ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 153–163

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЁННОЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ P_{34}

© 2022 г. В. И. Громак

Для нелинейных уравнений обобщённой иерархии уравнения P_{34} из классификационного списка Пенлеве исследуются локальные аналитические свойства решений, преобразования Беклунда, рациональные решения и их представление через специальные функции и полиномы.

DOI: 10.31857/S0374064122020029

Введение. В настоящее время решения уравнений Пенлеве (P_1-P_6), называемые трансцендентами Пенлеве, рассматриваются как нелинейные версии специальных функций, а уравнения Пенлеве [1, гл. 12; 2, гл. 10; 3, гл. 2], первоначально возникшие при рассмотрении классификационной проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно свойства Пенлеве, т.е. отсутствия у решений подвижных многозначных особых точек, имеют многочисленные приложения как в различных областях математики, например в изомонодромной проблеме на сфере Римана [4–6], так и в различных областях математической физики, особенно в приложениях к классическим, квантовым и дискретным интегрируемым системам [7, гл. 8; 8, гл. 4–7; 9, гл. 3–5]. В связи с этим также важным является рассмотрение иерархий уравнений Пенлеве и связанных с ними уравнений, т.е. множества нелинейных уравнений, имеющих одинаковую алгебраическую структуру с уравнениями Пенлеве [10–18].

В настоящей работе рассматриваются некоторые аналитические свойства решений уравнений обобщённой иерархии уравнения P_{34} в классификации Пенлеве, которое является модифицированным уравнением второго уравнения Пенлеве P_2.

Обобщённая иерархия уравнения P_{34}. Известно [19], что обобщённая иерархия второго уравнения Пенлеве P_2 может быть записана в виде

$$\widetilde{P}_2^{[2N]}:\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\widetilde{L}_N[w'-w^2]-zw-\alpha=0,\quad N=1,2,\ldots,\tag{1}$$

в которой оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u]=\left(\frac{d^3}{dz^3}+(4u+\beta_N)\frac{d}{dz}+2u_z\right)\widetilde{L}_N[u],\quad \widetilde{L}_1[u]=u,\quad u=u(z),\quad N=1,2,\ldots,\tag{2}$$

где α и β_N – числовые параметры. Согласно соотношению (2) последовательно находим

$$\widetilde{L}_2[u]=u_{zz}+3u^2+\beta_1u,$$

$$\widetilde{L}_3[u]=10u^3+u\beta_1\beta_2+3u^2(\beta_1+\beta_2)+5(u_z)^2+(10u+\beta_1+\beta_2)u_{zz}+u_{4z},$$

$$\widetilde{L}_4[u]=35u^4+s_3u+10u^3s_1+3u^2s_2+5(14u+s_1)u_z^2+$$

$$+(70u^2+s_2+10us_1)u_{zz}+21u_{zz}^2+28u_zu_{zzz}+(14u+s_1)u_{4z}+u_{6z},$$

$$s_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\quad s_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3,\quad s_3=\beta_1\beta_2\beta_3.$$

Если в операторе $\widetilde{L}_N$ параметр*) $\beta = 0,$ то $\widetilde{L}_N = L_N.$ При этом относительно оператора $\widetilde{L}_N$ справедливо представление (лемма 1 из [20])

$$\widetilde{L}_N[u] = \sum_{j=0}^{N-1} s_j L_{N-j}[u], \tag{3}$$

в котором $s_0 = 1,$ а $s_j,$ $j = \overline{1, N-1},$ – основные симметрические полиномы параметров $\beta_1,$ $\beta_2,$ $\ldots,$ $\beta_{N-1},$ $N = 2, 3, \ldots$

Для $N = 1, 2, 3$ из (1), (2) находим первые три уравнения иерархии:

$$\widetilde{P}_2^{[2]} = P_2 : w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$\widetilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha,$$

$$\begin{gathered}\widetilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} = 2w^2(5(\beta_1 + \beta_2)w'' + 7w^{(4)}) - w^{(4)}(\beta_1 + \beta_2) - 70w^4w'' + \\ + w(10(\beta_1 + \beta_2)(w')^2 + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}) - (\beta_1\beta_2 - 70(w')^2)w'' + \\ + 2w^3(\beta_1\beta_2 - 70(w')^2) - 6w^5(\beta_1 + \beta_2) + 20w^7 + zw + \alpha.\end{gathered}$$

Уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной системы

$$w' = q + w^2, \quad \Psi' + 2\Psi w - \sigma = 0, \tag{4}$$

где введены функции

$$q(z) := w'(z) - w(z)^2, \quad \Psi(q(z)) := \widetilde{L}_N[q] - z/2. \tag{5}$$

Если из системы (4) исключить функцию $q(z),$ то относительно $w(z)$ будем иметь уравнение (1). Если же из системы (4) исключить функцию $w(z),$ то относительно $q(z)$ получим уравнение

$$\Psi'' - \frac{(\Psi')^2}{2\Psi} + 2q\Psi + \frac{\sigma^2}{2\Psi} = 0, \tag{6}$$

где $\sigma = \alpha - 1/2,$ $\Psi = \Psi(q(z)) \neq 0,$ $(\cdot)' = d(\cdot)/dz.$

Уравнение $\Psi(q) = 0$ определяет обобщённую иерархию первого уравнения Пенлеве. При этом уравнение $P_2^{[2N]}$ записывается в виде

$$P_2^{[2N]} : (D + 2w)\Psi(q) + 1/2 - \alpha = 0.$$

Следовательно, если $q = q(z)$ – решение уравнения $\Psi(q) = 0$ при $\sigma = 0,$ то функция $w(z),$ определяемая из уравнения Риккати $w' - w^2 = q,$ является решением уравнения $P_2^{[2N]}$ при $\alpha = 1/2.$ Это свойство аналогично соотношению между решениями уравнений иерархий первого и второго уравнений Пенлеве [3, с. 293].

