

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦИКЛОВ У ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

Рассматривается дифференциальная система третьего порядка, представляющая собой обобщение системы, описывающей математическую модель явления фазовой синхронизации. Получены достаточные условия существования у этой системы седлового цикла первого рода. Доказательство условий основывается на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами дифференциальной системы второго порядка.

DOI: 10.31857/S0374064122020030

Введение. В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ – фазовые переменные, точка над символом – производная по времени t , векторы $b, c \in \mathbb{R}^2$, числа $u \in [0, 1]$ и $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$ и постоянная 2×2 -матрица A заданы, заданная функция $\varphi(\sigma)$ является непрерывной и Δ -периодической. При выполнении равенства $u = 0$ система (1) является математической моделью системы фазовой синхронизации с фильтром, имеющим дробно-рациональную частотную характеристику с запаздыванием [1–14]. Запаздывание в системе фазовой автоподстройки определяется значением параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания значение ρ равно нулю [1, 12]. В случае $\rho = 0$, $u = 0$ изучению системы фазовой автоподстройки посвящены многочисленные работы [1–14]. Для системы (1) рассматривается задача определения седловых и устойчивых предельных циклов первого рода [1, 4, 5, 10–13]. Наличие предельных циклов обеспечивает для системы фазовой синхронизации существование режимов скрытой квазисинхронизации и мультистабильности. При этом скрытая квазисинхронизация определяется скрытыми предельными циклами, для которых $\langle \dot{\sigma} \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0$ [5–7, 9, 12].

В данной работе на основе метода нелокального сведения [1–5] с использованием результатов работ [10, 11] получены достаточные условия существования нескольких предельных циклов первого рода у системы (1).

1. Условия существования седлового цикла системы.

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполняются следующие предположения:

1) верно неравенство $c^T b = -\Gamma < 0$, а вектор l , задаваемый равенством $l^T = c^T A$, линейно независим с вектором c и имеют место соотношения: $l^T b = -\nu_1$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, где $\beta_1 > 0$ и $\nu_1 \beta_1^{-1} = \rho_1$;

2) Δ -периодическая функция $\varphi(\sigma)$ имеет на отрезке $[0, \Delta]$ два нуля $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, в которых её производная удовлетворяет неравенствам $d\varphi(0)/d\sigma > 0$ и $d\varphi(\tilde{\sigma}_2)/d\sigma < 0$, а сама производная $d\varphi(\sigma)/d\sigma$ на отрезке $[0, \Delta]$ ограничена;

3) существуют положительные числа λ_1 , λ_2 и r_1 , при которых система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\lambda_1 y - \lambda_2 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) - \varepsilon, \quad \dot{\sigma} = y + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma \quad (2)$$

при $\varepsilon = -\varepsilon_1^-$ таком, что $r_1 < \varepsilon_1^-$, имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, неположительную на некотором отрезке $[-\sigma_1, \sigma_2]$, где $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, и обращающуюся в нуль только в его концах;

4) существует положительное число r_2 , для которого система (2) при $\varepsilon = \varepsilon_1^+$ таком, что $\varepsilon_1^+ > r_2$, имеет решение, определяющее неотрицательную на отрезке $[0, \sigma_2]$ функцию $f_{11}^+(\sigma)$, равную нулю только в точке σ_2 , и неотрицательную на отрезке $[-\sigma_1, 0]$ функцию $f_{12}^+(\sigma)$, равную нулю только в точке $-\sigma_1$, причём $f_{12}^+(0) < f_{11}^+(0)$;

5) система (2) при $\varepsilon = \varepsilon_2^-$ таком, что $r_2 < \varepsilon_2^-$, имеет решение, определяющее на некотором отрезке $[-\sigma_3, \sigma_4]$, где $-\sigma_3 < -\sigma_1$ и $\sigma_2 < \sigma_4$, функцию $f_2^-(\sigma)$, обращающуюся в нуль в концах этого отрезка и удовлетворяющую неравенству $f_2^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$ на интервале $(-\sigma_1, \sigma_2)$;

6) система (2) при $\varepsilon = -\varepsilon_2^+$ таком, что $r_1 < \varepsilon_2^+$, имеет решение, определяющее на отрезке $[0, \sigma_4]$ функцию $f_{21}^+(\sigma)$, обращающуюся в нуль в точке σ_4 и удовлетворяющую неравенству $f_{21}^+(\sigma) > f_{11}^+(\sigma)$ на полуинтервале $[0, \sigma_2)$, и на отрезке $[-\sigma_3, 0]$ функцию $f_{22}^+(\sigma)$, обращающуюся в нуль в точке $-\sigma_3$ и удовлетворяющую неравенству $f_{22}^+(\sigma) > f_{12}^+(\sigma)$ на полуинтервале $[-\sigma_1, 0)$, причём $f_{22}^+(0) > f_{21}^+(0)$;

7) для всех $\sigma \in [-\sigma_3, -\sigma_1]$ справедливо неравенство $\lambda_2\sigma + r_2 + \Gamma\varphi(\sigma) < 0$;

8) имеет место равенство $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$, и для значений $\sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]$ выполняется неравенство

$$\psi_1(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma - (\alpha_1 - \lambda_1)r_1 < 0;$$

