*)$ и $\alpha\in[0,1]$. Из формулы (3) имеем

$$\lambda_1(\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)=\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+((\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)\vec{v},\vec{v})\}=$$

$$=(\vec{v'_*},\vec{v'_*})+((\alpha Q_1+(1-\alpha)Q_2)\vec{v}_*,\vec{v}_*)=\alpha((\vec{v'_*},\vec{v'_*})+(Q_1\vec{v}_*,\vec{v}_*))+(1+\alpha)((\vec{v'_*},\vec{v'_*})+(Q_2\vec{v}_*,\vec{v}_*))\geqslant$$

$$\geqslant\alpha\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+(Q_1\vec{v},\vec{v})\}+(1-\alpha)\inf_{\substack{\vec{v}\in D(\mathcal{L})\\ \|\vec{v}\|=1}}\{(\vec{v'},\vec{v'})+(Q_2\vec{v},\vec{v})\}=\alpha\lambda_1(Q_1)+(1-\alpha)\lambda_1(Q_2).$$

Из полученного неравенства и вытекает выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$.

Теперь докажем существование и единственность решения задачи $(\mathcal{P})$.

Теорема 1. *Пусть справедливо неравенство $\lambda_1(Q_0)\leqslant\lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача $(\mathcal{P})$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Если $\lambda_1(Q_0)=\lambda_1^*$, то существование и единственность решения рассматриваемой задачи очевидны. Далее будем считать, что $\lambda_1(Q_0)<\lambda_1^*$.

На множестве $M(\lambda_1^*)$ рассмотрим следующую задачу о минимизации:

$$\check{P}=\min\{\rho(Q)=\|Q_0-Q\|^2_{\mathcal{M}_n}:\ Q\in M(\lambda_1^*)\}. \tag{4}$$

Коэрцитивность функционала расстояния $\rho(\cdot):\mathcal{M}_n(0,1)\to\mathbb{R}$ влечёт за собой существование минимизатора $\hat{Q}\in M(\lambda_1^*)$ задачи (4). Из строгого неравенства $\lambda_1(Q_0)<\lambda_1^*$ следует, что $\hat{Q}\neq$ $\neq Q_0$. Выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(Q)$ обеспечивают единственность $\hat{Q}$ и $\hat{Q}\in\partial M(\lambda_1^*)=\{Q\in M(\lambda_1^*):\ \lambda_1(Q)=\lambda_1^*\}$. Тем самым доказаны существование и единственность решения задачи $(\mathcal{P})$.

Пусть $\hat{Q}\in\partial M(\lambda_1^*)$ – решение задачи $(\mathcal{P})$. Тогда, очевидно, $\lambda_1(\hat{Q})=\lambda_1^*$ – первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, т.е.

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{u}(x)+\hat{Q}(x)\vec{u}(x)=\lambda_1^*\vec{u}(x),\quad \vec{u}(0)=\vec{u}(1)=0.$$

Заметим, что в общем случае первое собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ может оказаться кратным.

Теорема 2. *Пусть выполняется неравенство* $\lambda_1(Q_0) \leqslant \lambda_1^*$, *а* $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ *– решение задачи* $(\mathcal{P})$. *Если* $\lambda_1(\hat{Q})$ *– собственное значение кратности* p, *то справедливо представление*

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^{p} \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x), \tag{5}$$

где $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ *– ортонормированная система собственных функций оператора* $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, *соответствующая первому собственному значению, равному* λ_1^*, $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$ *– эрмитова матрица.* Здесь символ $\bigotimes$ обозначает тензорное произведение в векторном пространстве E_n.

Доказательство. Пусть $\hat{Q}$ – решение задачи $(\mathcal{P})$, $\lambda_1(\hat{Q}) = \lambda_1$ – собственное значение кратности p, $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^p$ – соответствующая система ортонормированных собственных функций. Покажем, что для любой матричнозначной функции $\delta_0(x) \in \mathcal{M}_n(0,1)$, удовлетворяющей равенству $(\delta_0\vec{u}_k, \vec{u}_j) = 0$, $k,j = \overline{1,p}$, можно построить аналитическую в окрестности точки $t = 0$ матричнозначную функцию вида

$$\delta(t) := \delta_0(x)t + D(x,t), \quad \|D(x,t)\|_{\mathcal{M}_n} = O(t^2), \tag{6}$$

такую, что в достаточно малой окрестности $t = 0$ будет выполняться тождество

$$\lambda_1(\hat{Q} + \delta(t)) \equiv \lambda_1^*. \tag{7}$$

Заметим, что оператор

$$\mathcal{L}[\hat{Q} + \delta_0(x)t] := -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{Q}(x) + \delta_0(x)t$$

