ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 185–191

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958:536.2

МЕТОД РЕДУКЦИИ И НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. **А. А. Косов, Э. И. Семенов**

Изучается нелинейное многомерное уравнение теплопроводности со степенным коэффициентом. Предлагается строить его точные решения методом многомерной редукции на основе использования специального анзаца. В результате редукции задача сводится к решению систем матрично-векторных алгебраических уравнений, определяющих зависимость от пространственных переменных, и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих зависимость от времени. Для ряда примеров с различными значениями показателей степени получены явные выражения через элементарные функции для точных многомерных решений, в том числе анизотропных по пространственным переменным. Найденные точные решения могут быть полезны при построении приближённых решений краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности с помощью численных методов, приводящих к необходимости решения систем уравнений высокой размерности.

DOI: 10.31857/S0374064122020054

Введение. В данной работе, используя метод редукции, построены новые точные многомерные решения уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом

$$v_t = \nabla \cdot (v^{1/\lambda} \nabla v), \tag{1}$$

которое после замены $v = u^\lambda$ запишется в виде

$$u_t = u\Delta u + \lambda |\nabla u|^2, \quad u = u(\mathbf{x}, t). \tag{2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, ∇ – оператор взятия градиента; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\lambda \neq 0$ – произвольный вещественный параметр. Отметим, что построению точных решений уравнения нелинейной теплопроводности (1) посвящено огромное количество работ. Не ставя своей целью дать их подробный обзор, отметим только статьи [1, 2] и справочники [3–7], в которых содержится наиболее полная сводка точных решений уравнения (1).

Основная идея метода редукции состоит в том, чтобы с помощью некоторого анзаца построение точных решений нелинейных уравнений с частными производными сводилось к решению некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) или системы ОДУ. В данной работе точные решения уравнения (2) предлагается отыскивать в виде специального многомерного анзаца

$$u(\mathbf{x}, t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(\mathbf{x}) + g(t), \quad \omega = \psi(t)W(\mathbf{x}) + \varphi(t), \tag{3}$$

в котором используется следующая многомерная конструкция:

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{4}$$

где A – ненулевая вещественная симметрическая $n \times n$-матрица, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор, $C \in \mathbb{R}$ – константа. При этом в результате редукции мы должны получить некоторое ОДУ для функции $\Omega(\omega)$. Именно использование квадратичной функции (4) от $n \geqslant 2$ переменных позволяет нам говорить о *многомерной редукции*.

Отметим, что в литературе подобный метод редукции для нелинейных уравнений с частными производными с одномерной пространственной переменной иногда называют методом Кларксона–Крускала [4, гл. 6]; он опирается на технику обобщённого разделения переменных [4, 6, 7].

После подстановки анзаца (3) в исследуемое уравнение (2) мы должны подобрать функции $a(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ таким образом, чтобы в результате всё свелось к одному ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, в этом случае будем считать задачу выполненной. При этом будем предполагать, что коэффициенты функции $W(\mathbf{x})$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$A = 2\sigma A^2, \quad \mathbf{B} = 2\sigma A\mathbf{B}, \quad C = \sigma|\mathbf{B}|^2, \tag{5}$$

где $\sigma \neq 0$ – некоторая постоянная. При таком предположении, как несложно проверить, функция $W(\mathbf{x})$ обладает следующим свойством:

$$W = \sigma|\nabla W|^2. \tag{6}$$

Кроме того, $\Delta W = \operatorname{tr} A = \operatorname{const} \neq 0$, где $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Заметим, что конструкция (4) ранее успешно применялась для построения частных точных многомерных решений некоторых нелинейных уравнений и систем [8, 9].

