ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 174–184

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2022 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временно́й полуоси задаётся условие Дирихле. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение.

DOI: 10.31857/S0374064122020042

Введение. Сплошные среды описываются в основном нелинейными уравнениями в частных производных. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от той роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линейные уравнения, возникшие в результате линеаризации, сохраняют свою применимость для рассматриваемого физического процесса лишь некоторое конечное время. Более того, с точки зрения физики для нелинейных уравнений математической физики зачастую исключительно важны "существенно нелинейные" решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в том числе гидродинамических течений и солитонов, который решается либо при помощи линеаризации нелинейных уравнений на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок [1].

Классический метод последовательных приближений успешно использовался, в частности, для нахождения слабого решения смешанной задачи для нелинейного уравнения параболического типа [2, п. 9.2.1] и слабого решения задачи Коши для однородного нелинейного волнового уравнения [2, п. 12.2.1]. В работе [3, § 1] этими методами строится дважды непрерывно дифференцируемое решение $u = u(t,x)$ задачи Коши на конечном временно́м промежутке для нелинейного волнового уравнения с нелинейностью вида $G(|u|^2)u$ при определённой гладкости и ограниченности нелинейности $G,$ начальных функций и их производных, кроме того, при дополнительных условиях на нелинейность решение определяется в некотором конусе [3, § 2]. Подобными методами для нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями были построены при некоторых предположениях сильные обобщённые и классические решения первой [4] (нелинейность вида $\lambda|u|^p u$) и второй задачи Дарбу [5, 6] (нелинейности вида $\lambda f(t,x,u,\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(t,\eta)d\eta)$ и $\lambda|u|^p u$). Аналогичным образом в работе [7] при некоторых условиях построено сильное обобщённое и классическое решения задачи Коши–Гурса для нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями при нелинейности вида $\lambda|u|^p u.$

В данной статье, используя метод характеристик в сочетании с методом последовательных приближений, строится решение первой смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказывается единственность и непрерывная зависимость решения от начальных данных, а также выводятся условия, при выполнении которых решение смешанной задачи будет классическим.

Постановка задачи. В области $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box u(t,x) - \lambda(t,x) f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \tag{1}$$

где $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости), F и λ – функции, заданные на множестве $\overline{Q}$, а f – функция, заданная на множестве $[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L по третьей переменной, т.е. $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$. К уравнению (1) присоединяются начальные

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{2}$$

и граничное

$$Bu(t,0) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

условия, где φ, ψ, μ – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$, B – некоторый оператор (он может иметь различный вид, но в данной работе будем полагать, что $B = I$ – тождественный оператор).

Пример 1. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \sin z$, $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$ и $a = 1$, то получим уравнение синус-Гордона.

Пример 2. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \alpha\sin z + \beta\sin(z/2)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$, а $a = 1$, то получим двойное уравнение синус-Гордона, имеющее ряд приложений в физике, например: описание спиновых волн в жидком ^{3}He, описание распространения резонансных импульсов света в среде, атомы которой имеют вырожденные уровни энергии [8].

Пример 3. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \alpha\sin z + \beta\sin(z/3) + \gamma\sin(2z/3)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, и $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$, а $a = 1$, то получим тройное уравнение синус-Гордона, которое применяется в оптике [8].

Пример 4. Если в уравнении (1) положить $f(t,x,z) = \delta(t_0,x_0)z$, где $(t_0,x_0) \in Q$ и δ – дельта-функция, то получим телеграфное уравнение с потенциалом Дирака [9, 10].

Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x - at = 0$ разделим на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t,x) \in Q : (-1)^j(at - x) > 0\}$, $j = 1,2$. В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t,x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) -$$
$$- \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \times\right.$$
$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

где $g^{(2)}$, $g^{(1,1)}$ и $g^{(1,2)}$ – некоторые функции, первые две из которых заданы на неотрицательной, а последняя – на неположительной полуоси.

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (4)

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* $u^{(1)}$ *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $\overline{Q^{(1)}}$ *тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (4) при* $j=1$, *функции* $g^{(1,1)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из класса* $C^2([0,\infty))$.

