ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 12, с. 1716–1718

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА “СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ” ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2022 г. **В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий**

Рассматривается задача наблюдения для двумерной системы с неизвестным входным воздействием при наличии погрешности измерения. Для метода построения наблюдателя, основанного на алгоритме “супер-скручивания”, построены точные оценки величины ошибки наблюдения.

DOI: 10.31857/S0374064122120159, EDN: NDLQAZ

Введение. Исследования алгоритмов управления на основе переключаемых систем, систем с переменной структурой (и с использованием скользящих режимов, в частности) начались ещё в 60–70-е годы прошлого века (см., например, [1, 2]). В настоящее время это научное направление активно развивается (отметим монографии [3, 4]). Популярность таких алгоритмов объясняется их робастностью по отношению к внешним возмущениям. Одной из задач, в которой активно и успешно используются алгоритмы управления с использованием разрывных и нелинейных законов, является задача построения наблюдателей для систем с внешними возмущениями. В ряде работ показано, что эта задача может быть сведена к каскаду двумерных случаев (см., например, [5]), решение для которого, алгоритм “супер-скручивания” (super-twisting), было описано в работах [6, 7]. Для анализа такого алгоритма требуется исследовать на устойчивость систему

$$\dot{x}_1 = x_2 - k_1 \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi - k_2 \operatorname{sgn}(x_1), \tag{1}$$

где ξ – неизвестное ограниченное входное воздействие. Для систем вида (1) были получены условия глобальной асимптотической устойчивости [8–10]. Пользуясь этим алгоритмом, можно, в частности, решать задачи наблюдения для динамических систем в условиях неопределённости, если выходной сигнал системы известен точно.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача наблюдения для двумерной системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \xi, \quad y = x_1 + \delta,$$

где ξ – неизвестное ограниченное возмущение, $|\xi| \leqslant \xi_0$; δ – неизвестная ограниченная погрешность измерения, $|\delta| \leqslant \Delta$. Требуется построить оценку вектора состояния системы.

Для решения задачи можно использовать наблюдатель вида

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + \operatorname{sign}(\varepsilon_1)|\varepsilon_1|^{1/2}, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \mu \operatorname{sign}(\varepsilon_1),$$

где $\varepsilon_1 = y - \bar{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1 + \delta$, а $\mu > \xi_0$. Для ошибки оценивания с помощью такого наблюдателя справедливы уравнения

$$\dot{e}_1 = e_2 - \operatorname{sgn}(e_1 + \delta)|e_1 + \delta|^{1/2}, \quad \dot{e}_2 = \xi - \mu \operatorname{sgn}(e_1 + \delta), \tag{2}$$

где $e = x - \bar{x}$. В работе [5] было показано, что траектория системы (2) сходится в окрестность начала координат, малую при малом Δ, и была получена оценка величины этой окрестности. Целью данной работы является уточнение полученных результатов – получение вида области сходимости системы (2) и точной оценки величины этой области.

2. Система с наихудшими возмущениями. Поскольку уравнения системы (2) симметричны относительно e_1, то всюду далее будем рассматривать систему (2) в правой полуплоскости, т.е. при $e_1 > 0$. Положим начальные условия $(0, e_2^0)$, $e_2^0 > 0$. Будем рассматривать систему (2) при наихудшем возмущении $\xi(t)$ и наихудшей погрешности $\delta(t)$.

Сначала рассмотрим систему при $e_1 < \Delta$, $e_2 > 0$. В этой области справедливо неравенство $\dot{e}_2 \leqslant \mu + \xi_0$, причём если $\dot{e}_2 > 0$ (т.е. если $\delta(t) < -e_1(t) < 0$), то $\dot{e}_1 \geqslant e_2$. Таким образом, траектории системы (2) в этой области будут ограничены траекторией системы

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = \xi_0 + \mu. \tag{3}$$

Обозначим через t' момент времени, за который система (3) доходит до границы области, т.е. до момента, когда $e_1 = \Delta$, $e_2(t') = e_2'$.

В области $e_1 > \Delta$ будет справедлива система неравенств

$$\operatorname{sign}(e_1 + \delta) = \operatorname{sign}(e_1), \quad \dot{e}_1 \leqslant e_2 - (e_1 - \Delta)^{1/2}, \quad -\mu - \xi_0 \leqslant \dot{e}_2 \leqslant -\mu + \xi_0.$$

Из этого следует, что траектории системы (2) в этой области будут ограничены кривой $(\bar{e}_1(t) + {} + \Delta, e_2(t))$ системы

$$\dot{\bar{e}}_1 = e_2 - \bar{e}_1^{1/2}, \quad \dot{e}_2 = \xi_0 \operatorname{sign}(\dot{\bar{e}}_1) - \mu \tag{4}$$