1. Применение метода редукции. После подстановки анзаца (3) в уравнение (2) и вычисления необходимых производных придём к равенству

$$a'_t\Omega + (a\psi'_t\Omega'_\omega + f'_t)W + a\varphi'_t\Omega'_\omega + g'_t = \frac{\lambda}{\sigma}(a\psi\Omega'_\omega + f)^2W +$$
$$+ (a\Omega + fW + g)\bigg((a\psi\Omega'_\omega + f)\operatorname{tr} A + \frac{1}{\sigma}a\psi^2\Omega''_{\omega\omega}W\bigg), \tag{7}$$

в котором для краткости записи опущены аргументы у всех функций; при его выводе мы воспользовались свойством (6). Это равенство, исключив в нём функцию W с помощью тождества $W = (\omega - \varphi)/\psi$, вытекающего из (3), запишем в виде

$$(a'_t - af\operatorname{tr} A)\Omega + a(\varphi'_t - g\psi\operatorname{tr} A)\Omega'_\omega + g'_t - gf\operatorname{tr} A = a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega\Omega'_\omega +$$
$$+ \frac{af}{\sigma}\omega^2\Omega''_{\omega\omega} - \frac{2af\varphi}{\sigma}\omega\Omega''_{\omega\omega} + \frac{af\varphi^2}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega} + (\omega - \varphi)\Gamma, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$\Gamma = \frac{a^2\psi}{\sigma}(\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \lambda\Omega'^2_\omega) + \frac{ag\psi}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega} - \frac{a(\psi'_t - (\operatorname{tr} A + 2\lambda/\sigma)\psi f)}{\psi}\Omega'_\omega - \frac{f'_t - (\operatorname{tr} A + \lambda/\sigma)f^2}{\psi}.$$

Так как нас интересует сведéние равенства (8) к одному-единственному ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, то положим $\varphi(t) \equiv \varphi_0 = \operatorname{const}$. Кроме того, потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$a'_t - af\operatorname{tr} A = 0, \quad g'_t - gf\operatorname{tr} A = 0, \tag{9}$$

из которых следует, что $g(t) = \nu a(t)$, где $\nu \neq 0$ – произвольная постоянная. С учётом тождеств (9) и предположения $\varphi(t) \equiv \varphi_0$ равенство (8) примет вид

$$\nu a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega'_\omega + a^2\psi\operatorname{tr} A\Omega\Omega'_\omega + \frac{af}{\sigma}(\omega - \varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega} + a^2\psi(\omega - \varphi_0)\Gamma_1 = 0, \tag{10}$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\sigma}(\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \lambda\Omega'^2_\omega) + \frac{\nu}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega} - \frac{\psi'_t - (\operatorname{tr} A + 2\lambda/\sigma)\psi f}{a\psi^2}\Omega'_\omega - \frac{f'_t - (\operatorname{tr} A + \lambda/\sigma)f^2}{a^2\psi^2}.$$

Поделив все слагаемые в равенстве (10) на $a^2\psi$, получим

$$\nu\operatorname{tr} A\Omega'_\omega + \operatorname{tr} A\Omega\Omega'_\omega + \frac{f}{\sigma a\psi}(\omega - \varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega} + (\omega - \varphi_0)\Gamma_1 = 0. \tag{11}$$

Чтобы это равенство представляло собой ОДУ для неизвестной функции $\Omega(\omega)$, оно не должно содержать функции, зависящие от времени t. Поэтому должны выполняться тождества

$$\frac{f}{a\psi} = \mu_1, \quad \frac{\psi_t' - (\operatorname{tr} A + 2\lambda/\sigma)\psi f}{a\psi^2} = \mu_2, \quad \frac{f_t' - (\operatorname{tr} A + \lambda/\sigma) f^2}{a^2\psi^2} = \mu_3, \tag{12}$$