9) для любого $\sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]$ справедливо неравенство

$$\psi_2(\sigma) = (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2(\alpha_1u + \lambda_1 - \alpha_1)\sigma + (\alpha_1 - \lambda_1)r_2 > 0;$$

10) если для функции

$$\psi_4(\sigma) = \Gamma\varphi(\sigma) - \lambda_1\psi_3(\sigma) + \lambda_2\sigma,$$

где $\psi_3(\sigma) = \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1u\sigma$, при некотором значении σ выполняются неравенства $-r_2 < \psi_4(\sigma) < r_1$, то справедливо включение $\sigma \in [-\tau_2, \tau_1]$, где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$;

11) функция $\psi_5(\sigma) = -\alpha_1\Gamma\varphi(\sigma) - \nu_1\varphi(\sigma) + \beta_1\psi_3(\sigma)$ на сегменте $[-\tau_2, \tau_1] \cap [-\sigma_3, \sigma_4]$ имеет единственный нуль $\psi_5(0) = 0$.

Тогда система (1) имеет седловой предельный цикл первого рода.

Доказательство. Рассмотрим функции $W_i(z) = l^T x + \lambda_1 c^T x + \lambda_2 \sigma + (-1)^i r_i$, $P(z) = c^T x$, $V_{1i}^+(z) = c^T x - f_{1i}^+(\sigma)$, $V_{2i}^+(z) = c^T x - f_{2i}^+(\sigma)$, $V_i^-(z) = c^T x - f_i^-(\sigma)$, где $i = 1, 2$, $z = (x^T, \sigma)^T$, числа r_1 , r_2 , λ_1 , λ_2 и функции $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)–11) теоремы.

Используя значения σ_1 , σ_2 из условия 3) теоремы, определим поверхности

$$\partial Q_{11} = \{z : V_{11}^+(z) = c^T x - f_{11}^+(\sigma) = 0, \sigma \in [0, \sigma_2]\},$$

$$\partial Q_{12} = \{z : V_{12}^+(z) = c^T x - f_{12}^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_1, 0]\},$$

$$\partial Q_2 = \{z : V_1^-(z) = c^T x - f_1^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_1, \sigma_2]\},$$

$$\partial Q_{01} = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, f_{12}^+(0) \leq c^T x \leq f_{11}^+(0)\}.$$

Пусть $\partial Q = \partial Q_{11} \cup \partial Q_{12} \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_{01}$, тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q через Q . Значения σ_3 , σ_4 из условия 5) теоремы позволяют определить поверхности

$$\partial D_{21} = \{z : V_{21}^+(z) = c^T x - f_{21}^+(\sigma) = 0, \sigma \in [0, \sigma_4]\},$$

$$\partial D_{22} = \{z : V_{22}^+(z) = c^T x - f_{22}^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_3, 0]\},$$

$$\partial D_2 = \{z : V_2^-(z) = c^T x - f_2^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]\},$$

$$\partial Q_{02} = \{z : f_0(\sigma) := \sigma = 0, f_{21}^+(0) \leq c^T x \leq f_{22}^+(0)\}.$$

Пусть $\partial D = \partial D_{21} \cup \partial D_{22} \cup \partial D_2 \cup \partial D_{02}$, тогда ∂D является цилиндрической поверхностью. Обозначим внутренность цилиндрической поверхности ∂D вместе с поверхностью ∂D через D . Используя области Q и D , определим множество

$$G = Q \cap D \cap \{z : W_1(z) \leq 0\} \cap \{z : W_2(z) \geq 0\}.$$

Строение множества G представлено на рис. 1.

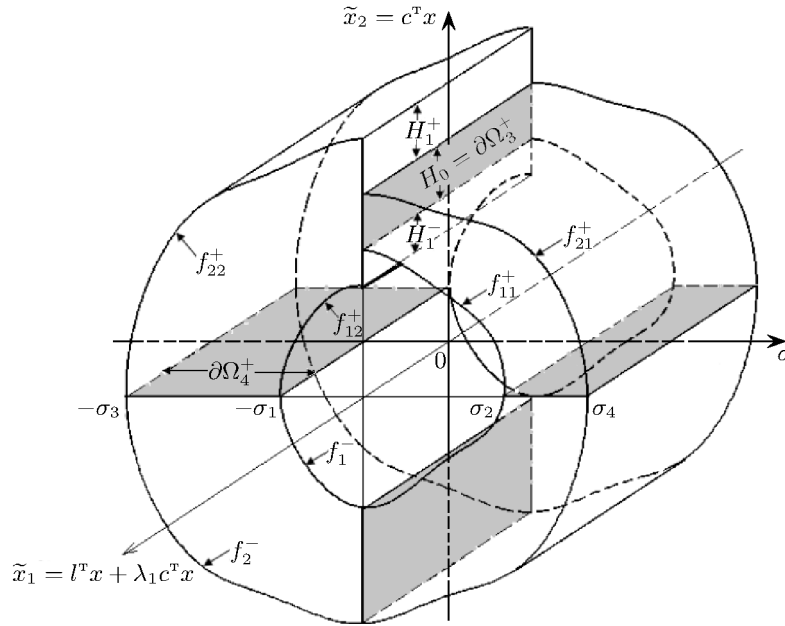


Рис. 1. Множество G в координатах $\tilde{x}_1 = l^T x + \lambda_1 c^T x$, $\tilde{x}_2 = c^T x$, σ .

