ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1712–1715

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956+517.984.5

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА КВАДРАТЕ

© 2022 г. З. Ю. Фазуллин

Получена классическая формула следа Гельфанда–Левитана с вычетом первой поправки теории возмущений для оператора Лапласа на квадрате, возмущённого оператором умножения на функцию специального вида. Выдвинута гипотеза о формуле регуляризованного следа в общей ситуации.

DOI: 10.31857/S0374064122120147, EDN: NDFAJH

Рассмотрим оператор $L_0u = -\Delta u$ с краевыми условиями Дирихле в пространстве $L^2(K)$, где $K = \{(x, y):\ 0 \leqslant x, y \leqslant \pi\}$. Хорошо известно, что спектр оператора L_0 состоит из собственных чисел $\lambda_{km} = k^2 + m^2$, $k, m = 1, 2, \ldots$, и $f_{km}(x, y) = (2/\pi)\sin(kx)\sin(my)$ – соответствующие им ортонормированные собственные функции. Пусть V – оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $v(x, y)$, действующий в $L^2(K)$, и $L = L_0 + V$ – возмущённый оператор с граничными условиями Дирихле на множестве K.

В работах [1–3] для задачи Дирихле оператора $L = L_0^s + V$, $s > 1$, было доказано, что существует подпоследовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что выполняется равенство

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2\leqslant n_l} [\mu_{km} - \lambda_{km}^s - (Vf_{km}, f_{km})] = 0. \tag{1}$$

Отметим, что справедливость тождества (1), в общем случае, для произвольных ограниченных возмущений самосопряжённого оператора L_0 с дискретным спектром имеет место, если $N(t, L_0) = \overline{o}(t)$, $t \to \infty$ (см. [2]).

Согласно хорошо известной асимптотической формуле Вейля при $s > 1$

$$N(t, L_0^s) = \overline{o}(t), \quad t \to \infty,$$

при $s = 1$ имеем

$$N(t, L_0) = \frac{\pi}{4}t + \overline{o}(t), \quad t \to \infty.$$

Следовательно, в нашем случае, т.е. при $s = 1$, ожидать того, что правая часть в (1) равна нулю, не приходится. Например, для оператора Лапласа–Бельтрами L_0 на двумерной сфере S^2 $(N(t, L_0) = t + o(t),\ t \to \infty)$, возмущённого оператором умножения на функцию, правая часть в (1) отлична от нуля (см. работы [4–8]).

В обзорной статье [9, с. 146] в разделе "Некоторые нерешённые задачи" подчеркивается, что "конкретный "спортивный" интерес давно вызывает формула первого регуляризованного следа для оператора Лапласа на квадрате". Трудности исследования этой задачи прежде всего вызваны сложной структурой собственных чисел $\lambda_{km} = k^2 + m^2$: нет формулы упорядочения λ_{km} по росту через один индекс: $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, не известны (нам) асимптотика кратностей λ_n и оценка снизу наибольшей лакуны в спектре. Это, в свою очередь, усложняет изучение асимптотики второй поправки теории возмущений, составляющей основу метода доказательства разработанной нами формулы следа для L_0-компактных возмущений операторов с дискретным спектром [10]. На основе работы [10] выдвинем следующую гипотезу для рассматриваемой задачи.

Гипотеза. Пусть $v \in W_2^2(K)$. Тогда существует подпоследовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что справедливы равенства

$$\lim_{l\to\infty} \rho(n_l+0) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2\leqslant n_l} [\lambda_{km} + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_K v^2(x,y)\,dx\,dy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x,y)\,dx\,dy\right)^2\right].$$

Нам удалось доказать эту гипотезу в случае, когда у функции v переменные разделяются. Идея доказательства была анонсирована в статье [11] в предположении существования подпоследовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$, доказательство существования которой приведём в данной работе.

Итак, рассмотрим оператор L в пространстве $L^2(K)$, порождённый краевой задачей

$$lu = -\Delta u + v(x,y)u, \quad u|_{\partial K} = 0.$$

Пусть $v(x,y) = v_1(x) + v_2(y)$, тогда в уравнении

$$-\Delta u + v(x,y)u = \mu u$$

переменные разделяются и задача сводится к изучению спектра обыкновенных дифференциальных операторов в $L^2(0,\pi)$:

$$L_i f(t) = -f''(t) + v_i(t)f(t), \quad f(0) = f(\pi) = 0, \quad i = 1,2,$$

т.е. $L = L_1 + L_2$.

Пусть $\sigma(L_i) = \{\mu_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ – спектр оператора L_i, $i = 1,2$, $f_k(t) = \sqrt{2/\pi}\sin(kt)$ – ортонормированные собственные функции оператора $L_0 f(t) = -f''(t)$ с условиями $f(0) = f(\pi) = 0$, соответствующие собственным числам $\lambda_k = k^2$. Причём нетрудно убедиться в том, что если $v_i(t) \in W_2^2(0,\pi)$, то справедлива асимптотическая формула

$$\mu_k^{(i)} = k^2 + (v_i f_k, f_k) - \frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4}), \tag{2}$$

где

$$c_i = \frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_0^{\pi} v_i^2(t)\,dt - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\pi} v_i(t)\,dt\right)^2\right]. \tag{3}$$

Замечание. Отметим, что асимптотика второй поправки теории возмущений

$$\alpha_k^{(i)} = \sum_{m\neq k} \frac{(v_i f_k, f_m)^2}{m^2 - k^2} = \frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})$$

получена в статье [12] при более жёстких условиях на функцию $v_i(t)$, причём во втором слагаемом в (3) была допущена неточность: вместо коэффициента $1/\sqrt{\pi}$ в этой работе коэффициент равен единице.