образует аналитическое семейство операторов (см. [11, с. 470]). Следовательно, собственные значения и собственные функции этого оператора будут аналитическими функциями переменной t в некоторой окрестности нуля. Тогда существуют аналитические в окрестности $t = 0$ функции $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^n$ и $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{L}[\hat{Q} + \delta_0(x)t]\vec{u}_k = (\lambda_1^* + \mu_k(t))\vec{u}_k, \quad \vec{u}_k(0,t) = 0, \quad \vec{u}_k'(0,t) = \vec{e}_k, \quad \mu_k(0) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ имеет кратность p, дополнительно можно считать, что $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^p$ – собственные значения, а $\vec{u}_k(1,t) = 0$, $k = \overline{1,p}$, – соответствующие собственные функции.

Из функций $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^n$ и соответствующих вектор-столбцов $\{\vec{u}_k(x,t)\}_{k=1}^n$ составим матрицы $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)\}$ и $U(x,t) = [\vec{u}_1(x,t), \ldots, \vec{u}_n(x,t)]$.

Заметим, что эти матрицы удовлетворяют задаче Коши

$$-U'' + (\hat{Q} + t\delta_0 - \lambda_1^* I)U = U\Lambda(t), \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = I,$$

где I – единичная матрица.

Таким образом, матричнозначная функция $D(x,t) = U(x,t)\Lambda(t)U^{-1}(x,t)$, удовлетворяющая представлению (6) с условием (7), построена.

Обозначим через $P : \mathcal{M}_n^2(0,1) \mapsto \mathcal{M}_n^2(0,1)$ самосопряжённый проектор на линейную оболочку $\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}_n^2(0,1)$ матричнозначных функций $\vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$, где $k,j = \overline{1,p}$.

Пусть $\delta(x)$ – произвольный элемент гильбертова пространства $\mathcal{M}_n(0,1)$. Положим $\delta_0(x) = (I - P)\delta(x)$. Легко проверить, что справедливо равенство

$$(\delta_0\vec{u}_k, \vec{u}_j)_{\mathcal{L}_n^2(0,1)} = ((I-P)\delta, \vec{u}_k \bigotimes \vec{u}_j)_{\mathcal{M}_n^2(0,1)} = 0$$

для всех $k,j = \overline{1,p}$.

Определим для $\delta(x)$ матричнозначную функцию $\Delta(t) = t\delta_0(x) + D(x,t)$, удовлетворяющую (6), (7). Поскольку в точке $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ достигается строгий минимум задачи

$$\check{P} = \min\{\rho(Q) = \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n}^2 : Q \in M(\lambda_1^*)\},$$

то для матричнозначной функции $\delta(t)$ в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо неравенство

$$\|\hat{Q} + \delta(t) - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} - \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} = 2(\hat{Q} - Q_0, \delta(t))_{\mathcal{M}_n} + (\delta(t), \delta(t))_{\mathcal{M}_n} > 0.$$

Согласно (6) имеем $\delta(x,t) = t\delta_0(x) + O(t^2)$. Так как $\delta_0(x) = (I-P)\delta(x)$, то это неравенство можно записать в виде

$$t(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} + O(t^2) > 0,$$

и оно выполнено при всех достаточно малых вещественных t, следовательно,

$$(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} = 0.$$

Поскольку P – самосопряжённый проектор, то для всех $\delta(x)$ из пространства $\mathcal{M}_n(0,1)$ справедливо тождество $(\hat{Q} - Q_0, (I-P)\delta)_{\mathcal{M}_n} = ((I-P)(\hat{Q} - Q_0), \delta)_{\mathcal{M}_n} = 0$. Отсюда имеем равенства $(I-P)(\hat{Q} - Q_0) = 0$ и $\hat{Q} = Q_0 + P(\hat{Q} - Q_0)$. Для получения представления (5) заметим, что $P(\hat{Q} - Q_0) \in \mathcal{M}^0$, следовательно, найдутся числа $\alpha_{k,j}$ такие, что $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^{p} \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$.

Далее заметим, что $Q_0 = Q_0^*$, а $\hat{Q}$ по построению – самосопряжённая матрица, следовательно, $\sum_{k,j=1}^{p} \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x)$ тоже самосопряжённая. Тогда из соотношения

$$(\vec{u}_k(x) \bigotimes \vec{u}_j(x))^* = \vec{u}_j(x) \bigotimes \vec{u}_k(x)$$

следует самосопряжённость матрицы $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^{p}$. Теорема доказана.

В случае, когда собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ простое, формула (5) примет вид

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u}(x) \bigotimes \vec{u}(x),$$

где $\vec{u}(x)$ – соответствующая собственная функция. При этом справедливо обратное к теореме 2 утверждение.