Множество G представим в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$ множеств G_1 и G_2 , где

$$G_1 = (G \cap \{z : c^T x \leq 0\}) \cup (G \cap \{z : c^T x \geq 0, \sigma \geq 0\}),$$

$$G_2 = G \cap \{z : c^T x \geq 0, \sigma \leq 0\}.$$

Рассмотрим множества G_1 , $L = \{z : W_1 \leq 0, W_2 \geq 0\}$,

$$\partial Q_{03} = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, f_{11}^+(0) \leq c^T x \leq f_{21}^+(0)\},$$

$$\partial Q_3 = \{z : P(z) = c^T x = 0, -\sigma_3 \leq \sigma \leq -\sigma_1\}.$$

Граница ∂G_1 множества G_1 определяется равенствами

$$\partial G_1 = \partial \Omega_1^+ \cup \partial \Omega_2^+ \cup \partial \Omega_3^+ \cup \partial \Omega_4^+ \cup \partial \Omega_5^- \cup \partial \Omega_6^- \cup \partial \Omega_7^- \cup \partial \Omega_8^+,$$

$$\partial \Omega_1^+ = \partial Q_{11} \cap L, \quad \partial \Omega_2^+ = \partial Q_2 \cap L, \quad \partial \Omega_3^+ = \partial Q_{03} \cap L,$$

$$\partial \Omega_4^+ = \partial Q_3 \cap L, \quad \partial \Omega_5^- = \partial D_{21} \cap L, \quad \partial \Omega_6^- = \partial D_2 \cap L,$$

$$\partial \Omega_7^- = G_1 \cap \{z : W_1(z) = 0\}, \quad \partial \Omega_8^+ = G_1 \cap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

Для вектора $z \in \partial \Omega_1^+$ справедливы соотношения

$$c^T x = f_{11}^+(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_2],$$

$$l^T x \geq -r_2 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \quad (3)$$

Используя эти соотношения и условия 1) и 4) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $V_{11}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_1^+$:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11}^+(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{11}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{11}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \geq \\ &\geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_{11}^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{11}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{11}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \\ &= -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Для вектора $z \in \partial\Omega_2^+$ выполняются соотношения

$$c^T x = f_1^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_1, \sigma_2], \quad (5)$$

$$l^T x \leq r_1 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \quad (6)$$

Найдём и оценим сверху производную функции $V_{11}^-(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_2^+$. Используя соотношения (5), (6) и условия 1) и 3) теоремы, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11}^-(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leq \\ &\leq r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_1^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma}(f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \\ &= r_1 - \varepsilon_1^- < 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Найдём и оценим снизу производную функции $f_0(\sigma) \equiv \sigma$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_3^+$. Применяя условие 2) теоремы, будем иметь

$$\dot{f}_0(\sigma) = c^T x + \rho_1\varphi(0) + \rho_0(1-u)\varphi(0) - \alpha_1 u\sigma = c^T x \geq f_{11}^+(0) > 0. \quad (8)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_4^+$. Если $z \in \partial\Omega_4^+$, то справедливы оценка (3) и равенство

$$c^T x = 0, \quad \sigma \in [-\sigma_3, -\sigma_1]. \quad (9)$$

В силу условий 1) и 7) теоремы и соотношений (3), (9) заключаем, что производная функции $P(z) = c^T x$ в силу системы (1) удовлетворяет на множестве $\partial\Omega_4^+$ соотношению

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \quad (10)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_5^-$, тогда справедливы оценка (6) и равенство

$$c^T x = f_{21}^+(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_4]. \quad (11)$$

Используя соотношения (6), (11) и условия 1) и 6) теоремы найдём и оценим сверху производную функции $V_{21}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_5^-$:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{21}^+(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{21}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{21}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leq \\ &\leq r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_{21}^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{21}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{21}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \\ &= r_1 - \varepsilon_2^+ < 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Для множества $\partial\Omega_6^-$ выполняется оценка (3) и равенство

$$c^T x = f_2^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_3, \sigma_4]. \quad (13)$$

Найдём и оценим снизу производную функции $V_2^-(\sigma)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_6^-$. Применяя соотношения (3), (13) и условия 1) и 5) теоремы, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_2^-(z) &\geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 f_2^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \\ &- \frac{df_2^-(\sigma)}{d\sigma}(f_2^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = -r_2 + \varepsilon_2^- > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_7^-$, тогда выполняется условие 8) теоремы и справедливо равенство $l^T x = r_1 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x$. Воспользовавшись этим равенством и условиями 1) и 8) теоремы, найдём и оценим сверху производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_7^-$:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(z) &= -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma) + \lambda_1 l^T x - \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) + \lambda_2 c^T x + \lambda_2 \rho_1 \varphi(\sigma) + \\ &+ \lambda_2 \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \lambda_2 \alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1)l^T x + (\lambda_2 - \beta_1)c^T x + \\ &+ (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \lambda_2 \alpha_1 u\sigma = (\lambda_1 - \alpha_1)r_1 - (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_2\sigma - \\ &- (\lambda_1 - \alpha_1)\lambda_1 c^T x + (\lambda_2 - \beta_1)c^T x + (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - \\ &- \lambda_2 \alpha_1 u\sigma = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))c^T x - (\lambda_2 \alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma + \\ &+ (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u))\varphi(\sigma) - (\alpha_1 - \lambda_1)r_1 = \psi_1(\sigma) < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для $z \in \partial\Omega_8^+$ выполняются равенства $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и $l^T x = -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x$. Учитывая эти равенства и условия 1) и 9) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $W_2(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_8^+$:

