ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 147–152

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРРОНОВСКОЙ И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОЙ ПОЛНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, НО МАССИВНОЙ ЧАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

© 2022 г. А. А. Бондарев

Конструктивно доказывается, что из полной перроновской и верхнепредельной (в отличие от ляпуновской) неустойчивости двумерной дифференциальной системы, вообще говоря, не следует её глобальная неустойчивость. Более того, построенный в работе пример вполне неустойчивой гладкой нелинейной системы обладает ещё и нулевым первым приближением (вдоль нулевого решения) и не просто частной, а даже массивной частной устойчивостью.

DOI: 10.31857/S0374064122020017

Настоящая работа посвящена изучению недавно введённого понятия качественной теории дифференциальных уравнений – устойчивости по Перрону и его модификациям [1]. Она продолжает работы [2, 3] автора, в которых построены примеры дифференциальных систем, показывающие некоторые возможные взаимоотношения и связи между различными типами устойчивости по Перрону с одной стороны, а с другой – реализуемость таких взаимоотношений на системах с теми или иными специальными свойствами.

В работе [4] построен пример вполне неустойчивой по Ляпунову и Перрону системы дифференциальных уравнений, имеющей ненулевое решение, стремящееся к нулю на бесконечности. В [4] построенная система имела не ограниченное на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ первое приближение вдоль нулевого решения. В [2] построен пример системы с такими же, как и в [4], асимптотическими свойствами её решений, но имеющей ограниченное на $\mathbb{R}_+$ первое приближение в нуле. Этот результат усилен в [3]: такая система может иметь тождественно нулевое первое приближение вдоль нулевого решения.

Усиление перечисленных результатов, полученное в данной работе, состоит в построении системы, обладающей теми же перроновскими и верхнепредельными свойствами: во-первых, полной неустойчивостью (а значит, кстати, и ляпуновской полной неустойчивостью, из которой вытекает и ляпуновская же глобальная неустойчивость), а во-вторых, частной устойчивостью (которой обладали также примеры, предложенные ранее) и даже массивной частной устойчивостью [5] (которой указанные примеры не обладали).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \quad x \in G, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$, $\quad f(t,0) = 0$, $\quad t \in \mathbb{R}_+$, а значит, имеющей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ – подмножество, состоящее из тех её решений x, которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение (см., например, [1]). Скажем, что для системы (1) (точнее, для её *нулевого* решения, о чём для краткости не будет далее упоминаться) имеет место *перроновская* или, соответственно, *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчивость*, если устойчивость не имеет места, а именно, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ некоторое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *полная неустойчивость*, если для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

4) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

5) *частная устойчивость*, если она не обладает глобальной неустойчивостью, а именно, для любого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно её решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет требованию (2);

6) *массивная частная устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f) \setminus \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию (2).

Подчеркнём, что в этом определении требования (2) считаются не выполненными, в частности, уже тогда, когда решение x определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе фазовой области G (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [6, теорема 23]).

Мы не упомянули здесь такие, не менее интересные [5, 7], но не изучаемые в нашей работе разновидности перроновских и верхнепредельных свойств (не говоря уже об их ляпуновских аналогах), как асимптотическая устойчивость или неустойчивость, частичная устойчивость, глобальная устойчивость и частная неустойчивость, а также не указали, какие из них являются массивными непосредственно по определению.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования дифференциальной системы, у которой все решения, начинающиеся достаточно близко к началу координат, стремятся по норме к бесконечности при $t \to +\infty$, следовательно, эта система обладает полной неустойчивостью (как перроновской, так и верхнепредельной), а все остальные решения стремятся к нулю, т.е. система тем не менее не обладает глобальной неустойчивостью (ни перроновской, ни верхнепредельной) или, что то же, обладает частной устойчивостью, причём не просто частной, а даже массивной.

Теорема. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует система (1) с правой частью, для которой $f'_x(t,0) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, обладающая следующими двумя свойствами:*

1) *для каждого решения $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{т}}$ системы (1), удовлетворяющего любому из начальных условий: $0 < |x(0)| < 1$, или $x(0) = (1,0)^{\mathrm{т}}$, или $|x(0)| = 1$, но $x_2(0) < 0$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$;*

2) *для всех остальных решений системы (1), т.е. удовлетворяющих любому из начальных условий: $|x(0)| > 1$, или $x(0) = (-1,0)^{\mathrm{т}}$, или $|x(0)| = 1$, но $x_2(0) > 0$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$.*

Доказательство. Введём на декартовой плоскости с координатами x_1, x_2 полярные координаты ρ, φ $(\rho \geqslant 0,\ \ \varphi \in \mathbb{R})$:

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi \tag{3}$$

и рассмотрим автономную двумерную систему

$$\begin{pmatrix}\dot\rho\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \rho^2\begin{pmatrix}1-\rho\\ \sin^2\varphi + \chi(\rho,\varphi)\end{pmatrix}, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

где $\chi(\rho,\varphi) = (\rho-1)^2\cos^2\varphi$, если $(\rho-1)\cos\varphi \geqslant 0$, и $\chi(\rho,\varphi) = 0$ в противном случае.