где $\mu_1 \neq 0$, μ_2, μ_3 – некоторые постоянные, которые можно выбирать произвольными. Из равенства (11) в силу тождеств (12) получим для искомой функции $\Omega(\omega)$ нелинейное ОДУ второго порядка

$$(\omega - \varphi_0)\left(\frac{1}{\sigma}\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \frac{\lambda}{\sigma}\Omega'^2_\omega + \frac{\nu}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega} - \mu_2\Omega'_\omega - \mu_3\right) + \frac{\mu_1}{\sigma}(\omega - \varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega} + \operatorname{tr} A(\Omega + \nu)\Omega'_\omega = 0.$$

Отметим, что ранее авторами уже изучалась [8, 9] система алгебраических уравнений (5). Поэтому повторять её полное исследование не будем, а приведём только решение матричного уравнения из (5), которое нам понадобится. Именно, если $(A, \mathbf{B}, C)$ – решение системы (5), где A – ненулевая вещественная симметричная матрица, то $A = (2\sigma)^{-1} S E_m S^{\text{т}}$. Здесь E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S – произвольная ортогональная матрица. При этом имеем

$$\operatorname{tr} A = m/(2\sigma), \quad m \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{13}$$

Замечание. Пространственная структура решений определяется рангом матрицы E_m. Если $\operatorname{rank} E_m = 1$, то имеем “псевдомногомерные” точные решения, т.е. решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если $1 < \operatorname{rank} E_m < n$, то получим анизотропные по пространственным переменным точные решения. Наконец, если $\operatorname{rank} E_m = n$, то имеем радиально-симметричные по пространственным переменным точные решения.

Окончательно, с учётом формулы (13) ОДУ для искомой функции $\Omega(\omega)$ примет следующий вид:

$$(\omega - \varphi_0)\left(\frac{1}{\sigma}\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \frac{\lambda}{\sigma}\Omega'^2_\omega + \frac{\nu}{\sigma}\Omega''_{\omega\omega} - \mu_2\Omega'_\omega - \mu_3\right) + \frac{\mu_1}{\sigma}(\omega - \varphi_0)^2\Omega''_{\omega\omega} + \frac{m}{2\sigma}(\Omega + \nu)\Omega'_\omega = 0. \tag{14}$$

Соотношения (9), (12) при условии $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$ сводятся к следующим ОДУ:

$$a_t' = \frac{\mu_1 m}{2\sigma} a^2\psi, \quad \psi_t' = \left(\mu_2 + \left(\frac{m}{2\sigma} + \frac{2\lambda}{\sigma}\right)\mu_1\right) a\psi^2, \quad f_t' = \left(\frac{m}{2\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_3}{\mu_1^2}\right) f^2. \tag{15}$$

Если $\mu_2 = \mu_3 = 0$, то соотношения (9), (12) редуцируются к ОДУ вида

$$a_t' = \frac{\mu_1 m}{2\sigma} a^2\psi, \quad \psi_t' = \left(\frac{m}{2\sigma} + \frac{2\lambda}{\sigma}\right) a\psi^2, \quad f_t' = \left(\frac{m}{2\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma}\right) f^2. \tag{16}$$

При этом должно выполняться условие $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, которое подробно рассмотрим при интегрировании систем ОДУ (15) и (16).

Изучим теперь частный случай анзаца (3) при $f(t) \equiv 0$ и $g(t) \equiv 0$. В этом случае анзац примет вид $u(\mathbf{x}, t) = a(t)\Omega(\omega)$, и после подстановки его в уравнение (2) придём к равенству

$$a_t'\Omega + a\psi_t'\Omega'_\omega W + a\varphi_t'\Omega'_\omega = \frac{\lambda}{\sigma} a^2\psi^2\Omega'^2_\omega W + a\Omega\left(a\psi\Omega'_\omega \operatorname{tr} A + \frac{1}{\sigma} a\psi^2\Omega''_{\omega\omega} W\right),$$