Система (4) определяет соотношение между решениями уравнений иерархий (1) и (6):

$$M : w(z) \mapsto q(z) = w'(z) - w(z)^2,$$

$$M^{-1} : q(z) \mapsto w(z) = -\frac{\Psi'(q) - \sigma}{2\Psi(q)}, \quad \Psi(q) \neq 0, \quad (\cdot)' = \frac{d}{dz}(\cdot). \tag{7}$$

При $N = 1$ уравнение (1) – второе уравнение Пенлеве $P_2.$ Функция $\Psi(q)$ из (5) в этом случае имеет вид $\Psi_1(z) = q - z/2,$ а первое уравнение иерархии (6) следующее:

$$q'' = (4q^3 - 4zq^2 + z^2q + q' - (q')^2 + \sigma^2 - 1/4)/(z - 2q). \tag{8}$$

*) Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{N-1}).$

Уравнение (8) калибровочным преобразованием $q \mapsto \sigma q + z/2$ приводится к уравнению

$$P_{34} : q'' = (q')^2/(2q) - zq - 2\sigma q^2 - 1/(2q).$$

Это уравнение имеет порядковый номер 34 в классификационном списке Пенлеве [1, с. 456], а значит, его решения не имеют подвижных критических точек, т.е., другими словами, оно обладает свойством Пенлеве. Более того, в силу связи между уравнениями (8) и P_2 все решения уравнения (8), как и решения уравнения P_2, являются мероморфными функциями.

В случае $N = 2$ функция $\Psi(q)$ имеет вид $\Psi_2(z) = q'' + 3q^2 + \beta_1 q - z/2$, а уравнение относительно $q(z)$ следующее:

$$q^{(4)} = (\Psi_2')^2/(2\Psi_2) - 2q\Psi_2 - 6(q')^2 - q''(6q + \beta_1) - \sigma^2/(2\Psi_2). \tag{9}$$

В случае $N = 3$ функция $\Psi(q)$ имеет вид

$$\Psi_3(z) = q^{(4)} + 10q^3 + (3q^2 + q'')s_1 + 5(q')^2 + q(s_2 + 10q'') - z/2,$$

а уравнение относительно $q(z)$ следующее:

$$q^{(6)} = (\Psi_3')^2/(2\Psi_3) - 2q\Psi_3 - (60q + 6s_1)(q')^2 - (20q'' + 30q^2 + 6qs_1 + s_2)q'' -$$
$$- 30q'q^{(3)} - (10q + s_1)q^{(4)} - \sigma^2/(2\Psi_3), \tag{10}$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Заметим, что преобразование M из (7) является преобразованием Миуры и, следовательно, уравнение (6) можно рассматривать как редукцию уравнения (1) относительно преобразования Миуры. Таким образом, следуя терминологии теории уравнения Котевега–де Фриза, по сути уравнение (6) является модифицированным уравнением (1). Мы же будем называть уравнение (6), следуя терминологии теории уравнений Пенлеве, уравнением, определяющим обобщённую иерархию $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ уравнения P_{34}. Заметим, что иерархия $P_{34}^{[2N]}$ уравнения P_{34} может быть получена из (6), если положить $\beta = 0$. При этом уравнение $\tilde{P}_{34}^{[2N]}$ имеет порядок $2N$, где N определяет номер оператора $\tilde{L}_N$ и номер уравнения иерархии. Решение N-го уравнения (6) обозначаем через $q^{[N]}(z)$, однако иногда для упрощения записи, если это не искажает смысл, верхний индекс будем опускать.

В настоящей работе исследуются некоторые аналитические свойства решений уравнений иерархии (6).

Локальные свойства решений. Прежде всего рассмотрим свойства решений уравнения (6), которые непосредственно вытекают из свойств решений уравнения (1).

Лемма 1. *Решения $w(z)$ и $q(z)$, связанные соотношениями (7), меромофны или рациональны одновременно.*

Справедливость леммы следует непосредственно из соотношений (7), определения (5) функции $\Psi(q)$ и определения (2) оператора $\widetilde{L}_N$.

Лемма 2. *Решение $q^{[N]}(z)$ N-го уравнения из (6) может иметь только полюсы второго порядка с нулевым вычетом и только в полюсах решения $w^{[N]}(z)$.*

Доказательство. Действительно, если z_0 – полюс решения $q^{[N]}(z)$, то в силу M^{-1}-преобразования решение $w^{[N]}(z)$ в точке z_0 либо голоморфно, либо имеет полюс. Но в силу M-преобразования z_0 не может быть точкой голоморфности решения $w^{[N]}(z)$ в случае полярности решения $q^{[N]}(z)$ в точке z_0. Следовательно, $w^{[N]}(z)$ в z_0 имеет полюс. Так как решение $w^{[N]}(z)$ уравнения (1) может иметь только простые полюсы с разложением (см., например, [21])

$$w^{[N]}(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + O(z - z_0),$$

в котором вычет $c_{-1} \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$, то отсюда следует, что в окрестности полюса $z = z_0$ решение $q^{[N]}(z)$ N-го уравнения из (6) имеет разложение

$$q^{[N]}(z) = c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_0 + O(z - z_0), \tag{11}$$

где $c_{-2} = \mathrm{res}_{z=z_0}(zq^{[N]}(z)) = -m(m+1)$, $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Лемма доказана.