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(z) &= (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))c^T x - (\lambda_2 \alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma + \\ &+ (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u))\varphi(\sigma) + (\alpha_1 - \lambda_1)r_2 = \psi_2(\sigma) > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$\partial\Omega_3^+ = \{z : f_0(\sigma) = \sigma = 0, \quad f_{11}^+(0) \leq c^T x \leq f_{21}^+(0), \quad W_1(z) \leq 0, \quad W_2(z) \geq 0\},$$

$$\partial\Omega_4^+ = \{z : P(z) = c^T x = 0, \quad -\sigma_3 \leq \sigma \leq -\sigma_1, \quad W_1(z) \leq 0, \quad W_2(z) \geq 0\}.$$

Пусть T_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1), определённый на множестве $\partial\Omega_3^+$. Покажем, что $T_1(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_4^+$. Из построения множества G_1 следует существование $\bar{\varepsilon} > 0$ такого, что при любом $z \in G_1$ выполняется неравенство

$$(c^T x)^2 + \sigma^2 \geq \bar{\varepsilon}. \quad (17)$$

Для множества G_1 поверхности $\partial\Omega_3^+$ и $\partial\Omega_4^+$ являются частью границы. Пусть $z_0 \in \partial\Omega_3^+$, покажем, что для решения $z(t, z_0)$ системы (1) с начальными условиями $z(0, z_0) = z_0$ найдётся t_1 такое, что $z(t_1, z_0) \notin G_1$. Предположим противное, т.е. что для любого $t > 0$ выполняется включение $z(t, z_0) \in G_1$. Множество G_1 является ограниченным, следовательно, ограничено и решение $z(t, z_0)$.

В силу системы (1) справедливо соотношение

$$\int_0^t \dot{\sigma}(t) dt = \int_0^t (c^T x + \psi_3(\sigma)) dt = \int_0^t (c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) dt = (\sigma(t) - \sigma(0)) \in \mathbb{R},$$

из которого вследствие леммы Барбалата [14, с. 230] вытекает равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c^T x + \psi_3(\sigma)) = 0. \quad (18)$$

Используя условие 1) теоремы, найдём интегралы

$$\int_0^t c^T \dot{x} dt = \int_0^t (l^T x - \Gamma \varphi(\sigma)) dt = c^T (x(t) - x(0)) \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

$$\int_0^t l^T \dot{x} dt = \int_0^t (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) dt = l^T (x(t) - x(0)) \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

С учётом (19), (20) и леммы Барбалата справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (l^T x - \Gamma \varphi(\sigma)) = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) = 0. \quad (22)$$

Так как $z(t, z_0) \in G_1$, то выполняется двойное неравенство

$$-r_2 \leq l^T x + \lambda_1 c^T x + \lambda_2 \sigma \leq r_1. \quad (23)$$

В силу (18), (21), (23) для функции $\sigma(t)$ справедливы соотношения

$$-r_2 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} (\Gamma \varphi(\sigma) - \lambda_1 \psi_3(\sigma) + \lambda_2 \sigma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_4(\sigma) \leq r_1,$$

из которых и условия 10) теоремы следует, что

$$-\tau_2 \leq \sigma \leq \tau_1. \quad (24)$$

Используя равенства (22), (21) и (18), получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\alpha_1 \Gamma \varphi(\sigma) + \beta_1 \psi_3(\sigma) - \nu_1 \varphi(\sigma)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_5(\sigma) = 0. \quad (25)$$

Из условий 2) и 11) теоремы и соотношений (24), (25), (18) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} c^T x = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} ((c^T x)^2 + \sigma^2) = 0. \quad (26)$$

Равенства (17) и (26) одновременно выполняться не могут, поэтому существует t_1 такое, что $z(t_1, z_0) \notin G_1$. С учётом соотношений (4), (7), (8), (10), (12), (14)–(16) заключаем, что решение $z(t, z_0)$ может пересечь границу множества G_1 только через поверхность $\partial\Omega_4^+$. Следовательно, существует $\bar{t}_1$, для которого $z(\bar{t}_1, z_0) \in \partial\Omega_4^+$. Итак, оператор T_1 отображает множество $\partial\Omega_3^+$ в множество $\partial\Omega_4^+$, $T_1(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_4^+$.