которое получается из равенства (7) при $f(t) \equiv 0$ и $g(t) \equiv 0$ после очевидных преобразований. Это равенство, разделив его на $a_t' \neq 0$ и исключив в нём функцию W с помощью тождества $W = (\omega - \varphi)/\psi$, вытекающего из (3), запишем в виде

$$\Omega + \frac{a\varphi_t'}{a_t'}\Omega'_\omega = \frac{a^2\psi}{a_t'} \operatorname{tr} A\Omega\Omega'_\omega + (\omega - \varphi)\left[\frac{a^2\psi}{\sigma a_t'}(\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \lambda\Omega'^2_\omega) - \frac{a\psi_t'}{a_t'\psi}\Omega'_\omega\right]. \tag{17}$$

Чтобы равенство (17) представляло собой ОДУ для неизвестной функции $\Omega(\omega)$, оно не должно содержать функции, зависящие от времени t. Кроме того, положим $\varphi(t) \equiv \varphi_0 = \mathrm{const}$. Поэтому должны выполняться тождества

$$\frac{a^2\psi}{a'_t} = \delta_1, \quad \frac{a\psi'_t}{a'_t\psi} = \delta_2, \tag{18}$$

где $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$ – некоторые постоянные, которые можно выбирать произвольными. Из равенства (17) в силу тождеств (18) получим для искомой функции $\Omega(\omega)$ нелинейное ОДУ второго порядка

$$\frac{m\delta_1}{2\sigma}\Omega\Omega'_\omega + (\omega - \varphi_0)\left[\frac{\delta_1}{\sigma}(\Omega\Omega''_{\omega\omega} + \lambda\Omega'^2_\omega) - \delta_2\Omega'_\omega\right] - \Omega = 0. \tag{19}$$

Из равенств (18) находим, что $\psi(t) = \delta_0 a(t)^{\delta_2}$, причём

$$a(t) = (C - (1+\delta_2)\delta_0\delta_1^{-1}t)^\delta, \quad \text{если} \quad \delta_2 \neq -1, \quad \text{и} \quad a(t) = \exp(\delta_0\delta_1^{-1}t + C), \quad \text{если} \quad \delta_2 = -1.$$

Здесь $\delta = -1/(1+\delta_2)$, а $\delta_0 \neq 0$, C – произвольные постоянные.

2. Интегрирование систем ОДУ (15), (16). Прежде чем приступить к построению частных точных решений найденных ОДУ для функции $\Omega(\omega)$, проинтегрируем системы ОДУ для функций времени $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$.

1. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$. Обозначим $k_1 = \mu_1 m/(2\sigma)$, $k_2 = \mu_2 + (m/(2\sigma) + 2\lambda/\sigma)\mu_1$.

Пусть выполнено условие $k_1 + k_2 \neq 0$, тогда система ОДУ (15) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = (C_1 t + C_2)^{k_1/(k_1+k_2)}, \quad \psi(t) = -\frac{C_1}{k_1+k_2}(C_1 t + C_2)^{k_2/(k_1+k_2)},$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные. Интегрируя ОДУ (15) для функции $f(t)$, находим

$$f(t) = \frac{1}{-\varepsilon_1 t + C_2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 = \frac{m}{2\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_3}{\mu_1^2}.$$

Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул вытекает, что $C_1 = -\varepsilon_1$ и $C_1\mu_1 = -k_1 + k_2$. Вследствие этих двух равенств имеем

$$\mu_1\mu_2 + \frac{m+2\lambda}{2\sigma}\mu_1^2 = \mu_3.$$

С учётом последних соотношений искомые функции примут окончательный вид

$$a(t) = \left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^p, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^{-1-p},$$

$$f(t) = \left[-\left(\frac{m+2\lambda}{\sigma} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)t + C_2\right]^{-1}, \quad p = -\frac{m\mu_1/2}{(m+2\lambda)\mu_1 + \sigma\mu_2}, \quad \mu_2 \neq -\frac{m+2\lambda}{\sigma}\mu_1.$$