В частности, для уравнения (8) в окрестности подвижного полюса z_0 решение имеет разложение

$$q^{[1]}(z) = -2t^{-2} + \frac{z_0}{6} + ht^2 - \frac{z_0 t^3}{18} + \frac{t^4}{6048}(720hz_0 + 8z_0^3 + 27(4\sigma^2 - 9)) + \sum_{j=5}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная, а коэффициенты c_j, $j > 4$, однозначно определяются через z_0, h и параметр σ.

Для рациональных решений уравнений иерархии (6) бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является точкой голоморфности. В частности, для уравнения (8) рациональное решение в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$ имеет разложение

$$q^{[1]}(z) = (1/4 - \sigma^2)/z^2 + (9 - 40\sigma^2 + 16\sigma^4)/(4z^5) - 7(876\sigma^2 - 189 - 496\sigma^4 + 64\sigma^6)/(16z^8) + O(z^{-9}).$$

Для уравнения (9) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ решение имеет одно из следующих разложений: либо

$$q^{[2]}(z) = -2t^{-2} - \beta_1/6 - \frac{6z_0 + \beta_1^2}{120}t^2 - \frac{2\sigma + 3}{36}t^3 + h_1 t^4 - \frac{\sigma\beta_1}{360}t^5 + h_2 t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры β_1, σ; либо

$$q^{[2]}(z) = -6t^{-2} - \beta_1/10 - \frac{(10z_0 + 3\beta_1^2)t^2}{1400} + h_1 t^4 - \frac{\beta_1 t^5}{1200} + h_2 t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j,$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры β_1, σ.

Для мероморфного решения $q^{[N]}(z)$ уравнения (6) функция

$$\tau^{[N]}(z) = \exp\biggl(\int^z \biggl(\int^z q^{[N]}(z)dz\biggr)dz\biggr) \tag{12}$$

является целой с нулями порядка $m(m+1)$, где $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, в полюсах $q^{[N]}(z)$. В справедливости этого утверждения несложно убедиться непосредственно, подставив разложение (11) в правую часть функции (12).

Заметим также, что произвольное мероморфное нерациональное решение $q(z)$ уравнения (6) имеет бесконечное число полюсов второго порядка с нулевым вычетом. Это утверждение следует из теоремы Виттиха [22, с. 118], согласно которой алгебраическое дифференциальное уравнение с одним доминирующим членом не может иметь целых трансцендентных решений. Уравнение из иерархии (6) после умножения на 2Ψ станет полиномиальным относительно q, q', $\ldots$, $q^{(2N)}$ с одним доминирующим членом, определяемым из выражения $4q\Psi^2$, и, по сути, из выражения $4q(\widetilde{L}_N[q])^2$. В самом деле, доминирующий член при $N = 1$ – это $4q^3$, при $N = 2$ – это $36q^5$, при $N = 3$ – это $400q^7$. Однако в силу (3) доминирующий член выражения $\widetilde{L}_N[q]$ совпадает с доминирующим членом выражения $L_N[q]$, который равен $a_N q^N$, где $a_N \neq 0$ – константа (см., например, [23]). Следовательно, выражение $4q\Psi^2$ содержит один доминирующий член $4a_N^2 q^{2N+1}$. Если при этом предположить, что мероморфное нерациональное решение $q(z)$ имеет конечное число полюсов, то тогда функция $v(z) = P(z)q(z)$ с подходящим полиномом $P(z)$ является целой трансцендентной функцией и при этом функция $v(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению с одним доминирующим членом, что противоречит предположению. Заметим также, что аналогичное утверждение справедливо и для уравнений иерархии (1).

Преобразования Беклунда. Система (4) устанавливает связь между решениями уравнений (1) и (6) в соответствии с преобразованиями (7). При этом уравнение (1) имеет дискретную симметрию
$$S : w(z,\alpha,\beta) \mapsto -w(z,-\alpha,\beta). \tag{13}$$
Уравнение (6) также имеет дискретную симметрию
$$S_0 : q(z,\sigma,\beta) \mapsto \hat{q}(z,\hat{\sigma},\beta) = q(z,-\sigma,\beta), \quad \hat{\sigma} = -\sigma, \tag{14}$$
которая означает, что функция $q(z,\sigma,\beta)$ является решением уравнения (6) как для параметров (σ,β), так и для параметров $(-\sigma,\beta)$. В работе [20] на основании преобразований (7), (13), (14) получены преобразования Беклунда
$$T : w_\alpha \mapsto w_{\alpha+1} = -w_\alpha + \frac{2\alpha+1}{2\widetilde{L}_N[-w'_\alpha - w_\alpha^2] - z}, \tag{15}$$
$$T^{-1} : w_{\alpha+1} \mapsto w_\alpha = -w_{\alpha+1} + \frac{2\alpha+1}{2\widetilde{L}_N[w'_{\alpha+1} - w_{\alpha+1}^2] - z} \tag{16}$$
для уравнения (1) и преобразование Беклунда для уравнения (6), т.е. доказана