Теорема 3. *Пусть краевая задача*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\vec{v} + (Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v})\vec{v} = \lambda_1^* \vec{v}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}(1) = 0$$

имеет решение $\vec{v}(x)$ такое, что λ_1^* является первым простым собственным значением оператора $\mathcal{L}[Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}]$. Тогда матричный потенциал $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}$ является решением задачи $(\mathcal{P})$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, тогда $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$. Представим произвольный элемент $Q \in M(\lambda_1^*)$ в виде $Q = \hat{Q} + \delta$, тогда при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$ в силу выпуклости множества $M(\lambda_1^*)$ имеем $\hat{Q} + t\delta \in M(\lambda_1^*)$. При этом $\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) \geqslant \lambda_1^* = \lambda_1(\hat{Q})$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, откуда следует, что $\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) - \lambda_1(\hat{Q}) \geqslant 0$ и $(\lambda_1(\hat{Q} + t\delta) - \lambda_1(\hat{Q}))/t \geqslant 0$. В последнем неравенстве перейдём к пределу $t \to 0+$ и получим

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{d\lambda_1(\hat{Q} + t\delta)}{dt} = (\delta \vec{v}, \vec{v}) \geqslant 0. \tag{8}$$

Теперь, положив $\delta = Q - \hat{Q}$ для любого $Q \in M(\lambda_1^*)$, имеем

$$\|Q - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} = \|\hat{Q} - Q_0 + \delta\|^2_{\mathcal{M}_n} = \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} + 2(\hat{Q} - Q_0, \delta)_{\mathcal{M}_n} + (\delta, \delta)_{\mathcal{M}_n}.$$

Для потенциала соотношения $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}$ в силу неравенства (8) выполняются соотношения

$$(\hat{Q} - Q_0, \delta)_{\mathcal{M}_n} = (\beta \vec{v} \bigotimes \vec{v}, \delta)_{\mathcal{M}_n} = \beta(\vec{v}, \delta \vec{v})_{L_n^2} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем, что для любого $Q \in M(\lambda_1^*)$ и $Q \neq \hat{Q}$ справедливо неравенство

$$\|Q - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n} > \|\hat{Q} - Q_0\|^2_{\mathcal{M}_n}.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано.

2. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу $(\mathcal{P})$ в пространстве $H = L_2^2(0,1)$ для матричного потенциала $Q_0(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{12}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}$. Согласно теореме 1 задача $(\mathcal{P})$ имеет единственное решение $\hat{Q}$. При этом если первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$ простое, то $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha\vec{u} \bigotimes \vec{u}$, $\|\vec{u}\| = 1$, и

$$\mathcal{L}[\hat{Q}]\vec{u} = -\vec{u}'' + (Q_0(x) + \alpha\vec{u} \bigotimes \vec{u})\vec{u} = \lambda_1^*\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}(1) = 0, \tag{9}$$

где λ_1^* – первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$.

Краевую задачу (9) можно преобразовать к известной в математической физике системе нелинейных уравнений Шрёдингера вида [8, с. 285–286]

$$\begin{gathered} -u_1''(x) + (q_{11}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x)))u_1(x) + q_{12}(x)u_2(x) = \lambda_1^* u_1(x), \\ -u_2''(x) + (q_{22}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x)))u_2(x) + q_{12}(x)u_1(x) = \lambda_1^* u_2(x), \\ u_k(0) = u_k(1) = 0, \quad k = 1, 2. \end{gathered}$$

Исследование Садовничего В.А. и Султанаева Я.Т. выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1621), исследование Валеева Н.Ф. выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валеев Н.Ф., Ильясов Я.Ш.* Об обратной оптимизационной спектральной проблеме и соответствующей нелинейной краевой задаче // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 621–625.
2. *Ilyasov Y.Sh., Valeev N.F.* On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem // J. Differ. Equat. 2019. V. 266. № 8. P. 4533–4543.
3. *Ilyasov Y., Valeev N.* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues // Physica D: Nonlin. Phenomena. 2021. V. 426. DOI: 10.1016/j.physd.2021.132985.
4. *Chu M., Golub G.H.* Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. V. 13. Oxford, 2005.
5. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
6. *Валеев Н.Ф.* Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 6. P. 940–943.
7. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.
8. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals. New York, 2003.
9. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. № 3. С. 439–508.
10. *Wei Q., Meng G., Zhang M.* Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L1 balls // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 2. P. 364–400.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Башкирский государственный педагогический университет
имени М. Акмуллы, г. Уфа,
Башкирский государственный университет, г. Уфа,
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Поступила в редакцию 16.09.2022 г.
После доработки 16.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.