Если $k_1 + k_2 = 0$ ($k_1 = k$, $k_2 = -k$, $k \neq 0$), то система ОДУ (15) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = C_1\exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{C_2}{kC_1}\exp(-C_2 t),$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ – произвольные постоянные. Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул следует, что $f(t) \equiv \mu_1 C_2/k$. Чтобы решением

ОДУ (15) для функции $f(t)$ была константа, мы должны потребовать равенство нулю коэффициента в правой части этого уравнения, т.е. $\mu_3 = -(m+2\lambda)\mu_1^2/(2\sigma)$, $\lambda \neq -m/2$. Тогда в силу условия $k_1 + k_2 = 0$ имеем $\mu_2 = -(m+2\lambda)\mu_1/\sigma$. Искомые функции $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ примут окончательный вид

$$a(t) = C_1 \exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{2\sigma C_2}{m\mu_1 C_1}\exp(-C_2 t), \quad f(t) \equiv \frac{2\sigma C_2}{m}. \tag{20}$$

2. Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Обозначим $k_1 = \mu_1 m/(2\sigma)$, $k_2 = m/(2\sigma) + 2\lambda/\sigma$.

Пусть выполнено условие $k_1 + k_2 \neq 0$, тогда система ОДУ (16) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = (C_1 t + C_2)^{k_1/(k_1+k_2)}, \quad \psi(t) = -\frac{C_1}{k_1+k_2}(C_1 t + C_2)^{k_2/(k_1+k_2)}, \tag{21}$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные. Интегрируя ОДУ (16) для функции $f(t)$, находим

$$f(t) = \frac{1}{-\varepsilon_2 t + C_2}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_2 = \frac{m+2\lambda}{2\sigma}.$$

Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул вытекает, что $C_1 = -\varepsilon_2$ и $C_1\mu_1 = -k_1 + k_2$. Вследствие этих двух равенств имеем $\mu_1 = (m+4\lambda)/\lambda$. С учётом последних соотношений искомые функции примут окончательный вид

$$a(t) = \left[-\frac{m+2\lambda}{2\sigma}t + C_2\right]^q, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\left[-\frac{m+2\lambda}{\sigma}t + C_2\right]^{-1-q},$$

$$f(t) = \left[-\frac{m+2\lambda}{2\sigma}t + C_2\right]^{-1}, \quad q = -\frac{\mu_1 m}{\mu_1 m + m + 4\lambda}, \quad \mu_1 \neq -\frac{m+4\lambda}{m}.$$

Если $k_1 + k_2 = 0$ $(k_1 = k,\ k_2 = -k,\ k \neq 0)$, то система ОДУ (16) для функций $a(t)$ и $\psi(t)$ имеет общее решение

$$a(t) = C_1 \exp(C_2 t), \quad \psi(t) = \frac{C_2}{kC_1}\exp(-C_2 t),$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ – произвольные постоянные. Так как должно выполняться равенство $f(t) = \mu_1 a(t)\psi(t)$, то из последних формул следует, что $f(t) \equiv \mu_1 C_2/k$. Чтобы решением ОДУ (16) для функции $f(t)$ была константа, мы должны потребовать равенство нулю коэффициента в правой части этого уравнения, т.е. $\lambda = -m/2$. Кроме того, в силу условия $k_1 + k_2 = 0$ имеем $\mu_1 = -(m+4\lambda)/m$, $\lambda \neq -m/4$. Искомые функции $a(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ примут окончательный вид (20).

3. Частные точные решения ОДУ (14), (19). Поскольку построение общего решения нелинейных ОДУ второго порядка (14), (19) представляется весьма непростой задачей, то в этом пункте работы ограничимся предъявлением явных частных точных решений указанных уравнений.