Теорема 1. *Пусть $q_\sigma = q(z,\sigma,\beta)$ – решение произвольного уравнения иерархии (6) при фиксированном значении параметров (σ,β). Тогда преобразования*
$$B : q_\sigma \mapsto q_{\sigma+1} = -q_\sigma - \frac{1}{2}\biggl(\frac{\Psi'(q_\sigma) - \sigma}{\Psi(q_\sigma)}\biggr)^2, \tag{17}$$
$$B^{-1} : q_\sigma \mapsto q_{\sigma-1} = -q_\sigma - \frac{1}{2}\biggl(\frac{\Psi'(q_\sigma) + \sigma}{\Psi(q_\sigma)}\biggr)^2, \tag{18}$$
где $\Psi(\cdot) \neq 0$, $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$, также определяют решения этого уравнения.

В следующем пункте работы мы рассмотрим приложение преобразований (17), (18) к построению рациональных решений уравнения (6). Заметим, что преобразования Беклунда (17), (18) определяют алгебру Вейля на множестве решений. В частности, для уравнения (8) три последовательные решения $q_{\sigma-1}$, q_σ, $q_{\sigma+1}$, образованные преобразованием (17), связаны алгебраическим соотношением
$$4(z-2q_\sigma)^4(q_{\sigma-1}+q_\sigma)(q_\sigma+q_{\sigma+1}) - (8\sigma^2 + (z-2q_\sigma)^2(q_{\sigma-1}+2q_\sigma+q_{\sigma+1}))^2 = 0.$$

Рассмотрим ещё один класс преобразований, которые позволяют строить решения уравнения (6) по известному решению при фиксированных значениях параметров (σ,β). Такой класс преобразований назовём *автопреобразованиями* уравнения (6).

Для уравнения (1) автопреобразования Беклунда имеют вид [20]
$$\widetilde{w}(z,\alpha,\beta) = T^n \circ S \circ T^{-n} w(z,\alpha,\beta), \quad \alpha = n \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$
При этом решения $\widetilde{w}(z,\alpha,\beta)$ и $w(z,\alpha,\beta)$ совпадают лишь в случае, если они рациональные решения. Приведём аналогичный класс преобразований для уравнения (6).

Пусть $q = q(z,\sigma,\beta)$ – фиксированное решение уравнения (6) для фиксированных значений параметров σ, β; при этом в соответствии $\sigma = \alpha - 1/2$ принимаем $\sigma = n - 1/2$, $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\Psi(q) \neq 0$ и "новое" решение уравнения (6) при этих же значениях параметров строим в соответствии со схемой
$$q(z,\sigma,\beta) \overset{M^{-1}}{\mapsto} w(z,\alpha,\beta) \overset{T^n\circ S\circ T^{-n}}{\longmapsto} \tilde{w}(z,\alpha,\beta) \overset{M}{\mapsto} \tilde{q}(z,\sigma,\beta).$$
Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть* $q = q(z,\sigma,\beta)$ *– произвольное решение уравнения (6) при* $\sigma = n - 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция* $\tilde{q}(z,\sigma,\beta)$, *определяемая соотношением*

$$\tilde{q}(z,\sigma,\beta) = Gq(z,\sigma,\beta), \quad G = H \circ S \circ H^{-1}, \quad H := M \circ T^n, \tag{20}$$

также является решением уравнения (6) при тех же значениях параметров σ, β. *При этом* $q(z,\sigma,\beta) \equiv \tilde{q}(z,\sigma,\beta)$ *тогда и только тогда, когда* $q(z,\sigma,\beta)$ *– рациональное решение.*

Доказательство соотношения (20) вытекает из того, что для уравнений (1) и (6) преобразования Беклунда (15)–(18) и преобразования (7) связывают решения этих уравнений. При этом решения $q(z,\sigma,\beta)$ и $\tilde{q}(z,\sigma,\beta)$ различны, если они нерациональны, и совпадают в противном случае, что следует из леммы 1. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим случай $N = 1$, т.е. уравнение (8).

Пусть $q = q(z)$ – решение уравнения (8) при $\sigma = 1/2$, т.е. $n = 1$ в (20). Тогда функция

$$w_1 = w(z,1) = M^{-1}q(z) = -(q' - 1)/(2q - z) \tag{21}$$

– решение уравнения P_2 при значении параметра $\alpha = 1$, а в силу преобразования (19) функция $\tilde{w}_1 = T \circ S \circ T^{-1} w_1$ также является решением уравнения P_2 при $\alpha = 1$. Явное выражение решения $\tilde{w}_1$ через w_1 получено в [24] и имеет вид

$$\tilde{w}_1 = -w_1 + 1/(2R) - R^2/(2(w_1R - 1)^2 + (2w_1' + z)R^2 - 1), \tag{22}$$