Рассмотрим множества G_2 и $L = \{z : W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}$. Граница ∂G_2 множества G_2 определяется равенствами

$$\partial G_1 = \partial\Omega_4^+ \cup \partial\Omega_9^+ \cup \partial\Omega_{10}^+ \cup \partial\Omega_{11}^- \cup \partial\Omega_{12}^- \cup \partial\Omega_{13}^+,$$

$$\partial\Omega_4^+ = \partial Q_3 \cap L, \quad \partial\Omega_9^+ = \partial Q_{12} \cap L, \quad \partial\Omega_{10}^+ = \partial Q_{02} \cap L, \quad \partial\Omega_{11}^- = \partial D_{22} \cap L,$$

$$\partial\Omega_{12}^- = G_2 \cap \{z : W_1(z) = 0\}, \quad \partial\Omega_{13}^+ = G_2 \cap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

Обозначим через $\dot{V}_{\partial\Omega}$ производную функции $V(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega$. Вследствие оценок (8), (10), (15), (16) верны неравенства

$$\dot{f}_0(\sigma)_{\partial\Omega_{10}^+} > 0, \quad \dot{P}(z)_{\partial\Omega_4^+} > 0, \quad \dot{W}_1(z)_{\partial\Omega_{12}^-} < 0, \quad \dot{W}_2(z)_{\partial\Omega_{13}^+} > 0. \quad (27)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_9^+$, тогда справедливо равенство $c^T x = f_{12}^+(\sigma)$, $\sigma \in [-\sigma_1, 0]$, используя которое и условия 1) и 4) теоремы, найдём и оценим снизу производную функции $V_{12}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_9^+$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{12}^+(z)_{\partial\Omega_9^+} &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{12}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{12}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \geq \\ &\geq -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для $z \in \partial\Omega_{11}^-$ выполняется равенство

$$c^T x = f_{22}^+(\sigma), \quad \sigma \in [-\sigma_3, 0]. \quad (29)$$

Найдём и оценим сверху производную функции $V_{22}^+(z)$ в силу системы (1) на множестве $\partial\Omega_{11}^-$. С учётом соотношений (29), (7) и условий 1) и 6) теоремы получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_{22}^+(z)_{\partial\Omega_{11}^-} &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_{22}^+(\sigma)}{d\sigma}(f_{22}^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leq \\ &\leq r_1 - \varepsilon_2^+ < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначим через T_2 оператор сдвига по траекториям системы (1), определённый на множестве $\partial\Omega_4^+$. Множество G_2 является ограниченным. Рассмотрим решение $z(t, z_2)$ системы (1) с начальными условиями $z(0, z_2) = z_2 \in \partial\Omega_4^+$. Повторяя рассуждения, проведённые для множества G_1 , и учитывая оценки (27), (28), (30), заключаем, что существует значение $\bar{t}_2$, для которого $z(\bar{t}_2, z_2) \in \partial\Omega_{10}^+$. Следовательно, оператор T_2 отображает множество $\partial\Omega_4^+$ в множество $\partial\Omega_{10}^+$, $T_2(\partial\Omega_4^+) \subset \partial\Omega_{10}^+$.

Используя операторы T_1 и T_2 , определим оператор $T = T_2 \circ T_1$. Тогда оператор T отображает множество $\partial\Omega_3^+$ в множество $\partial\Omega_{10}^+$, $T(\partial\Omega_3^+) \subset \partial\Omega_{10}^+$, $\partial\Omega_3^+ \subset \partial\Omega_{10}^+$. В данном случае нет отображения множества $\partial\Omega_3^+$ в себя. Для определения неподвижной точки оператора T используем понятие вращения векторного поля [15].

Из условия 1) линейной независимости векторов l и c теоремы следует, что для матрицы $B = \|(l + \lambda_1)c, c\|$ существует обратная матрица B^{-1} . В системе (1) сделаем замену переменных $x = (B^T)^{-1}(\tilde{x} + q)$, $q = \text{colon}(q_1, k_0)$, $q_1 = 0$, $(f_{21}^+(0) + f_{11}^+(0))/2 = k_0$, $(f_{21}^+(0) - f_{11}^+(0))/2 = k_1 > 0$. Для отображения B_L , заданного равенством $\tilde{x} = B^T x - q$, имеем $\tilde{x}_1 = l^T x + \lambda_1 c^T x$, $\tilde{x}_2 = c^T x - k_0$. Сделанная замена переменных является линейной, следовательно, отображает периодические функции в периодические. После сделанной замены переменные $\tilde{x}$ переобозначим снова через x . Множества $\partial\Omega_3^+$, $\partial\Omega_{10}^+$ отображаются в множества $B_L(\partial\Omega_3^+) = H_0$, $B_L(\partial\Omega_{10}^+) = H = H_0 \cup H_1^+ \cup H_1^-$, где (ниже $x = (x_1, x_2)^T$)

$$\begin{aligned} H_0 &= \{x : x_2 \leq k_1, \quad x_2 \geq -k_1, \quad x_1 \leq r_1, \quad -r_2 \leq x_1\}, \quad \partial H_0 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4, \\ L_1 &= \{x : x_2 = k_1, \quad x_1 \leq r_1, \quad -r_2 \leq x_1\}, \quad L_2 = \{x : x_2 \leq k_1, \quad x_2 \geq -k_1, \quad x_1 = r_1\}, \\ L_3 &= \{x : x_2 = -k_1, \quad x_1 \leq r_1, \quad -r_2 \leq x_1\}, \quad L_4 = \{x : x_2 \leq k_1, \quad x_2 \geq -k_1, \quad x_1 = -r_2\}, \\ H_1^+ &= \{x : x_2 \geq k_1, \quad x_2 \leq f_{22}^+(0) - k_0 = k_2, \quad x_1 \leq r_1, \quad -r_2 \leq x_1\}, \\ H_1^- &= \{x : x_2 \geq f_{12}^+(0) - k_0 = -k_3, \quad x_2 \leq -k_1, \quad x_1 \leq r_1, \quad -r_2 \leq x_1\}. \end{aligned}$$