Доказательство. 1. Пусть функция $u^{(1)} \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$ удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$. Сделав линейную невырожденную замену переменных независимых $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ и обозначив $u^{(1)}(t,x) = v(\xi,\eta)$, получим новое дифференциальное уравнение

$$\partial_\xi\partial_\eta v(\xi,\eta) + \frac{1}{4a^2}\lambda\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2},v(\xi,\eta)\right) = -\frac{1}{4a^2}F\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right).$$

Проинтегрируем его дважды. В результате получим уравнение

$$v(\xi,\eta) = g^{(1,1)}(\xi) + g^{(2)}(\eta) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^\xi dy\int\limits_\xi^\eta \left\{F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},v(y,z)\right)\right\}dz, \quad \left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{6}$$

Уравнения (6) – это уравнение (4) для $j=1$. Отсюда также следует принадлежность функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ классу $C^2([0,\infty))$.

2. Если функция $u^{(1)}$ – решение уравнения (4), то в силу условий гладкости $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$ и принадлежности функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ классу $C^2([0,\infty))$ заключаем, что $u^{(1)} \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$. Подставляя представления (4) в уравнение (1), убеждаемся, что функция $u^{(1)}$ удовлетворяет этому уравнению в $\overline{Q^{(1)}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* $u^{(2)}$ *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $\overline{Q^{(2)}}$ *тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (4) при* $j=2$, *функции* $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из классов* $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. *Функция* u *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда она для каждого* $j=1,2$ *является непрерывным решением уравнения (4), функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из классов* $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно, и выполняются условия согласования*

$$g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) = 0, \tag{7}$$

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) = 0, \tag{8}$$

$$D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2}(F(0,0) + \lambda(0,0)f(0,0,g^{(1,1)}(0) + g^{(2)}(0))) = 0. \tag{9}$$

Доказательство теоремы проведём, следуя схеме, изложенной в [11, п. 4.3] (в полном виде) и [12] (в кратком виде).

1. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда, согласно леммам 1 и 2, функция u представима в виде (4), (5) и функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ из классов $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно. Кроме того, выполнены условия непрерывности функции u и её частных производных до второго порядка включительно, т.е.

$$\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,x=at) = \partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,x=at), \quad 0 \leqslant k+p \leqslant 2, \tag{10}$$

где k, p – целые неотрицательные числа.

Заметим, что функция $\mathcal{W}(t,x) = g^{(2)}(x-at)$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$. Поэтому из равенства (10) для $k=p=0$ следует условие согласования (7).

Вычисляем производные первого и второго порядка функций $u^{(j)}$, $j=1,2$, в $Q^{(j)}$. Затем на характеристике $\gamma = \{(t,x) : x = at\}$ рассмотрим их предельные значения. Имеем

$$\partial_t u^{(j)}(t,x) = -aDg^{(1,j)}(x-at) + aDg^{(2)}(x+at) + \frac{1}{4a}\times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \mathcal{P}_j\bigg(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\bigg)\,dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j\bigg(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\bigg)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} (-1)^j \mathcal{P}_j\bigg(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\bigg)\,dy\Bigg], \quad (t,x)\in Q^{(j)}, \quad j=1,2, \qquad (11)$$

где $\mathcal{P}_j(w,z) = \lambda(w,z) f(w,z,u^{(j)}(w,z)) + F(w,z)$. Аналогично получаем

$$\partial_x u^{(j)}(t,x) = Dg^{(1,j)}(x-at) + Dg^{(2)}(x+at) - \frac{1}{4a^2}\times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \mathcal{P}_j\bigg(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\bigg)\,dz + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j\bigg(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\bigg)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} (-1)^j \mathcal{P}_j\bigg(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\bigg)\,dy\Bigg], \quad (t,x)\in Q^{(j)}, \quad j=1,2. \qquad (12)$$

Из представлений (11) и (12) следует, что если предельные значения производных первого порядка на характеристике γ совпадают между собой, то выполняется условие

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) +$$

$$+ \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{2at} \lambda\bigg(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\bigg)\bigg[f\bigg(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(2)}\bigg(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\bigg)\bigg) - f\bigg(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, u^{(1)}\bigg(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\bigg)\bigg)\bigg]\,dz = 0,$$

а так как $u^{(1)}(t,at) = u^{(2)}(t,at)$, то это равенство упрощается до (8).