Равенство (4) задаёт векторное поле в области $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ переменных (ρ,φ), которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулой (3), переносится на проколотую окрестность $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2). Полученное поле непрерывно продолжается в начало координат нулём, причём продолженное поле непрерывно дифференцируемо в начале координат и имеет нулевое линейное приближение за счёт наличия в правой части системы множителя ρ^2. Из сказанного следует, что система (4) допускает нулевое решение. Значит, она является системой вида (1).

Первое уравнение системы (4) задаёт динамическую систему на прямой (точнее, на полупрямой $\mathbb{R}_+$, так как по смыслу $\rho \geqslant 0$), имеющую на $\mathbb{R}_+$ две неподвижные точки: 0 и 1. При этом очевидно, что если $\rho(0)$ отлично от 0 и 1, то $\rho(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

А. Рассмотрим сначала все ненулевые решения данной системы, удовлетворяющие условию $\rho(0) < 1$. Такие решения имеются двух типов.

Тип 1. Для решений x, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливо равенство $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Тип 2. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (4) возрастает при $t \to +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ решение обязательно войдёт в область (4-ю четверть внутри круга) $V_4^\bullet = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, \ \ x_1 > 0, \ \ x_2 < 0\}$, в которой функция $\chi(\rho, \varphi)$ нулевая. В этой области система (4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot\rho \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} 1 - \rho \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

следовательно, для рассматриваемых решений $\varphi(t) \to 2\pi$ при $t \to +\infty$.

Б. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\rho(0) > 1$. Такие решения у рассматриваемой системы (4) имеются двух типов.

Тип 3. Для решений x, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = \pi$, справедливо равенство $\varphi(t) = \pi$ при $t \in \mathbb{R}_+$.

Тип 4. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq \pi$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (4) возрастает при $t \to +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ решение обязательно войдёт в область (2-ю четверть вне круга) $V_2^\circ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1, \ \ x_1 < 0, \ \ x_2 > 0\}$, в которой функция $\chi(\rho, \varphi)$ нулевая. В этой области система (4) принимает вид (5), следовательно, для рассматриваемых решений выполняется соотношение $\varphi(t) \to \pi$ при $t \to +\infty$.

В. Рассмотрим теперь решения, удовлетворяющие начальному условию $\rho(0) = 1$. Такие решения бывают также двух типов.

Тип 5. Особыми точками системы (4) являются $e_1 = (1, 0)^{\mathrm{т}}$ и $e_2 = (-1, 0)^{\mathrm{т}}$, которые, как показано в пп. А и Б, представляют собой точки притяжения внутренности и внешности единичного круга соответственно.

Тип 6. Рассмотрим решения x, удовлетворяющие условию $x_2(0) \neq 0$. Угловая координата $\varphi(t)$ каждого решения этого типа удовлетворяет уравнению $\dot\varphi = \sin^2 \varphi$, поэтому решения с начальным условием $x_2(0) > 0$ асимптотически притягиваются при $t \to +\infty$ к особой точке e_2, а все остальные – к особой точке e_1.

Для упрощения в дальнейшем записи обозначим

$$\omega(a, b) = \int\limits_a^b \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\tau - \frac{1}{3}\right)^{-1}\right) d\tau \quad \text{и} \quad \delta(a, b) = \int\limits_a^b \exp\left(\left(\tau + \frac{1}{2 + t}\right)^{-1} \left(\tau + \frac{1}{3 + t}\right)^{-1}\right) d\tau.$$

Для $i = 1, 2$ рассмотрим функции $\chi_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданные условиями

$$\chi_1(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant 1/3, \\ C_1(t)\omega(1/3, u), & \text{если} \quad 1/3 \leqslant u \leqslant 1/2, \\ t, & \text{если} \quad u \geqslant 1/2, \end{cases}$$

где $C_1(t) = t/\omega(1/3, 1/2)$, и

$$\chi_2(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \leqslant -1/(2 + t), \\ C_2(t)\delta(-1/(2 + t), u), & \text{если} \quad -1/(2 + t) \leqslant u \leqslant -1/(3 + t), \\ \dfrac{t}{1 + t}, & \text{если} \quad u \geqslant -1/(3 + t), \end{cases}$$