Пусть $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$, тогда при следующих значениях параметров:

$$\lambda = -\frac{m+2}{4}, \quad 1)\ \mu_2 = \frac{\mu_1(4-m)}{4\sigma}, \quad 2)\ \mu_2 = \frac{(2-m)(m+4)\mu_1}{8\sigma},$$

ОДУ (14) имеет соответственно следующие точные частные решения:

$$1)\ \Omega(\omega) = -\frac{\mu_1}{2\varphi_0}\omega^2 + \frac{\mu_1\varphi_0}{2} - \nu \quad \text{и} \quad 2)\ \Omega(\omega) = -\frac{\mu_1(m+2)}{4\varphi_0}\omega^2 + \frac{(m+2)\mu_1\varphi_0}{4} - \nu. \tag{22}$$

Отметим, что при сделанных предположениях: $\mu_1 \neq 0,\ \ \mu_2 \neq 0,\ \ \mu_3 \neq 0,\ \ \varphi_0 \neq 0$ и $\lambda = -(m+2)/4,$ ОДУ (14) обладает точным частным решением $\Omega(z) = P_1\omega^2 + P_2\omega + P_3,$ но значения постоянных $P_i,\ \ i = 1,2,3,$ получаются чрезвычайно громоздкими, и поэтому их приводить не будем.

Пусть $\varphi_0 = 0,\ \ m = 2,\ \ \lambda = -m/2,\ \ \delta_2 = -1,$ тогда ОДУ (19) имеет частное точное решение

$$\Omega(\omega) = \frac{\sigma}{\delta_1(1-p)}\omega + C\omega^p,$$

где $p \neq 1,\ \ C$ – произвольные постоянные.

Пример 1. Пусть $n = 3,\ \ m = 2,\ \ \lambda = -1,$ тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = \frac{\delta_0\sigma}{(1-p)\delta_1}W(x,y,z) + C\delta_0^p\exp\biggl((1-p)\frac{\delta_0}{\delta_1}t\biggr)W^p(x,y,z),$$

где

$$W(x,y,z) = \frac{1}{256\sigma}(55x^2 + 39y^2 + 34z^2 - 30xy - 6\sqrt{30}xz - 10\sqrt{30}yz) - \\ - \frac{1}{3}(5l_1 + \sqrt{30}l_2)x + l_1y + l_2z + \frac{\sigma}{9}(34l_1^2 + 10\sqrt{30}l_1l_2 + 39l_2^2), \tag{23}$$

$p \neq 1,\ \ \delta_0 \neq 0,\ \ \delta_1 \neq 0,\ \ \sigma \neq 0,\ \ C,\ \ l_1,\ \ l_2,\ \ l_3$ – произвольные параметры.

Пример 2. Пусть $n = 3,\ \ m = 2,\ \ \lambda = -1,\ \ \mu_1 = \beta,\ \ \mu_2 = \beta/(2\sigma),\ \ \mu_3 = 2\beta^2/\sigma,$ тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(x,y,z) + \nu a(t), \quad \omega = \psi(t)W(x,y,z) + 1,$$

где

$$\Omega(\omega) = P\omega^2 - (2P+\beta)\omega + \beta - \nu,$$

$$a(t) = \biggl(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\biggr)^{-2}, \quad \psi(t) = \frac{1}{\mu_1}\biggl(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\biggr), \quad f(t) = \biggl(C_2 - \frac{1}{2\sigma}t\biggr)^{-1}, \tag{24}$$

а функция $W(x,y,z)$ определена равенством (23), где $P \neq 0,\ \ \beta \neq 0,\ \ \mu_1 \neq 0,\ \ \mu_2 \neq 0,\ \ \nu > 0,$ $C_2,\ \ l_1,\ \ l_2,\ \ l_3$ – произвольные параметры.