Далее вычисляем в $Q^{(j)}$ производные второго порядка функций функций $u^{(j)}$, $j=1,2$. Имеем

$$\partial_t^2 u^{(j)}(t,x) = a^2D^2g^{(1,j)}(x-at) + a^2D^2g^{(2)}(x+at) + \frac{\mathcal{P}_j(t,x)}{2} -$$

$$-\frac{(-1)^j}{2}\mathcal{P}_j\bigg(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\bigg) + \frac{1}{8a}\times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\bigg(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\bigg)\,dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\bigg(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\bigg)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\bigg(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\bigg)\,dy\Bigg], \quad (t,x)\in Q^{(j)}, \quad j=1,2, \qquad (13)$$

где $\mathcal{P}_j^{(k)}(w,z) = \langle \operatorname{grad}\mathcal{P}(w,z), (1,(-1)^k a)^{\mathrm{т}}\rangle$, $k=1,2$. Аналогично вычисляем вторые производные $\partial_x^2 u^{(j)}$, $\partial_t\partial_x u^{(j)}$. В результате получаем

$$\partial_x^2 u^{(j)}(t,x) = D^2 g^{(1,j)}(x-at) + D^2 g^{(2)}(x+at) - \frac{\mathcal{P}_j(t,x)}{2a^2} -$$
$$- \frac{(-1)^j}{2a^2}\mathcal{P}_j\biggl(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\biggr) + \frac{1}{8a^3}\times$$
$$\times\biggl[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\biggl(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\biggr)dz - \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\biggl(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\biggr)dy +$$
$$+ \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\biggl(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\biggr)dy\biggr] = \frac{\partial_t^2 u^{(j)}(t,x) - \mathcal{P}_j(t,x)}{a^2},$$
$$(t,x)\in Q^{(j)}, \quad j=1,2, \tag{14}$$
$$\partial_t\partial_x u^{(j)}(t,x) = -aD^2 g^{(1,j)}(x-at) + aD^2 g^{(2)}(x+at) +$$
$$-\frac{(-1)^j}{2a}\mathcal{P}_j\biggl(\frac{((-1)^j+1)(at-x)}{2a}, \frac{((-1)^j-1)(at-x)}{2}\biggr) - \frac{1}{8a^2}\times$$
$$\times\biggl[\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{at+x} \mathcal{P}_j^{(1)}\biggl(\frac{at-x+z}{2a}, \frac{x-at+z}{2}\biggr)dz + \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\biggl(\frac{at+x-y}{2a}, \frac{at+x+y}{2}\biggr)dy +$$
$$+ \int\limits_0^{x-at} \mathcal{P}_j^{(2)}\biggl(\frac{(-1)^j(at-x)-y}{2a}, \frac{(-1)^j(at-x)+y}{2}\biggr)dy\biggr], \quad (t,x)\in Q^{(j)}, \quad j=1,2. \tag{15}$$

Используя представления (13), рассмотрим равенство (10) для $k=2$, $p=0$, т.е. равенство для вторых производных по t на характеристике γ. Для этого в (13) полагаем $x=at$. В результате получаем

$$\partial_t^2 u^{(1)}(t,at) = \frac{\mathcal{P}_1(t,at)}{2} + \frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at} \mathcal{P}_1^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\biggr)dz + \frac{\mathcal{P}_1(0,0)}{2} + a^2 D^2 g^{(1,1)}(0) + a^2 D^2 g^{(2)}(2at) =$$
$$= \partial_t^2 u^{(2)}(t,at) = \frac{\mathcal{P}_2(t,at)}{2} + \frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at} \mathcal{P}_2^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\biggr)dz - \frac{\mathcal{P}_2(0,0)}{2} + a^2 D^2 g^{(1,2)}(0) + a^2 D^2 g^{(2)}(2at).$$

Выполнение данных равенств влечёт за собой согласование функций $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в точке 0 в виде (9), если верны равенства (10) для $k+p\leqslant 1$. Воспользовавшись представлениями (14) и (15), непосредственной проверкой убеждаемся, что из равенств (10) для $k=p=1$ и $k=0$, $p=2$ следует условие (9), если равенство (10) верно при $k+p\leqslant 1$.

