ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 192–203

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958:536.24

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТВЁРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ И ВЯЗКИМ ГАЗОМ

© 2022 г. Н. В. Малай, Е. Р. Щукин, Д. Н. Ефимцева

Получено приближённое решение краевой задачи для уравнения конвективного теплообмена методом сращиваемых асимптотических разложений при малых значениях чисел Пекле и Рейнольдса. При решении стационарной системы газодинамических уравнений теплообмена, включающей линеаризованную по скорости систему уравнений Навье–Стокса, уравнение конвективного теплообмена и уравнение Пуассона, предполагается, что зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры носят степенной характер.

DOI: 10.31857/S0374064122020066

Введение. Математические исследования процессов переноса, происходящих в аэродисперсных системах, вызваны как теоретическими, так и практическими интересами и в настоящее время представляют собой обширную и быстро развивающуюся область газовой динамики. Явление переноса – это неравновесный процесс, причиной которого являются возмущения системы, нарушающие состояние её термодинамического равновесия. При взаимодействии аэродисперсных систем, имеющих разную температуру, между ними происходит обмен энергией (перенос теплоты). Значение процесса теплообмена в природе и производстве определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое, в свою очередь, само определяется условиями теплообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества и на механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел.

При математическом описании процесса теплообмена вводят безразмерный параметр $\Theta(T)$, характеризующий относительный перепад температуры, под которым понимают отношение разности между средней температурой T_S поверхности частицы и температурой T_∞ области вдали от неё к температуре T_∞, т.е. $\Theta(T) = (T_S - T_\infty)/T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым, если $\Theta(T) \ll 1$, и значительным в противном случае. В первом случае вязкая газообразная среда называется изотермической, а во втором – неизотермической.

Если выполняется условие $\Theta(T) \ll 1$, то решение системы газодинамических уравнений, описывающей процесс теплообмена, существенно упрощается. В частности, коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность газообразной среды можно считать постоянными величинами, а сама система газодинамических уравнений распадается при этом на гидродинамическую (система уравнений Навье–Стокса) и тепловую (уравнение Лапласа и уравнение Пуассона).

В данной работе рассматривается конвективный теплообмен, обусловленный совместным действием двух механизмов переноса тепла – конвекцией и теплопроводностью. В этом случае общее уравнение переноса тепла в вязкой неизотермической газообразной среде имеет в стационарном приближении вид [1, гл. V, с. 232]

$$\rho(x)c_p(x)(\mathbf{U}(x)\nabla)T(x) = \operatorname{div}(\lambda(x)\nabla T(x)) + \Phi(x) + Q(x),$$

где $\mathbf{U}(x)$ – вектор массовой скорости, $T(x)$ – температура, $\rho(x)$ – плотность, $c_p(x)$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности, $\Phi(x)$ – диссипативная функция, учитывающая нагрев среды из-за внутреннего трения, $Q(x)$ – внутреннее тепловыделение в единице объёма среды, ∇ – оператор набла, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

При нахождении решения этого уравнения даже при малых относительных перепадах температуры необходимо знать векторное поле массовой скорости, для чего нужно решить систему уравнений Навье–Стокса. Система уравнений Навье–Стокса, представляющая собой математическое выражение законов сохранения импульса и массы, относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Как известно, при её решении возникают существенные математические трудности, обусловленные наличием конвективного члена ускорения. Поэтому на первый план выходит вопрос не только решения самого конвективного уравнения теплопроводности, но и нахождения решений системы уравнений гидродинамики (системы уравнений Навье–Стокса) и разрешимости краевых задач для этой системы [2].

В газовой динамике вследствие указанных выше проблем разработаны приближённые методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему гидродинамики и приспособить её к характеру отдельных типов конкретных физических задач. В научной литературе имеется обширный класс таких течений, в котором можно пренебречь конвективным членом ускорения в системе уравнений Навье–Стокса. Такие системы уравнений получили название линеаризованных по скорости систем уравнений Навье–Стокса.