Пусть U – оператор сдвига по траекториям системы (1) после замены переменных B_L . В силу свойств оператора $T = T_2 \circ T_1$ выполняются включения

$$U(H_0) \subset H, \quad U(L_1) \subset H_1^+, \quad U(L_2) \subset H, \quad U(L_3) \subset H_1^-, \quad U(L_4) \subset H. \quad (31)$$

Оператор $U(x) = (x_1^*, x_2^*)^T = x^*$ определяет на границе ∂H_0 ограниченной области H_0 векторное поле $S_U(x) = x - Ux = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*)^T = x^*$. Для векторного поля S_U рассмотрим

линейный оператор $U_L(x) = A_L x$, где $A_L = \text{diag}[\mu_1, \mu_2]$, $0 < \mu_1 < 1$, $\mu_2 > 1$. Оператор U_L определяет векторное поле $S_L = x - A_L x = ((1 - \mu_1)x_1, (1 - \mu_2)x_2)^T$. Обозначим

$$S_0(x) = \frac{S_L(x)}{\|S_L(x)\|} + \frac{S_U(x)}{\|S_U(x)\|}$$

и покажем, что для любого $x \in \partial H_0$ вектор $S_0(x)$ ненулевой.

Пусть $\bar{x} \in L_1$, $U(L_1) \subset H_1^+$, $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$, тогда $\bar{x} = (\bar{x}_1, k_1)^T$, $\bar{x}_1 \in [-r_2, r_1]$. Для вектора $U(\bar{x}) = \bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*)^T$ в силу включения $U(L_1) \subset H_1^+$ справедливы неравенства

$$0 < k_1 < \bar{x}_2^* < f_{22}^+(0) - k_0 = k_2, \quad -r_2 < \bar{x}_1^* < r_1. \quad (32)$$

Вследствие (32) и неравенства $\mu_2 > 1$ получаем, что

$$S_0(\bar{x})^T e_2 = \left(\frac{S_L(\bar{x})}{\|S_L(\bar{x})\|} + \frac{S_U(\bar{x})}{\|S_U(\bar{x})\|} \right)^T e_2 = \frac{1}{\|S_L(\bar{x})\|} (1 - \mu_2) k_1 + \frac{1}{\|S_U(\bar{x})\|} (k_1 - \bar{x}_2^*) < 0,$$

откуда вытекает, что для любого $x \in L_1$ вектор $S_0(x)$ отличен от нулевого.

Пусть $\bar{x} \in L_4$, $U(L_4) \subset H$, тогда $\bar{x} = (-r_2, \bar{x}_2)^T$, $\bar{x}_2 \in (-k_3, k_2)$. Пусть $U(\bar{x}) = \bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*)^T$. В силу включения $U(L_4) \subset H$ верны неравенства

$$-r_2 < \bar{x}_1^* < r_1, \quad 0 > -r_2 - \bar{x}_1^*,$$

из которых и неравенства $\mu_1 < 1$ следует, что

$$S_0(\bar{x})^T e_1 = \left(\frac{S_L(\bar{x})}{\|S_L(\bar{x})\|} + \frac{S_U(\bar{x})}{\|S_U(\bar{x})\|} \right)^T e_1 = \frac{1}{\|S_L(\bar{x})\|} (\mu_1 - 1) r_2 - \frac{1}{\|S_U(\bar{x})\|} (r_2 + \bar{x}_1^*) < 0.$$

Другими словами, для любого $x \in L_4$ вектор $S_0(x)$ отличен от нулевого. Аналогично тому, как это сделано для множеств L_1 , L_4 , с использованием включений (31) показывается, что и на множествах L_2 , L_3 вектор $S_0(x)$ ненулевой. В силу [15, теорема 5.6] вращение $\gamma(S_U, \partial H_0)$ векторного поля S_U на множестве ∂H_0 равно вращению $\gamma(S_L, \partial H_0)$ линейного векторного поля S_L на множестве ∂H_0 . Пусть $B_L = \text{diag}[1 - \mu_1, 1 - \mu_2]$. Так как сумма кратностей $\beta(B_L)$ вещественных отрицательных собственных значений матрицы B_L равна единице, то $\gamma(S_L, \partial H_0) = (-1)^{\beta(B_L)} = -1$ и $\gamma(S_U, \partial H_0) = -1$. В силу [15, теорема 5.15] оператор U имеет на H_0 по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in H_0$, $Ux^* = x^*$. Неподвижная точка $z^* = (x^{*T}, 0)^T$ определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет седловой предельный цикл первого рода, содержащийся во множестве G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнены условия 1)–3), 5), 7)–11) теоремы 1, в условии 4) вместо последнего неравенства выполняется неравенство $f_{12}^+(0) \geq f_{11}^+(0)$, а в условии 6) вместо последнего неравенства – неравенство $f_{22}^+(0) \leq f_{21}^+(0)$. Тогда система (1) имеет предельный цикл.