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (4), (5), где $g^{(1,1)}\in$ $\in C^2([0,\infty))$, $g^{(1,2)}\in C^2((-\infty,0])$ и $g^{(2)}\in C^2([0,\infty))$, и выполнены условия (7)–(9). Из лемм 1 и 2 следует, что функция u принадлежит классам $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$ и $\overline{Q^{(2)}}$. Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$ достаточно совпадений между собой на характеристике $x=at$ значений функций $u^{(j)}$, значений их

производных первого порядка и значений их производных второго порядка, т.е. чтобы выполнялись равенства (10). Последнее равносильно выполнению условий (7)–(9), что легко выводится, если провести рассуждения в порядке, обратном порядку п. 1 доказательства, исходя из представлений (4). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $F \in C(\overline{Q})$, $\lambda \in C(\overline{Q})$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, *функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной, т.е.* $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, *и функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *непрерывны. Тогда решения уравнений (4) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство теоремы проведём по схеме, изложенной в [13, п. 2.4]. Для определённости рассмотрим уравнение (4) при $j = 1$. Будем решать его методом последовательных приближений. Обозначим $G(t,x) = g^{(1,j)}(x-at) + g^{(2)}(x+at)$. Возьмём начальное приближение $u^{(1,0)} = G$. Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$u^{(1,m)}(t,x) = G(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,m-1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{16}$$

Найдём оценки для последовательных приближений.

Пусть $\widetilde{x} > 0$, $\mathcal{A} = \overline{Q^{(1)}} \bigcap ([0,\widetilde{x}/a]\times[0,\widetilde{x}])$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}}|G(t,x)|$, $c = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}}|\lambda(t,x)|$. Тогда

$$|(u^{(1,1)} - u^{(1,0)})(t,x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy\int\limits_{x-at}^{x+at} c\left|u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|dz \leqslant \frac{LcMt(x-at)}{2a},$$

$$|(u^{(1,2)} - u^{(1,1)})(t,x)| \leqslant \frac{L}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy\int\limits_{x-at}^{x+at} c\left|u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right) - u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{Lc^2M|y||z-y|}{4a^2}\,dz \leqslant \frac{L^2c^2M\widetilde{x}at(x^2-a^2t^2)}{(4a^2)^2}.$$

Далее методом математической индукции, в качестве базы в которой здесь выбирается последнее неравенство, несложно доказывается, что имеет место оценка

$$|(u^{(1,i+1)} - u^{(1,i)})(t,x)| \leqslant \frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}}, \quad (t,x)\in\mathcal{A}, \quad i\in\mathbb{N}, \quad i\geqslant 2, \tag{17}$$

где использовано обозначение $(x)_n = \prod_{k=1}^n(x+k-1)$ – символ Похгаммера.

Заметим, что $u^{(1,m)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{m-1}(u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$. Из оценки (17) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $u^{(1,\infty)} = u^{(1,0)} + \sum_{j=0}^{\infty}(u^{(1,j+1)} - u^{(1,j)})$ на множестве $\mathcal{A}$, поскольку его члены мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$M + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}} = M\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}t\,{}_0F_1(;2;(4a^2)^{-1}Lc(x-at)(x+at))}{2a}\right),$$

где ${}_0F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, которая может быть определена как сумма ряда

$$ {}_0F_1(;b;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(b)_k k!}. $$

Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $u^{(1,m)}$ равномерно стремятся на множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной в $\mathcal{A}$ функции $u^{(1)}:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}$ функции $u^{(1)}:\overline{Q^{(1)}}\to\mathbb{R}$, $(t,x)\mapsto u^{(1)}(t,x)$. Переходя в равенстве (16) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что функция $u^{(1)}$ является решением уравнения (4) при $j=1$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (4) при $j=1$ от противного. Пусть у уравнения (4) при $j=1$ существуют два решения $u^{(1)}$ и $\widetilde{u}^{(1)}$. Обозначим $U=u^{(1)}-\widetilde{u}^{(1)}$. Тогда

$$ U(t,x)=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dz+ $$

$$ +\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},\widetilde{u}^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \quad (18) $$