где $R = w_1' - w_1^2 - z/2$. Но тогда по решению $\tilde{w}_1$ можно построить “новое” решение $\tilde{q}(z) = M\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1' - \tilde{w}_1^2$ уравнения (8). При этом представления (21), (22) дают явное выражение для $\tilde{q}(z)$ через фиксированное решение $q(z)$ уравнения (8) при $\sigma = 1/2$. Если при этом исходное решение $q(z)$ имеет в точке z_0 начальные данные q_0, q_0' такие, что $k = 2q_0 - z_0 \neq 0$, то для решения $\tilde{q}(z)$ начальные данные в точке z_0 определяются равенствами

$$\tilde{q}(z_0) = -q_0 - 2(q_0'/k)^2, \quad \tilde{q}'(z_0) = (2q_0 + z_0)(q_0'/k) + 4(q_0'/k)^3. \tag{23}$$

Из соотношений (23) вытекает, что решения $q(z)$ и $\tilde{q}(z)$ имеют совпадающие начальные данные тогда и только тогда, когда $q_0 = q_0' = 0$. Но это начальные данные рационального решения $q(z) = 0$ при $\sigma = 1/2$.

Для второго уравнения Пенлеве P_2 также известно [2, с. 102] преобразование Беклунда между его решениями с параметрами $\alpha = 0$ и $\alpha = \varepsilon/2$, $\varepsilon^2 = 1$.

Пусть $w(z)$ – решение уравнения P_2 при $\alpha = \varepsilon/2$, $\varepsilon^2 = 1$, такое, что $R(w(z)) = w'(z) - \varepsilon w(z)^2 - \varepsilon z/2 \neq 0$. Тогда функция $y(\tau)$, определяемая соотношением

$$-2^{1/3}\varepsilon y(\tau)^2 = R(w(z)), \quad z = -2^{1/3}\tau,$$

является решением уравнения P_2 при $\alpha = 0$, а обратное преобразование определяет его решение $w(z) = 2^{-1/3}\varepsilon y'(\tau)/y(\tau)$, $y(\tau) \neq 0$. В силу M-преобразования из (7) по решениям $y(\tau)$ и $w(z)$ при $\varepsilon = 1$ уравнения P_2 можно построить решения $q(\tau) = q(\tau,-1/2,\beta) \neq 0$ и $\tilde{q}(z) = q(z,0,\beta) \neq z/2$ уравнения (8) для значений параметров $\sigma = -1/2$ и $\sigma = 0$ соответственно, при этом между этими решениями имеет место следующая связь:

$$\tilde{q}(z) = z/2 - 2^{1/3}(q'(\tau))^2/(2q(\tau) - \tau)^2, \quad z = -2^{1/3}\tau.$$

Рациональные решения. Для рациональных решений уравнений иерархии (6) справедлива

Лемма 3. *Произвольное уравнение иерархии (6) имеет тривиальное решение* $q = 0$ *при* $\sigma = \pm 1/2$ *и решение* $q = -2/z^2$ *при* $\sigma = \pm 3/2$.

Доказательство леммы вытекает из соотношений (7) и того, что произвольное уравнение из иерархии (1) имеет тривиальное решение $w = 0$ при $\alpha = 0$ и решение $w = -1/z$ при $\alpha = 1$ (лемма 2 из [20]).

Теорема 3. *Для существования рационального решения у уравнения иерархии (6) необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$. *При этом для каждого такого* σ *и фиксированного* β *существует только одно рациональное решение.*

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из единственности рациональных решений уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, леммы 1 и соотношений (7). Теорема доказана.

Рациональные решения уравнений иерархии (6) можно построить последовательным применением преобразования Беклунда (17), (18) с начальным тривиальным решением. Так в случае $N = 1$, т.е. для уравнения (8), которое не содержит параметр β, имеем первые рациональные решения

$$q^{[1]}(z,\pm1/2) = 0, \quad q^{[1]}(z,\pm3/2) = -2/z^2, \quad q^{[1]}(z,\pm5/2) = -6z(z^3-8)/(z^3+4)^2,$$

$$q^{[1]}(z,\pm7/2) = -12z(z^9+600z^3+1600)/(z^6+20z^3-80)^2,$$

$$q^{[1]}(z,\pm9/2) = -\frac{20(z^{18}+48z^{15}+2520z^{12}-78400z^9-1881600z^6+12544000)}{z^2(z^9+60z^6+11200)^2}.$$

Первые рациональные решения для уравнения (9) в явном виде приведены в [20]. Относительно представления рациональных решений уравнений из иерархии (6) через обобщённые полиномы Яблонского–Воробьёва [25, 26] справедлива

Теорема 4. *Произвольное рациональное решение* N*-го уравнения из иерархии (6) имеет вид*

$$q^{[N]}(z,\pm(n+1/2),\beta) = 2\frac{(Q_n^{[N]})''Q_n^{[N]} - ((Q_n^{[N]})')^2}{(Q_n^{[N]})^2} = 2\frac{d^2}{dz^2}\ln(Q_n^{[N]}), \tag{24}$$

где $Q_n^{[N]}(z)$ *– обобщённые полиномы Яблонского–Воробьёва, определяемые рекуррентными соотношениями*

$$Q_{n+1}^{[N]}Q_{n-1}^{[N]} = z(Q_n^{[N]})^2 - 2(Q_n^{[N]})^2\widetilde{L}_N\left[2\frac{d^2}{dz^2}\ln(Q_n^{[N]})\right], \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{25}$$

с начальными полиномами $Q_0^{[N]} = 1$, $Q_1^{[N]} = z$.