К настоящему времени процесс теплообмена между частицей сферической формы и газообразной средой подробно исследован лишь в изотермическом случае (см., например, [3, гл. 4]). В последнее время возрос интерес и к исследованию краевых задач, когда параметр $\Theta(T) \sim O(1)$ (см., например, [4–7]). Однако в этих работах не учитывалось влияние конвективного переноса тепла на поведение взвешенных аэрозольных частиц в аэродисперсных системах.

Отметим, что при описании теплообмена если малы характерная скорость (числа Пекле и Рейнольдса малы) и относительный перепад температуры в газе, то конвективным переносом тепла $(\rho c_p(\mathbf{U}\nabla)T)$ по сравнению с молекулярным переносом $(\operatorname{div}(\lambda\nabla T))$ можно пренебречь. Ситуация существенно меняется, когда относительный перепад температуры в газе значительный, т.е. $\Theta(T) \sim O(1)$ (например, частицу нагрели лазером до $700\,^\circ$C, а температура окружающей её газообразной среды $20\,^\circ$C). Тогда конвективный перенос тепла по порядку величины сравним с молекулярным переносом тепла и его необходимо учитывать при описании аэродисперсных систем. Настоящая работа посвящена исследованию такого случая.

Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия. Рассматривается классическая задача для установившегося процесса теплообмена при обтекании твёрдой неравномерно нагретой частицы сферической формы радиуса R плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \| Oz$, ось Oz направлена горизонтально) при произвольных перепадах температуры. Описание проводится в сферической системе координат (r, φ, θ). При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно оси частицы Oz, проходящей через её центр. Задача осесимметрична (это означает, что все неизвестные функции зависят только от координат r и θ) и формулируется следующим образом.

Задача. Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_\mathrm{e} = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\mathrm{i}$, где Ω_i – сферическая область с центром в нуле евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Требуется найти векторное поле массовой скорости $\mathbf{U}_\mathrm{e}(x) = (U_1^{(\mathrm{e})}(x), U_2^{(\mathrm{e})}(x), U_3^{(\mathrm{e})}(x))$ $(x \in \Omega_\mathrm{e})$ и распределения температур $T_\mathrm{e}(x)$ $(x \in \Omega_\mathrm{e})$ и $T_\mathrm{i}(x)$ $(x \in \Omega_\mathrm{i})$ в газообразной среде и внутри частицы, удовлетворяющие уравнениям:

$$\nabla_k P_\mathrm{e} = \sum_{j=1}^{3} \nabla_j \left[\mu_\mathrm{e} \left(\nabla_j U_k^{(\mathrm{e})} + \nabla_k U_j^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\delta_{jk}(\nabla \cdot \mathbf{U}_\mathrm{e}) \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot (\rho_\mathrm{e} \mathbf{U}_\mathrm{e}) = 0, \tag{2}$$

$$\rho_\mathrm{e} c_{p\mathrm{e}} (\mathbf{U}_\mathrm{e} \cdot \nabla T_\mathrm{e}) = \nabla \cdot (\lambda_\mathrm{e} \nabla T_\mathrm{e}), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\lambda_\mathrm{i} \nabla T_\mathrm{i}) = -q_\mathrm{i}, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $P_\mathrm{e}(x)$ – давление, $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$ – векторный дифференциальный оператор Гамильтона в декартовых координатах, $\nabla_j \equiv \partial/\partial x_j$, $q_\mathrm{i}(x)$ – заданная в Ω_i функция,

определяющая распределение плотности тепловых источников внутри частицы. Здесь и далее индекс e относится к областям $\Omega_{\rm e}$, индекс i относится к области $\Omega_{\rm i}$; индексом ∞ обозначены значения физических величин в невозмущённом потоке (т.е. вдали от частицы) и индексом S – значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности частицы, равной T_S.