Функция U является непрерывной, значит, $|U(t,x)|\leqslant M_U$ при условии $(t,x)\in\mathcal{A}$, где M_U – некоторая константа. Из равенства (18) с учётом условия Липшица следует, что

$$ |U(t,x)|\leqslant\frac{L}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}cM_U\,dz\leqslant\frac{LcM_Ut\widetilde{x}}{2a},\quad (t,x)\in\mathcal{A}. $$

Применяя метод математической индукции, придём к следующей оценке:

$$ |U(t,x)|\leqslant\frac{2(Lc)^{i+1}M\widetilde{x}at(x-at)^i(x+at)^i}{(1)_i(2)_i(4a^2)^{i+1}}\leqslant\frac{2^{i+1}(Lc)^{i+1}M_U\widetilde{x}^{2i+1}}{(1)_i(2)_i(4a^2)^i} $$

для любого натурального i и любой пары (t,x) из $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $U\equiv 0$ на множестве $\mathcal{A}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – что $U\equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(j)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения (4) при $j=1$.

Для доказательства непрерывной зависимости решения от начальных данных рассмотрим наряду с уравнением (4) при $j=1$ возмущённое уравнение

$$ (u^{(1)}+\Delta u)(t,x)=(G+\Delta G)(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right. $$

$$ \left.+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \quad (19) $$

и разность возмущённого (19) и невозмущённого (4) уравнений

$$ \Delta u(t,x)=\Delta G(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right. $$

$$ \times\left\{f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)-\right. $$

$$- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Bigg\}\Bigg] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{20}$$

Для уравнения (20) относительно возмущения Δu справедлива следующая оценка модуля возмущения:

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant M_{\Delta G}\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}t\,{}_0F_1(;2;(4a^2)^{-1}Lc(x-at)(x+at))}{2a}\right), \quad (t,x) \in \mathcal{A},$$

где $M_{\Delta G} = \max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}} |\Delta G(t,x)|$. Из полученного неравенства вытекает, что какое бы малое возмущение ΔG, $M_{\Delta G} = \varepsilon$, мы ни взяли, для возмущения решения выполняется неравенство

$$|\Delta u(t,x)| = \delta \leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{Lc\widetilde{x}^2}{2a^2}\,{}_0F_1\left(;2;\frac{Lc\widetilde{x}^2}{4a^2}\right)\right)$$

на множестве $\mathcal{A}$. В силу произвольности $\widetilde{x}$ получаем, что решение уравнения (4) при $j = 1$ непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (4) при $j = 2$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Построение решения смешанной задачи. Теперь продемонстрируем наш метод решения смешанных задач на примере задачи (1)–(3) при $B = I$ (тождественный оператор), т.е. в этом случае условие (3) имеет простой вид $u(t,0) = \mu(t)$ (условие Дирихле).

Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (2). Подставляя выражение (4) для функции $u^{(j)}$ при $j = 1$ в условия (2), получаем систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0,x) = \varphi(x) = g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$\partial_t u^{(1)}(0,x) = \psi(x) = -aDg^{(1,1)}(x) + aDg^{(2)}(x) -$$

$$-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \left[\lambda\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right)\right) + F\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2}\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0.$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x, будем иметь

$$g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$-g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(z)\,dz + \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy + 2C, \quad x \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$g^{(1,1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\,dz - C - \frac{1}{4a^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0,$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\,dz + C + \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz \int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dy, \quad x \geqslant 0, \tag{21}$$

где C – произвольная действительная константа. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия. Подставляя выражение (4) для функции $u^{(j)}$ при $j=2$ в условия (3), получаем уравнение $g^{(1,2)}(-at)+g^{(2)}(at)=\mu(t)$ относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделав в нём замену $t=-z/a$, будем иметь $g^{(1,2)}(z)=\mu(-z/a)-g^{(2)}(-z)$. Отсюда

$$g^{(1,2)}(x)=\mu\left(-\frac{x}{a}\right)-\frac{\varphi(-x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{-x}\psi(z)\,dz-C-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-x}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\leqslant 0. \tag{22}$$

Подставив представления (21) и (22) в исходные интегральные уравнения (4), получим

$$u^{(1)}(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t,x)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{at-x}^{x+at}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}. \tag{23}$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной. Тогда решения* $u^{(j)}$ $(j=1,2)$ *уравнений (23) существуют, единственны в классе* $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *и непрерывно зависят от функций* φ, ψ *и* μ.