где $C_2(t) = t((1 + t)\delta(-1/(2 + t), -1/(3 + t)))^{-1}$, которые являются гладкими функциями класса C^∞ по переменной u при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}_+$. Для краткости записи также введём обозначения константы Σ_1 и функции $\Sigma_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, задав их равенствами

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\omega(1/3,1/2)} \int\limits_{1/3}^{1/2} \omega(1/3,u)\,du \quad \text{и} \quad \Sigma_2(t) = \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \chi_2(t,\tau)\,d\tau.$$

Теперь сделаем в рассматриваемой системе (4) неавтономную замену переменных

$$y_1 = \theta(t,x_1), \quad y_2 = x_2, \tag{6}$$

где

$$\theta(t,x_1) = \begin{cases} (t+1)x_1 + \left(b_1(t) - \dfrac{t+1}{2}\right), & \text{если} \quad x_1 \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{3} + \displaystyle\int\limits_{1/3}^{x_1} (1+\chi_1(t,\tau))\,d\tau, & \text{если} \quad \dfrac{1}{3} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ x_1, & \text{если} \quad -\dfrac{1}{3+t} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ b_2(t) + \displaystyle\int\limits_{-1/(2+t)}^{x_1} \left(\dfrac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau, & \text{если} \quad -\dfrac{1}{2+t} \leqslant x_1 \leqslant -\dfrac{1}{3+t}, \\ \dfrac{1}{1+t}x_1 + \left(\dfrac{1}{(2+t)(1+t)} + b_2(t)\right), & \text{если} \quad x_1 \leqslant -\dfrac{1}{2+t}, \end{cases}$$

а функции $b_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и $b_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задаются равенствами

$$b_1(t) = t\Sigma_1 + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad b_2(t) = -\frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} - \frac{1}{(1+t)(2+t)} - \Sigma_2(t).$$

Прежде всего покажем, что функция $\theta(t,\cdot)$ является гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}_+$. Для этого заметим, что она является линейной функцией (а значит, и гладкой) всюду за исключением отрезков $[-1/(2+t), -1/(3+t)]$ и $[1/3, 1/2]$. Внутри этих отрезков функция $\theta(t,\cdot)$ гладкая по построению, поэтому остаётся проверить её гладкость в четырёх точках $-1/(2+t)$, $-1/(3+t)$, $1/3$, $1/2$.

А. Проверим сначала непрерывность. Равенство

$$\theta\left(t, \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{3} + \int\limits_{1/3}^{1/2} (1+\chi_1(t,\tau))\,d\tau = \frac{1}{3} + \tau\Big|_{1/3}^{1/2} + t\Sigma_1 = b_1(t) = \theta\left(t, \frac{1}{2} + 0\right)$$

и аналогично устанавливаемое равенство $\theta(t,1/3+0) = \theta(t,1/3-0)$ доказывают непрерывность функции $\theta(t,\cdot)$ в точках $1/2$ и $1/3$ соответственно. Далее, выполнение равенств

$$\theta\left(t, -\frac{1}{3+t} - 0\right) = b_2(t) + \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \left(\frac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau = b_2(t) + \frac{\tau}{1+t}\Big|_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} + \Sigma_2(t) =$$

$$= -\frac{1}{3+t} = \theta\left(t, -\frac{1}{3+t} + 0\right)$$

и

$$\theta\left(t, -\frac{1}{2+t} + 0\right) = b_2(t) + \int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(2+t)} \left(\frac{1}{1+t} + \chi_2(t,\tau)\right) d\tau = b_2(t) = \theta\left(t, -\frac{1}{2+t} - 0\right)$$

доказывает непрерывность в точках $-1/(3+t)$ и $-1/(2+t)$ соответственно.

Б. Проверим непрерывную дифференцируемость функции $\theta(t,\cdot)$ в рассматриваемых четырёх точках. В точках $-1/2$ и $-1/3$ непрерывная дифференцируемость следует из равенств

$$\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{2}-0\right)=(1+\chi_1(t,\tau))|_{\tau=1/2}=1+t=\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{2}+0\right)$$

и, соответственно,

$$\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{3}+0\right)=(1+\chi_1(t,\tau))|_{\tau=1/3}=1=\theta'_{x_1}\left(t,\frac{1}{3}-0\right).$$

Аналогично выполнение равенств

$$\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{3+t}-0\right)=\left(\frac{1}{1+t}+\chi_2(t,\tau)\right)\bigg|_{\tau=-1/(3+t)}=1=\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{3+t}+0\right)$$

и

$$\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{2+t}+0\right)=\left(\frac{1}{1+t}+\chi_2(t,\tau)\right)\bigg|_{\tau=-1/(2+t)}=\frac{1}{1+t}=\theta'_{x_1}\left(t,-\frac{1}{2+t}-0\right)$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках $-1/(3+t)$ и $-1/(2+t)$.