Доказательство. В работе [20] получен критерий существования и единственности рационального решения $w^{[N]}(z,\alpha,\beta)$ уравнения (1), который состоит в выполнении условия $\alpha \in \mathbb{Z}$ при фиксированном β. Если при этом $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, то рациональное решение имеет представление

$$w_n^{[N]}(z) = \frac{d}{dz}\ln(Q_{n-1}^{[N]}/Q_n^{[N]}). \tag{26}$$

Для $\alpha = 0$ рациональное решение нулевое: $w_0^{[N]} = 0$; для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство $w_{-n}^{[N]} = -w_n^{[N]}$. В [20] получено также рекуррентное соотношение (25), исследована структура полиномов $Q_n^{[N]}(z)$ и установлено тождество (формулы (42), (44) из [20])

$$(Q_{n-1}^{[N]})''Q_n^{[N]} - 2(Q_{n-1}^{[N]})'(Q_n^{[N]})' + Q_{n-1}^{[N]}(Q_n^{[N]})'' = 0. \tag{27}$$

Пусть $w_{n+1}^{[N]}(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n+1$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда в силу (7) имеем рациональное решение

$$q^{[N]}(z,\pm(n+1/2),\beta) = (w_{n+1}^{[N]}(z))' - (w_{n+1}^{[N]}(z))^2 \tag{28}$$

уравнения (6). Подставляя в (28) выражение для $w_{n+1}^{[N]}(z)$ из (26) с условием (27) и с заменой n на $n+1$, приходим к представлению (24). При этом единственность рациональных решений уравнения (6) при $\sigma = n+1/2$, $n \in \mathbb{Z}$, и фиксированном β следует из леммы 1, дискретной симметрии (14) и единственности рациональных решений уравнения (1). Теорема доказана.

В случае $N=1$ имеем $\widetilde{L}_1[u]=u$, поэтому

$$Q_{n+1}^{[1]}Q_{n-1}^{[1]}=z(Q_n^{[1]})^2-4(Q_n^{[1]}(Q_n^{[1]})''-((Q_n^{[1]})')^2),\quad n=1,2,3,\ldots$$

При этом $Q_0^{[1]}=1$, $Q_1^{[1]}=z$. Тогда последовательно находим первые полиномы

$$Q_2^{[1]}=z^3+4,\quad Q_3^{[1]}=z^6+20z^3-80,\quad Q_4^{[1]}=z^{10}+60z^7+11200z,$$

$$Q_5^{[1]}=z^{15}+140z^{12}+2800z^9+78400z^6-3136000z^3-6272000.$$

При этом полиномы $Q_n^{[1]}$ имеют лишь простые корни z_j, каждый из которых является полюсом рационального решения $q^{[1]}(z)$ с главной частью разложения $-2(z-z_j)^{-2}$.

Отметим, что для уравнения (9) первые рациональные решения, а также полиномы $Q_n^{[N]}$, $N=1,2,3$, в явной форме приведены в [20]. Отметим также, что степень полинома $Q_n^{[N]}$ не зависит от N, а зависит только от n и равна $n(n+1)/2$. При этом полиномы $Q_n^{[N]}$, $N>1$, могут иметь кратные корни.

Для рациональных решений уравнения P_2 известно детерминантное представление [27] (см. также [28]), которое в [21] обобщено на нестационарную иерархию P_2. На основании этого представления и связи (7) между решениями иерархий (1) и (6) справедлива

Теорема 5. *Рациональное решение N-го уравнения иерархии (6) представляется в виде*

$$q^{[N]}(z,\pm(m+1/2),\beta)=2\frac{d^2}{dz^2}\{\ln(\tau_m^{[N]})\},\tag{29}$$

где полиномиальная τ-функция $\tau_m^{[N]}(z)$ является определителем

$$\tau_m^{[N]}=\begin{vmatrix} p_m^{[N]}(z) & p_{m+1}^{[N]}(z) & \ldots & p_{2m-1}^{[N]}(z)\\ p_{m-2}^{[N]}(z) & p_{m-1}^{[N]}(z) & \ldots & p_{2m-3}^{[N]}(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{-m+2}^{[N]}(z) & p_{-m+3}^{[N]}(z) & \ldots & p_1^{[N]}(z)\end{vmatrix}\tag{30}$$

матрицы m-го порядка, полиномы $p_m^{[N]}(z)$ ($p_m^{[N]}(z)=0$ для $m<0$) которой определяются образующей функцией $\Phi(z,\lambda)$ формального параметра λ:

$$\Phi(z,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{[N]}(z)\lambda^k,\quad \Phi(z,\lambda)=\exp\biggl(z\lambda-\sum_{l=1}^{N}\frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l+1}\biggr),\tag{31}$$

здесь $s_0=1$, а s_l, $l=\overline{1,N-1}$, – основные симметрические полиномы параметров β_1, …, β_{N-1}.

Зависимость между полиномиальными τ-функциями, задаваемыми равенствами (12), (30), и обобщёнными полиномами Яблонского–Воробьёва $Q_m^{[N]}$ следует из представлений (12) и (24) и выражается соотношением $\tau_m^{[N]}=c_mQ_m^{[N]}$, $c_m=\prod_{k=1}^m(2k+1)^{k-m}$ [21].