Доказательство. Используя обозначения и рассуждения теоремы 1, показывается, что оператор U отображает замкнутое выпуклое множество H_0 в себя: $U(H_0) \subset H_0$. В силу теоремы Брауэра [15] оператор U имеет на H_0 по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in H_0$, $Ux^* = x^*$. Неподвижная точка $z^* = (x^{*T}, 0)^T$ определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1) имеет предельный цикл первого рода, содержащийся во множестве G . Теорема доказана.

2. Проверка условий теоремы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_0. \quad (33)$$

Тогда $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$. Для системы (1), (33) условие 1) теоремы 1 выполняется.

Пусть $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 2.1$, $\Gamma = 4$, $\nu_1 = 1.24$, $\gamma = 0.18$, $u = 0.958$, $\rho_1 = 0.59$, $\rho_0 = 0.029$, $\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma)$, $\tilde{\sigma}_1 = 0$, $\tilde{\sigma}_2 = \pi - 2 \arcsin \gamma = 2.8$. Тогда $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = \varphi(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) < 0$, функция $\varphi(\sigma)$ – периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi(\tilde{\sigma}) = 0$ на сегменте $[0, \Delta]$ имеет два корня $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = \varphi(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $0 = \tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_2 < \Delta$, при этом $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})$ ограничена на сегменте $[0, \Delta]$. Для системы (1), (33) условие 2) теоремы 1 выполнено.

Для того чтобы выполнялись условия 3) и 4) теоремы 1, возьмём $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \beta_1 = 2.1$, $\varepsilon_1^- = \varepsilon_1^+ = \varepsilon_2^- = \varepsilon_2^+ = 0.92$, $r_1 = r_2 = 0.92 \cdot 10^{-10} < \varepsilon_1^-$. Пусть $-\sigma_1 = -3.11$, $\sigma_2 = 5.34$. Тогда при выбранных значениях σ_1 , σ_2 , ε_1^- , ε_1^+ , r_1 , r_2 система второго порядка (2) имеет решения, определяющие функции $f_1^-(\sigma)$, $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$, для которых выполнены условия 3) и 4) теоремы 1. Графики функций $f_1^-(\sigma)$, $f_{11}^+(\sigma)$, $f_{12}^+(\sigma)$ представлены на рис. 1.

Пусть $-\sigma_3 = -8.93$, $\sigma_4 = 8.48$. Тогда при выбранных значениях σ_3 , σ_4 , ε_2^- , ε_2^+ , r_1 , r_2 система второго порядка (2) имеет решения, определяющие функции $f_2^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$, для которых выполнены условия 5) и 6) теоремы 1. Графики функций $f_2^-(\sigma)$, $f_{21}^+(\sigma)$, $f_{22}^+(\sigma)$ показаны на рис. 1.

При $\sigma \in [-8.93, -3.11]$ верно неравенство $\lambda_2 \sigma + r_2 + \Gamma \varphi(\sigma) < 0$, а для любого $\sigma \in [-8.93, 8.48]$ справедливы соотношения $\lambda_2 = \beta_1 = 2.1$, $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. Условия 7)–9) теоремы 1 выполнены.

При $\tau_1 = 0.154$, $\tau_2 = 0.151$ выполняется условие 10) теоремы 1, а функция $\psi_5(\sigma)$ на сегменте $[-\tau_2, \tau_1] \cup [-\sigma_3, \sigma_4]$ имеет единственный нуль $\psi_5(0) = 0$ (условие 11)). Для системы (1), (33) с приведёнными выше значениями выполнены все условия теоремы 1, поэтому эта система имеет седловой предельный цикл первого рода.

Из доказательства теоремы 1 следует, что начальные условия седлового цикла находятся в множестве H_0 . Используя деление множества H_0 на части и вычисляя вращение векторного поля, численно определяются начальные условия седлового цикла. Система (1), (33) с указанными значениями параметров (в частности, $u = 0.958$) имеет седловой предельный цикл первого рода $z_1(t) = (x_1, x_2, \sigma)^T$ с начальными условиями $x_1 = -0.0063142$, $x_2 = 10.36968$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{z_1} = 4.35562692$. Мультипликаторы найденного седлового цикла $z_1(t)$ соответственно равны $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1.69$, $\mu_3 = 0.92$. Неравенство $\mu_2 > 1$ является характеристикой неустойчивости цикла.