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

Таким образом, построено кусочно-гладкое решение задачи (1)–(3), которое определяется формулами (23) и (5).

Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f, F, λ необходимо и достаточно выполнение равенств (7)–(9) согласно теореме 1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (7)–(9), получаем следующие условия согласования:

$$\mu(0)=\varphi(0), \tag{24}$$

$$\mu'(0)=\psi(0), \tag{25}$$

$$\mu''(0)=\frac{1}{2}\lambda(0,0)(f(0,0,\mu(0))+f(0,0,\varphi(0)))+F(0,0)+a^2\varphi''(0). \tag{26}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L *по третьей переменной. Первая смешанная задача (1)–(3) имеет в классе* $C^2(\overline{Q})$ *единственное решение и тогда и только тогда, когда выполняются условия (24)–(26). Это решение определяется формулами (5) и (23).*

Доказательство следует из теоремы 1, леммы 3 и проведённых выше рассуждений.

Неоднородные условия согласования. Если заданные функции задачи (1)–(3) не удовлетворяют однородным условиям согласования (24)–(26), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, в которой условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

Условиями сопряжения могут быть следующие условия:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \varphi(0) - \mu(0),$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t, x = at) = \psi(0) - \mu'(0) +$$

$$+ \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at} \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] dz,$$

$$[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t, x = at) = F(0,0) + \frac{\lambda(0,0)}{2}\Big(f(0,0,(u)^+(0,0)) + f(0,0,(u)^-(0,0))\Big) +$$

$$+ \frac{\lambda(t,at)}{2}\Big(f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\Big) - \mu''(0) + a^2\varphi''(0) + \frac{1}{8a} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2at}\Bigg\{\left(a\partial_x\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \partial_t\lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\left(f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right) +$$

$$+ \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \left[\left((\partial_t u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right] -$$

$$- \lambda\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \times \left[\left((\partial_t u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right]\Bigg\} dz. \tag{27}$$

Здесь через $()^\pm$ обозначаются предельные значения функции и её частных производных, вычисляемые с разных сторон характеристики $x - at = 0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^\pm(t, x = at) = \lim_{\delta\to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).$$

Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (27), следующим образом.

Задача (1)–(3) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и условиям сопряжения (27).

Отметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

Заключение. В статье получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в четверти плоскости. Установлена зависимость гладкости решения от гладкости начальных функций. В работе предложен метод доказательства существования классических решений смешанных задач для нелинейных уравнений. Кроме того, сформулирована задача с условиями сопряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. Т. 3. М., 1992.
2. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
3. *Jörgens K.* Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeitschr. 1961. № 208. S. 295–308.
4. *Берикелашвили Г.К., Джохадзе О.М., Мидодашвили Б.Г., Харибегашвили С.С.* О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 359–372.
5. *Kharibegashvili S., Jokhadze O.* The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity // Trans. of A. Razmadze Math. Inst. 2016. V. 170. № 3. P. 385–394.
6. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* Вторая задача Дарбу для волнового уравнения со степенной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1623–1640.
7. *Jokhadze O.* On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2008. V. 340. № 2. P. 1033–1045.
8. *Bullough R.K., Caudrey P.J., Gibbs H.M.* The double sine-Gordon equations: a physically applicable system of equations // Solitons. Topics in Current Physics / Eds. R.K. Bullough, P.J. Caudrey. Berlin; Heidelberg, 1980. V. 17. P. 107–141.
9. *Моисеев Е.И., Юрчук Н.И.* Классические и обобщённые решения задач для телеграфных уравнений с потенциалом Дирака // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1338–1344.
10. *Барановская С.Н., Новиков Е.Н., Юрчук Н.И.* Задача с косой производной в граничном условии для телеграфного уравнения с потенциалом Дирака // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1176–1183.
11. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
12. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю.* Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 6. С. 647–651.
13. *Столярчук И.И.* Классические решения смешанных задач для уравнения Клейна–Гордона–Фока: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2020.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 01.02.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.