Покажем, что полиномы $p_m^{[N]}(z)$, определяющие детерминантное представление (29), (30) рационального решения N-го уравнения иерархии (6), так же, как и в случае $N=1$ для второго уравнения Пенлеве [28], удовлетворяют как разностному, так и линейному дифференциальному уравнениям.

Согласно определению (31) полиномов $p_m^{[N]}(z)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{[N]}(z)\lambda^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\biggl(z-\sum_{l=1}^{N}\frac{4^l s_{N-l}}{2l+1}\lambda^{2l}\biggr)^k.$$

Заметим также, что функция $\Phi(z,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_\lambda = \left(z - \sum_{l=1}^{N} 4^l s_{N-l}\lambda^{2l}\right)\Phi. \qquad (32)$$

Тогда в силу равенств (31), (32) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n^{[N]}\lambda^{n-1} = \left(z - \sum_{l=1}^{N} 4^l s_{N-l}\lambda^{2l}\right)\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{[N]}\lambda^n. \qquad (33)$$

В (33) положим $p_0^{[N]}(z)=1$. Тогда $p_1^{[N]}(z)=z$ и для определения функций $p_n^{[N]}(z)$, $n=\overline{2,N}$, имеем рекуррентные соотношения

$$2np_{2n}^{[N]}(z) = zp_{2n-1}^{[N]} - \sum_{j=1}^{n-1} 4^j s_{N-j} p_{2n-2j-1}^{[N]}, \qquad (34)$$

$$(2n+1)p_{2n+1}^{[N]}(z) = zp_{2n}^{[N]} - \sum_{j=1}^{n} 4^j s_{N-j} p_{2n-2j}^{[N]}. \qquad (35)$$

Из соотношения (33) вытекает, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2N+1)p_{m+2N+1}^{[N]} - zp_{m+2N}^{[N]} + 4s_{N-1}p_{m+2N-2}^{[N]} + \ldots + 4^{N-1}s_1 p_{m+2}^{[N]} + 4^N p_m^{[N]}]\lambda^m = 0, \quad (36)$$

откуда и следует разностное уравнение для полиномов $p_m^{[N]}$ при $m>N$ (см. формулировку теоремы 6 ниже).

С другой стороны, функция $\Phi(z,\lambda)$ из (31) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Phi_z=\lambda\Phi$, и поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty}(Dp_m^{[N]} - p_{m-1}^{[N]}) = 0, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Следовательно, $Dp_m^{[N]} = p_{m-1}^{[N]}$, $m \geqslant 1$. Тогда в силу (36) получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(2N+1)$-го порядка относительно $p_m^{[N]}(z)$:

$$(4^N D^{2N+1} + 4^{N-1}s_1 D^{2N-1} + \ldots + 4^{N-2}s_{N-1}D^3 - zD + m)p_m^{[N]} = 0. \qquad (37)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Полиномы* $p_m^{[N]}(z)$ *удовлетворяют разностному уравнению* $(2N+1)$*-го порядка*

$$(m+2N+1)p_{m+2N+1}^{[N]} - zp_{m+2N}^{[N]} + 4s_{N-1}p_{m+2N-2}^{[N]} + \ldots + 4^{N-1}s_1 p_{m+2}^{[N]} + 4^N p_m^{[N]} = 0 \qquad (38)$$

с начальными полиномами $p_0^{[N]}(z)=1$, $p_1^{[N]}(z)=z$, *и* $p_3^{[N]}(z)$, $p_4^{[N]}(z)$, $\ldots$, $p_{2N}^{[N]}(z)$, *определяемыми рекуррентными соотношениями (34), (35), и линейному дифференциальному уравнению (37) порядка* $2N+1$.

Заметим, что в случае $s_1=s_2=\ldots=s_{N-1}=0$, соответствующем стационарной иерархии $P_{34}^{[2N]}$, $N\in\mathbb{N}$, уравнение (37) имеет вид

$$(4^N D^k - zD + m)p_m^{[N]} = 0, \quad k = 2N+1, \qquad (39)$$

для которого единственная особая точка $z=\infty$ является иррегулярной. Общее решение уравнения (39) представляется в виде

$$p_m^{[N]} = c_1\, {}_1F_{2N}\left(-\frac{m}{k}; \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}; \varsigma\right) + c_2 z\, {}_1F_{2N}\left(\frac{1-m}{k}; \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \frac{k+1}{k}; \varsigma\right) + \ldots$$

$$\ldots + c_k z^{k-1}\, {}_1F_{2N}\left(\frac{k-1-m}{k}; \frac{k+1}{k}, \frac{k+2}{k}, \ldots, \frac{2k-1}{k}; \varsigma\right), \tag{40}$$

в котором $\varsigma = z^k(2k)^{-2N}$, c_k – произвольные постоянные, а ${}_1F_q(a; b_1, b_2, \ldots, b_q; \varsigma)$ – обобщённая гипергеометрическая функция, определяемая равенством

$${}_1F_q(a; b_1, b_2, \ldots, b_q; \varsigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a)_j}{(b_1)_j, (b_2)_j, \ldots, (b_q)_j} \frac{\zeta^j}{j!},$$

где

$$(a)_j = a(a+1)\ldots(a+j-1) = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$$

и $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция. Если $m\in\mathbb{Z}^+$, как в нашем случае, то одна из гипергеометрических функций, входящих в представление (40), является полиномом по z, так как в этом случае функция ${}_1F_{2N}(-m; b_1, b_2, \ldots, b_{2N}; z^k(2k)^{-2N})$ – полином по z, который и определяет полином $p_m^{[N]}(z)$. Заметим, что при $N=1$ уравнения (37), (39) с общим решением (40) в этом случае получены в [28].