с начальными условиями $\bar{e}_1(0) = 0$, $e_2(0) = e_2'$, где $\bar{e}_1 = e_1 - \Delta$. Для такой системы известно [5], что если $\mu > \xi_0 + 1/8$, то координата пересечения оси $\bar{e}_1 = 0$ равна $e_2'' = -\nu(\xi_0, \mu) e_2'$, где

$$(\nu(\xi_0, \mu))^2 = \frac{\mu + \xi_0}{\mu - \xi_0} \exp\left(\frac{-2\pi + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{8(\mu + \xi_0) - 1}}{\sqrt{8(\mu + \xi_0) - 1}} - \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{8(\mu - \xi_0) - 1}}{\sqrt{8(\mu - \xi_0) - 1}} \right).$$

После этого система попадает в область $e_1 < \Delta$, $e_2 < 0$. Для неё, аналогично области $e_1 < \Delta$, $e_2 > 0$, можно показать, что траектории системы (2) будут ограничены траекторией системы

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = -\mu - \xi_0 \tag{5}$$

с начальными условиями $e_1(0) = \Delta$, $e_2(0) = e_2''$. Оставшееся время пребывания системы в правой полуплоскости обозначим как t'', координату пересечения оси $e_1 = 0 - e_2^1$.

Решив уравнения ограничивающих систем (3), (5), получим систему уравнений

$$e_2^0 t' + \frac{\mu + \xi_0}{2} (t')^2 = \Delta, \quad -\nu e_2' t'' - \frac{\mu + \xi_0}{2} (t'')^2 = -\Delta,$$
$$e_2' = e_2^0 + (\mu + \xi_0) t', \quad e_2^1 = -\nu e_2' - (\mu + \xi_0) t''. \tag{6}$$

Найдём из первых двух уравнений t', t'' и подставим полученные значения в последние два. В результате получим

$$|e_2^1| = \sqrt{(\nu e_2^0)^2 + 2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}.$$

Значит, условие скручивания $|e_2^1| \leqslant e_2^0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$(e_2^0)^2 \geqslant \frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}.$$

После аналогичных рассуждений для левой полуплоскости имеем утверждение.

Теорема. *Система (2) с ограниченной погрешностью* $|\delta(t)| \leqslant \Delta$ *и таким* $\mu > \xi_0 + {} + 1/8$, *что* $\nu(\mu, \xi_0) < 1$, *сходится в область, ограниченную траекторией систем (3)–(5) в соответствующих областях, при следующих начальных условиях для системы (3) на оси* $e_1 = 0$:

$$e_1^0 = 0, \quad e_2^0 = \sqrt{\frac{2(\mu + \xi_0)(1 + \nu^2)\Delta}{1 - \nu^2}}.$$

Эта область описывается предельным циклом при наихудших возмущениях и указанных начальных условиях.

3. Оценка размеров области сходимости. Оценим размеры области, в которую гарантированно попадает система. Очевидно, что максимальное значение $e_2 = e_2'$. Максимальное же значение $e_1 = \Delta + \bar{e}_{1,\max}$, где $\bar{e}_{1,\max}$ – максимальное значение $\bar{e}_1(t)$ из (4) при движении системы в исследуемой области.

Для системы (4) в работе [5] был получен параметрический вид решения. Для интервала времени, когда $\dot{\bar{e}}_1 \geqslant 0$, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\ln(-2bz^2 - ze_2 + e_2^2) + \frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4bz+e_2}{-e_2\sqrt{-8b-1}}\right)\right) = \text{const},$$

где $z = \bar{e}_1^{1/2}$, $b = -\mu + \xi_0$. Максимально значение $\bar{e}_1$ достигается тогда, когда $e_2 = \bar{e}_1^{1/2} = z$. Подставив это условие, а также начальные условия $z(0) = 0$ в уравнение, получим

$$\bar{e}_{1,\max} = \frac{(e_2')^2}{-2b}\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4b+1}{\sqrt{-8b-1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\right)\right)\right\}.$$

Из системы (6) найдём e_2' и получим точную оценку на величину области сходимости системы (2) при ограниченном δ.

Следствие. *В случае выполнения условий теоремы система (2) сходится в область*

$$|e_2| \leqslant \sqrt{2\Delta(\mu+\xi_0)\frac{2}{1-\nu^2}} = e_{2,\max},$$

$$|e_1| \leqslant \Delta + \frac{(e_{2,\max})^2}{-2b}\exp\left\{\frac{2}{\sqrt{-8b-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4b+1}{\sqrt{-8b-1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-8b-1}}\right)\right)\right\},$$

где $b = -\mu + \xi_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
2. *Емельянов С.В., Уткин В.И.* Теория систем с переменной структурой. М., 1970.
3. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: управление при неопределённости. М., 1997.
4. *Shtessel Yu., Edwards Ch., Fridman L., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. New York, 2014.
5. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.
6. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
7. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
8. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Autom. Control. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
9. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
10. *Moreno J., Rios H., Ovalle L., Fridman L.* Multivariable super-twisting algorithm for systems with uncertain input matrix and perturbations // IEEE Trans. on Autom. Contr. 2021.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.10.2022 г.
После доработки 19.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.