Теперь докажем утверждение о выборе подпоследовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, по которой производится суммирование со скобками.

Лемма. *Пусть* $l^2 + z = k^2 + m^2$, $l,k,m = 1,2,\ldots,$ $1 \leqslant z \leqslant 2l+1$, $z \in \mathbb{N}$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{z_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *такая, что*

$$n_l = l^2 + z_l = k^2 + m^2,$$

причём для всех $l \geqslant 14$, *и*

$$l + 1 < z_l \leqslant 2l + 1,$$

т.е. $z_l \to \infty$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $l \geqslant 2$. Положив $k = l - 1$ в равенстве $l^2 + z_l = k^2 + m^2$, получим, что

$$z_l = m^2 - 2l + 1. \tag{4}$$

Пусть $m = [\sqrt{3l}] + 1$, тогда $m > \sqrt{3l}$. Следовательно, из (4) вытекает, что

$$z_l > l + 1. \tag{5}$$

Теперь покажем, что при нашем выборе m для всех $l \geqslant 14$ выполняется неравенство

$$z_l \leqslant 2l + 1. \tag{6}$$

Действительно, в силу (4) и (5) имеем

$$z_l = ([\sqrt{3l}] + 1)^2 - 2l + 1 \leqslant l + 2 + 2\sqrt{3l},$$

отсюда вытекает справедливость равенства (6), поскольку $l^2 - 14l + 1 \geqslant 0$ для всех $l \geqslant 14$. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $v(x,y) = v_1(x) + v_2(y)$, $v_i(t) \in W_2^2(0,\pi)$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{n_l\}_{l=1}^{\infty} = \{l^2 + z_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *такая, что*

$$\lim_{l\to\infty} \rho(l^2 + z_l + 0) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k^2+m^2 \leqslant l^2+z_l} [k^2 + m^2 + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_K v^2(x,y)\,dx\,dy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K v(x,y)\,dx\,dy\right)^2\right]. \tag{7}$$

Доказательство. Вначале заметим, что так как $N(t, L_i) = \overline{o}(t)$, $t \to \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Далее, пусть $l^2 + z_l = k^2 + m^2$, $k, m = 1, 2, \ldots$, числа z_l из леммы.

Положим $1 \leqslant m \leqslant l$, $k = [\sqrt{l^2 + z_l - m^2}]$. Тогда в силу соотношений (2) и (8) будем иметь равенства

$$\rho(l^2 + z_l + 0) = \sum_{k^2+m^2 \leqslant l^2+z_l} [k^2 + m^2 + (Vf_{km}, f_{km}) - \mu_{km}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{m=1}^{l} \sum_{k=1}^{[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]} (k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left\{ \sum_{k=1}^{[\sqrt{z_l}]} [k^2 + (v_i f_k, f_k) - \mu_k^{(i)}] + \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]+1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})\right) \right\}. \tag{9}$$

Далее нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{k=[\sqrt{l^2+z_l-m^2}]+1}^{\infty} \left(\frac{c_i}{k^2} + O(k^{-4})\right) = \frac{\pi c_i}{2}. \tag{10}$$

Теперь переходим к пределу при $l \to \infty$ в равенстве (9). Поскольку в силу леммы $z_l \to \infty$ при $l \to \infty$, то, использовав равенства (8) и (10), формулу (3) и тождество

$$\int\limits_K (v_1(x)+v_2(y))^2\,dx\,dy - \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_K (v_1(x)+v_2(y))\,dx\,dy\right)^2 = \pi\sum_{i=1}^{2}\left[\int\limits_0^\pi v_i^2(x)\,dx - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\pi v_i(x)\,dx\right)^2\right],$$

убедимся в справедливости равенства (7). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2022-888.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровский В.В., Пузанкова Е.А.* Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате, в L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 552–555.
2. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* О формулах следов для неядерных возмущений // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 442–444.
3. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152.
4. *Садовничий В.А., Дубровский В.В.* Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 61–62.
5. *Подольский В.Е.* Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 71–77.
6. *Фазуллин З.Ю.* Регуляризованная формула следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Тез. докл. междунар. конф. о комплексном анализе и сопряжённых вопросах. Нижний Новгород, 1997. С. 80–81.
7. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю.* Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа–Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 402–409.
8. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формулы следов // Уфимск. мат. журн. 2016. Т. 8. № 3. С. 22–40.
9. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 5. С. 89–156.
10. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 1. С. 19–21.
11. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Мат. сб. 2005. Т. 196. № 12. С. 123–156.
12. *Дикий Л.А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 3. С. 111–143.

Башкирский государственный университет,
г. Уфа

Поступила в редакцию 25.09.2022 г.
После доработки 25.09.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.