Теперь заметим, что в силу бесконечной дифференцируемости функций χ_i, а также выполнения для каждого $m\in\mathbb{N}$ равенств

$$\chi_1^{(m)}\left(t,\frac{1}{2}\right)=\chi_1^{(m)}\left(t,\frac{1}{3}\right)=\chi_2^{(m)}\left(t,-\frac{1}{3+t}\right)=\chi_2^{(m)}\left(t,-\frac{1}{2+t}\right)=0$$

функция $\theta(t,\cdot)$ является бесконечно дифференцируемой функцией своего аргумента для каждого фиксированного значения $t\in\mathbb{R}_+$. Покажем также, что она является возрастающей биекцией $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Действительно,

$$\theta'_{x_1}(t,x_1)=\begin{cases}(t+1), & \text{если}\quad x_1\geqslant\dfrac{1}{2},\\ 1+\chi_1(t,x_1), & \text{если}\quad \dfrac{1}{3}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 1, & \text{если}\quad -\dfrac{1}{3+t}\leqslant x_1\leqslant\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{1+t}+\chi_2(t,x_1), & \text{если}\quad -\dfrac{1}{2+t}\leqslant x_1\leqslant-\dfrac{1}{3+t},\\ \dfrac{1}{1+t}, & \text{если}\quad x_1\leqslant-\dfrac{1}{2+t},\end{cases}$$

откуда следует, что $\theta'_{x_1}(t,x_1)>0$, $t\in\mathbb{R}_+$, $x_1\in\mathbb{R}$, следовательно, функция $\theta(t,\cdot)$ монотонна и инъективна. Заметим, что при фиксированном значении $t\in\mathbb{R}_+$ выполняются и соотношения

$$\lim_{x_1\to+\infty}\theta(t,x_1)=+\infty\quad\text{и}\quad\lim_{x_1\to-\infty}\theta(t,x_1)=-\infty,$$

в силу которых и непрерывности функции $\theta(t,\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R})$ получаем, что $\theta(t,\cdot)$ принимает все промежуточные значения от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. является сюръекцией из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

Остаётся заметить, что функция θ имеет непрерывные по совокупности переменных (t,x_1) производные всех порядков по t и x_1 на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, поэтому после такой замены (6) система (4) принимает вид

$$\dot y=F(t,y),\quad (t,y)=(t,(y_1,y_2)^{\mathrm{T}})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2,\tag{7}$$

с правой частью $F:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условию $F,F'_y\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)$.

Далее, для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ в открытой полосе

$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1/(3+t) < x_1 < 1/3, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

содержащей начало координат, замена (6) имеет вид $y = x$, следовательно, построенная система (7) имеет нулевую матрицу линейного приближения вдоль нулевого решения (так как этим же свойством обладает система (4)). Из сказанного выше следует, что система (7) является системой вида (1).

Теперь покажем, что система (7) обладает свойствами 1) и 2) доказываемой теоремы. Действительно, в силу положительности константы Σ_1 равномерно по $x_1 \in [1/2, 1]$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t, x_1) = \lim_{t\to+\infty}\left((t+1)x_1 + \left(t\Sigma_1 + \frac{1}{2} - \frac{t+1}{2}\right)\right) \geqslant \lim_{t\to+\infty} t\Sigma_1 = +\infty,$$

что обеспечивает выполнение свойства 1). Далее заметим, что справедливы оценки

$$|\Sigma_2(t)| = \left|\int\limits_{-1/(2+t)}^{-1/(3+t)} \chi_2(t,\tau)\,d\tau\right| \leqslant \left(-\frac{1}{3+t} + \frac{1}{2+t}\right) \max_{\tau\in[-1/(2+t),-1/(3+t)]} |\chi_2(t,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(-\frac{1}{3+t} + \frac{1}{2+t}\right)\frac{t}{1+t} \to 0$$

при $t \to +\infty$, следовательно, равномерно по $x_1 \in [-2, -1]$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} |\theta(t, x_1)| = \lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{1+t}x_1 + \left(\frac{1}{(2+t)(1+t)} + b_2(t)\right)\right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{1+t}\left(x_1 + \frac{1}{2+t}\right) - \frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} - \frac{1}{(1+t)(2+t)} - \Sigma_2(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3}{1+t} + \frac{1}{3+t} + \frac{1}{(1+t)(3+t)} + |\Sigma_2(t)|\right) = 0,$$

откуда вытекает свойство 2). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. *Бондарев А.А.* Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.
3. *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
4. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
5. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
6. *Сергеев И.Н.* Лекции по дифференциальным уравнениям. М., 2019.
7. *Сергеев И.Н.* Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.09.2021 г.
После доработки 16.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.