В качестве примера рассмотрим случай $N=3$, т.е. уравнение (10), имеющее свободные параметры s_1, s_2, σ. Пусть, как в теореме 5, $\sigma = m+1/2$, $m\in\mathbb{Z}^+$. Тогда из рекуррентных соотношений (34), (35) с начальными полиномами $p_0^{[3]}=1$, $p_1^{[3]}=z$ последовательно находим первые полиномы $p_m^{[3]}$:

$$p_2^{[3]} = z^2/2!, \quad p_3^{[3]} = (z^3 - 8s_2)/3!, \quad p_4^{[3]} = (z^4 - 32zs_2)/4!,$$

$$p_5^{[3]} = (z^5 - 384s_1 - 80z^2s_2)/5!,$$

$$p_6^{[3]} = (z^6 - 2304zs_1 - 160z^3s_2 + 640s_2^2)/6!,$$

$$p_7^{[3]} = (z^7 - 46080 - 8064z^2s_1 - 280z^4s_2 + 4480zs_2^2)/7!,$$

$$p_8^{[3]} = (z^8 - 368640z - 21504z^3s_1 - 448z^5s_2 + 172032s_1s_2 + 17920z^2s_2^2)/8!,$$

которые при $N=3$ удовлетворяют уравнениям (37), (38) и в силу представлений (29), (30) определяют первые рациональные решения $q^{[3]}(z,\sigma,s_1,s_2)$ уравнения (10):

$$q^{[3]}(z, \pm1/2, s_1, s_2) = 0, \quad q^{[3]}(z, \pm3/2, s_1, s_2) = -\frac{2}{z^2},$$

$$q^{[3]}(z, \pm5/2, s_1, s_2) = \frac{-6(z^4 - 8zs_2)}{(z^3+4s_2)^2},$$

$$q^{[3]}(z, \pm7/2, s_1, s_2) = -\frac{12(z^{10} + 600z^4s_2^2 + 1600zs_2^3 + 432z^5s_1 + 3456s_1^2)}{(z^6 + 20z^3s_2 - 80s_2^2 - 144zs_1)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
2. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002.
3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2004.
4. *Flashka H., Newell A.C.* Monodromy and spectrum preserving deformations. I // Commun. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.
5. *Its A.R., Novakshenov V.Yu.* The Isomonodromy Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations // Lect. Notes in Math. 1986. V. 1191. P. 1–93.
6. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
7. *Babelon O., Bernard D., Talon M.* Introduction to Classical Integrable Systems. New York, 2003.
8. *Conte R., Musette M.* The Painlevé Handbook. Dordrecht, 2008.
9. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Догопрудный, 2010.
10. *Airault H.* Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
11. *Noumi M., Yamada Y.* Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$ // Funkcial. Ekvac. 1998. V. 41. P. 483–503.
12. *Gromak V.I.* Bäcklund transformations of the Painlevé equations and their applications // The Painlevé Property. One Century Later / Ed. R. Conte. CRM Series in Mathematical Physics. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1999. P. 687–734.
13. *Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A.* Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.
14. *Kudryashov N.A.* One generalization of the second Painlevé hierarchy // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. № 35. P. 93–99.
15. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials // Nonlinearity. 2003. V. 16. P. R1–R26.
16. *Joshi N.* The second Painlevé hierarchy and the stationary KdV hierarchy // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 2004. V. 40. № 3. P. 1039–1061.
17. *Демина М.В., Кудряшов Н.А.* Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве // Теор. и мат. физика. 2007. Т. 153. № 1. С. 58–67.
18. *Sakka A.H.* Linear problems and hierarchies of Painlevé equations // J. Phys. A. Math. Theor. 2009. V. 42. P. 025210.
19. *Громак В.И.* К теории уравнений Пенлеве высших порядков // IX Белорус. мат. конф. Тез. докл. 3–6 ноября 2004 г., Гродно. Ч. 1. Гродно, 2004. С. 115–116.
20. *Громак В.И.* Аналитические свойства решений уравнений обобщённой иерархии второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1017–1033.
21. *Bobrova I.* On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications // arXiv: 2010.10617v2 [nlin.SI].
22. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960.
23. *Li Y., He Y.* On analytic properties of higher analogs of the second Painlevé equation // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 2. P. 1106–1115.
24. *Громак В.И., Голубева Л.Л.* О решениях второго уравнения Пенлеве // University of Padlasie, Institute of Math. and Phys. Siedlce, 2001. V. 40. P. 79–84.
25. *Яблонский А.И.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1959. № 3. С. 30–35.
26. *Воробьев А.Р.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. С. 79–81.
27. *Kajiwara K., Ohta Y.* Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.
28. *Clarkson P. A.* Painlevé equations – nonlinear special functions // Lect. Notes in Math. 2006. V. 1883. P. 331–411.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 21.10.2021 г.
После доработки 18.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.