Пример 3. Пусть $n = 3,\ \ m = 2,\ \ \lambda = -1,$ тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частное точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x,y,z,t) = a(t)\Omega(\omega) + f(t)W(x,y,z) + \nu a(t), \quad \omega = \psi(t)W(x,y,z) + \varphi_0,$$

где функция $\Omega(\omega)$ задаётся формулой 1) в (22), а функции $a(t),\ \ \psi(t),\ \ f(t)$ и $W(x,y,z)$ – равенствами (24) и (23) соответственно, здесь $\mu_1 \neq 0,\ \ \mu_2 \neq 0,\ \ \varphi_0 \neq 0,\ \ \nu > 0,\ \ C_2,\ \ l_1,\ \ l_2,$ l_3 – произвольные параметры.

Пример 4. Пусть $n = 3,\ \ m = 3,\ \ \lambda = -5/4,$ тогда уравнение нелинейной теплопроводности (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет частные точные радиально-симметричные решения

$$u_i(x,y,z,t) = a_i(t)\Omega_i(\omega_i) + f_i(t)W_0(x,y,z) + \nu a_i(t), \quad \omega_i = \psi_i(t)W_0(x,y,z) + \varphi_0,$$

где $i = 1,2,$ функции $\Omega_i(\omega)$ задаются соответственно формулами 1) и 2) в (22),

$$a_i(t) = \biggl(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\biggr)^{6i-8}, \quad \psi_i(t) = \frac{1}{\mu_1}\biggl(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\biggr)^{-6i+7}, \quad f_i(t) = \biggl(C_2 + \frac{(-1)^i}{i}\frac{3}{4\sigma}t\biggr)^{-1},$$

$$W_0(x,y,z) = \frac{1}{4\sigma}(x^2+y^2+z^2) + l_1 x + l_2 y + l_3 z + \sigma(l_1^2+l_2^2+l_3^2),$$

где $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$, $\nu > 0$, C_2, l_1, l_2, l_3 – произвольные параметры.

Приведённые примеры достаточно наглядно иллюстрируют новизну полученных результатов. В примерах 1–3 с одинаковым значением параметра $\lambda = -1$ найдены точные решения, представленные функциями различных видов. В примере 1 (вообще говоря, не полиномиальное, поскольку p не обязательно целое) решение имеет степень $2p \neq 2$ по пространственным переменным и экспоненциально зависящие от времени множители. В примере 2 решение является полиномом 4-й степени по пространственным переменным с зависящими от времени коэффициентами, представляющими собой отношение полиномов. В примере 3 решение имеет ту же структуру, что и в примере 2, однако в коэффициентах, отражающих зависимость от времени, степени полиномов другие. Тем самым показано, что предложенный подход позволяет находить для одного и того же многомерного нелинейного уравнения теплопроводности несколько семейств точных решений различной структуры. В примере 4 для значения параметра $\lambda = -5/4$ предъявлено радиально симметричное по пространственным переменным решение, а зависимость от времени выражена через полиномы существенно более высоких степеней, чем в примерах 1–3.

Заключение. В статье методом редукции построены новые многомерные точные решения уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом. Полученные явные выражения для точных многомерных решений, включающих комбинации элементарных функций, могут представлять не только теоретический, но и прикладной интерес, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов [10, 11]. Кроме того, найденные точные решения могут быть полезны при построении для нелинейного уравнения теплопроводности приближённых решений краевых задач, приводящих к необходимости решения систем уравнений высокой размерности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00397).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *King J.R.* Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46. № 3. P. 419–436.
2. *Пухначев В.В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36. № 2. С. 23–31.
3. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М., 2002.
4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
5. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики. В 2-х ч. Ч. 1. М., 2017.
6. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М., 2020.
7. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton; London; New York, 2022.
8. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 796–812.
9. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122.
10. *Галактионов В.А., Самарский А.А.* Методы построения приближённых автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I // Мат. сб. 1982. Т. 118. № 3. С. 291–322.
11. *Ulrich Olivier Dangui-Mbani, Liancun Zheng, Xinxin Zhang.* On analytical solutions for the nonlinear diffusion equation // Amer. J. of Engineering Research. 2014. V. 3. № 9. P. 224–232.

Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 25.06.2021 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.