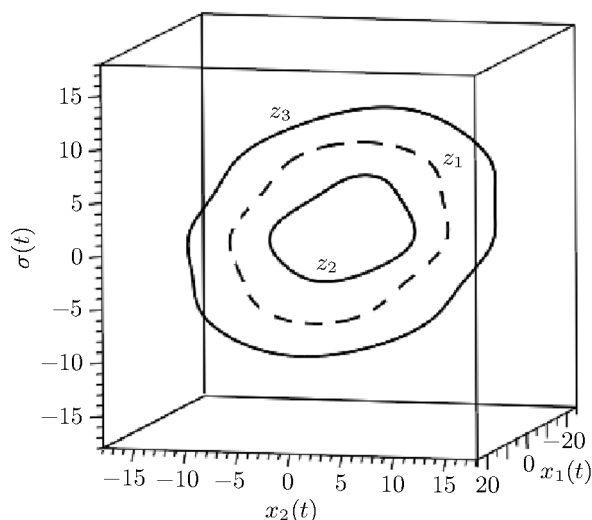


Рис. 2. Циклы системы (1) в пространстве $(x_1; x_2, \sigma)$ при $u = 0.958$.

С использованием теоремы 2 показывается, что у этой системы наряду с седловым предельным циклом $z_1(t)$ существуют два устойчивых предельных цикла первого рода: внутренний цикл $z_2(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.0101$, $x_2 = 7.1956$, $\sigma = 0$, периодом $T_{z_2} = 4.6930$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.39$, $\mu_3 = 0.92$; внешний цикл $z_3(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.0021$, $x_2 = 14.8285$, $\sigma = 0$, периодом $T_{z_3} = 4.2732$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.54$, $\mu_3 = 0.92$. Цикл $z_3(t)$ определяет скрытые колебания [7]. Взаимное расположение всех циклов рассматриваемой системы в пространстве (x_1, x_2, σ) изображено на рис. 2.

Рассмотрим систему (1) при $u = 0$

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),$$

$$\dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 \varphi(\sigma). \quad (34)$$

Система (34) является фазовой системой дифференциальных уравнений [2, с. 9] и определяет математическую модель фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка с

запаздыванием [1–13]. Численный анализ рассмотренной выше системы (1), (33) при уменьшении значения u с $u = 0.985$ до $u = 0$ позволяет сделать вывод о трансформации трёх циклов $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ в циклы $\tilde{z}_1(t)$, $\tilde{z}_2(t)$, $\tilde{z}_3(t)$ системы (34). Используя начальные условия цикла $z_1(t)$, рассмотрим для системы (34) множество ω_1 , которое определим следующим образом:

$$\omega_1 = \{(\sigma, x) : (x_1 + 0.00631)^2 + (x_2 - 10.36968)^2 \leq 1.12^2, \sigma = 0\}.$$

Пусть U_1 – оператор сдвига по траекториям фазовой системы (34). Обозначим $Q_1(x) = x - U_1(x)$. Вращение $\gamma(Q_1, \partial\omega_1)$ векторного поля $Q_1(x)$ на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1 отлично от нуля, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1) \neq 0$. Множество ω_1 содержит неподвижную точку оператора U_1 , определяющую начальные условия седлового цикла первого рода $\tilde{z}_1(t)$ системы (34) с начальными условиями $\tilde{x}_1 = 0.374$, $\tilde{x}_2 = 10.21184$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\tilde{z}_2} = 4.3702$.

Система (34) имеет устойчивые циклы: внутренний цикл $\tilde{z}_2(t)$ с начальными условиями $x_1 = 0.01$, $x_2 = 7.2768$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\tilde{z}_2(t)} = 4.6771$; внешний цикл $\tilde{z}_3(t)$ с начальными условиями $x_1 = 0.591$, $x_2 = 14.721$, $\sigma = 0$ и периодом $T_{\tilde{z}_3(t)} = 4.2982$. Для устойчивых циклов $\tilde{z}_2(t)$, $\tilde{z}_3(t)$ определяются характеристики $\langle \dot{\sigma}_2 \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = -0.00075$ и $\langle \dot{\sigma}_3 \rangle = -0.0044$. Полученные значения $\langle \dot{\sigma}_2 \rangle$ и $\langle \dot{\sigma}_3 \rangle$ позволяют сделать вывод о наличии в фазовой системе скрытых квазисинхронных режимов [5–7, 9, 12]. Существование в системе (34) разночастотных предельных циклов первого рода говорит о фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (34) определяют квазисинхронные режимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. В 2-х ч. СПб, 1992.
2. Леонов Г.А., Смирнова В.Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб, 2000.
3. Буркин И.М., Леонов Г.А. О существовании нетривиальных периодических решений у одной нелинейной системы третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2036–2042.
4. Буркин И.М., Буркина Л.И., Леонов Г.А. Проблема Барбашина в теории фазовых систем // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1932–1944.
5. Burkin I.M. Transition into space of derivatives // Differ. Equat. 2015. V. 51. № 13. P. 1717–1751.
6. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород, 2013.
7. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
8. Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. О проблеме Гарднера для систем управления фазовой автоподстройкой частоты // Докл. АН СССР. 2019. Т. 489. № 6. С. 541–544.
9. Матросов В.В. Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 4. С. 357–368.
10. Мамонов С.С. Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 637–646.
11. Мамонов С.С. Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1075–1084.
12. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышёвский сб. 2019. Т. 20. № 3. С. 333–348.
13. Matonov S.S., Kharlamova A. O. First-kind cycles of systems with cylindrical phase space // J. Math. Sci. 2020. V. 248. № 4. P. 457–466.
14. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
15. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.

Рязанский государственный университет
имени С.А. Есенина

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.
После доработки 03.12.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.