Ввиду того, что $\mu_{\rm e}$, $\rho_{\rm e}$, $\lambda_{\rm e}$, $\lambda_{\rm i}$ являются функциями от искомых функций $T_{\rm e}(x)$ и $T_{\rm i}(x)$, система уравнений (1)–(4) в целом является нелинейной. Уравнение (1) в литературе называется стационарным линеаризованным по скорости уравнением Навье–Стокса, (2) – уравнением неразрывности, (3) – уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в области $\Omega_{\rm e}$, а (4) – уравнение Пуассона, описывающее распределение температуры внутри области $\Omega_{\rm i}$ (внутри частицы).

Для решения системы уравнений газовой динамики сделаем следующие физические допущения, реализуемые в большинстве прикладных задач (см., например, [4–6]).

Допущение 1. При описании свойств частицы и газообразной среды рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, теплопроводности и плотности от температуры (см., например, [8, гл. IX, с. 217]):

$$\mu_{\rm e} = \mu_\infty (T_{\rm e}/T_\infty)^\beta, \quad \rho_{\rm e} = \rho_\infty (T_\infty/T_{\rm e}), \quad \lambda_{\rm e} = \lambda_\infty (T_{\rm e}/T_\infty)^\alpha, \quad \lambda_{\rm i} = \lambda_* (T_{\rm i}/T_\infty)^\gamma,$$

где μ_∞, ρ_∞, λ_∞, λ_*, T_∞ – положительные постоянные. В указанных степенных зависимостях показатели заключены в следующих пределах: $0,5 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Допущение 2. Как и в работах [4–6], будем считать, что коэффициент теплопроводности частицы много больше коэффициента теплопроводности газа, что имеет место для большинства реальных газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе частица–газообразная среда (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $T_{\rm e0}(r)$, т.е. $\mu_{\rm e}(T_{\rm e}(r,\theta)) \approx \mu_{\rm e}(T_{\rm e0}(r))$. При этом $T_{\rm e}(r,\theta) = T_{\rm e0}(r) + \delta T_{\rm e}(r,\theta)$, где $\delta T_{\rm e}(r,\theta) \ll T_{\rm e0}(r)$, а $\delta T_{\rm e}(r,\theta)$ и $T_{\rm e0}(r)$ определяются из решения уравнений (3), (4). При таком допущении мы можем рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществлять с помощью граничных условий.

Допущение 3. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

В сферической системе координат (r,θ,φ) система газодинамических уравнений, описывающая распределение скорости и давления вне частицы, имеет следующий вид [1, с. 70–71, 232]:

$$\frac{\partial P_{\rm e}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial y} + \frac{2}{y}\sigma_{rr} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}\sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{y}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial P_{\rm e}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial y} + \frac{3}{y}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{y}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{y}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \tag{6}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \rho_{\rm e} U_r^{\rm (e)}) + \frac{1}{y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \rho_{\rm e} U_\theta^{\rm (e)}) = 0, \tag{7}$$

а уравнения теплопроводности с учётом допущения 1 принимают вид

$$\frac{\rho_\infty c_{p{\rm e}} R}{\lambda_\infty t_{\rm e}}\left(U_r^{\rm (e)}\frac{\partial t_{\rm e}}{\partial y} + \frac{U_\theta^{\rm (e)}}{y}\frac{\partial t_{\rm e}}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 t_{\rm e}^\alpha \frac{\partial t_{\rm e}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(t_{\rm e}^\alpha \sin\theta \frac{\partial t_{\rm e}}{\partial \theta}\right), \tag{8}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 t_{\rm i}^\gamma \frac{\partial t_{\rm i}}{\partial y}\right) + \frac{1}{y^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta t_{\rm i}^\gamma \frac{\partial t_{\rm i}}{\partial \theta}\right) = -\frac{R^2}{\lambda_* T_\infty} q_{\rm i}, \tag{9}$$

где $y = r/R$; $U_r^{\rm (e)}$, $U_\theta^{\rm (e)}$– нормальная и касательные компоненты массовой скорости в сферической системе координат; $t_{\rm e} = T_{\rm e}/T_\infty$, $t_{\rm i} = T_{\rm i}/T_\infty$; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты

тензора напряжений в сферической системе координат, определяемые равенствами [1, гл. II, с. 70]:

$$\sigma_{rr} = \mu_{\mathrm{e}}\left(2\frac{\partial U_r^{(\mathrm{e})}}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{y}\frac{\partial U_\theta^{(\mathrm{e})}}{\partial\theta} + \frac{2}{y}U_r^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{y}U_r^{(\mathrm{e})} + \frac{2}{y}\operatorname{ctg}\theta U_\theta^{(\mathrm{e})} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{U}_{\mathrm{e}}\right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial U_\theta^{(\mathrm{e})}}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial U_r^{(\mathrm{e})}}{\partial\theta} - \frac{U_\theta^{(\mathrm{e})}}{y}\right).$$

Для уравнений теплообмена задаются краевые условия первого и второго рода: на поверхности частицы (при $y = 1$) имеют место равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учётом излучения, а также справедливы следующие стандартные условия при $y \to \infty$ и $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 1} T_{\mathrm{e}}(y,\theta) = \lim_{y\to 1} T_{\mathrm{i}}(y,\theta), \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 1} \lambda_{\mathrm{e}}\frac{\partial T}{\partial y} = \lim_{y\to 1}\left(\lambda_{\mathrm{i}}\frac{\partial T_{\mathrm{i}}}{\partial y} + R\sigma_0\sigma_1(T_{\mathrm{i}}^4 - T_\infty^4)\right), \tag{11}$$

$$\lim_{y\to\infty} P_{\mathrm{e}} = P_\infty, \quad \lim_{y\to\infty} T_{\mathrm{e}} = T_\infty, \quad \lim_{y\to 0}|T_{\mathrm{i}}| < \infty, \tag{12}$$

$$\lim_{y\to\infty}(U_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta) - U_\infty\cos\theta) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}(U_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta) + U_\infty\sin\theta) = 0,$$

где σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты тела, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$. В силу общности постановки задачи граничные условия на поверхности частицы для нормальной $U_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)$ и касательной $U_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta)$ компонент массовой скорости $\boldsymbol{U}_{\mathrm{e}}$ мы не приводим. При математическом описании равномерного движения нагретых частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, нас интересовать не будет. Она может быть гравитационной, магнитной, термофоретической и т.д., что позволит распространить метод решения системы газодинамических уравнений на более широкий класс физических задач.

Компоненты массовой скорости и давления будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Используя свойство полиномов Лежандра и Гегенбауэра, несложно показать, что в случае осесимметричного течения для определения физических величин, его характеризующих, можно ограничиться первыми членами разложений (см. [3, гл. 4, с. 156]). Поэтому будем считать, что

$$V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta) = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta^{(\mathrm{e})}(y,\theta) = -g(y)\sin\theta, \tag{13}$$

где $V_r^{(\mathrm{e})} = U_r^{(\mathrm{e})}/U_\infty$, $V_\theta^{(\mathrm{e})} = U_\theta^{(\mathrm{e})}/U_\infty$, $G(y)$ и $g(y)$ – функции, зависящие от радиальной координаты.

Связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находится из уравнения непрерывности (7) с учётом зависимости плотности газообразной среды от температуры (допущение 1) и имеет следующий вид:

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2}(G'(y) - f(y)G(y)), \quad f(y) = \frac{1}{t_{\mathrm{e}0}(y)}\frac{dt_{\mathrm{e}0}(y)}{dy}. \tag{14}$$

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные μ_∞, ρ_∞, λ_∞ и сохраняющиеся в процессе обтекания частицы постоянные R, T_∞, U_∞. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации – числа Пекле и Рейнольдса, которые считаются малыми величинами. Так как число Пекле выражается через число Рейнольдса, то в качестве малого параметра в задаче используется число Рейнольдса ($\mathrm{Re}_\infty = (\rho_\infty R U_\infty)/\mu_\infty$). Решение уравнений (8), (9) будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [9, гл. 12, с. 291]), при этом ограничимся членами до первого порядка малости (как правило, этого достаточно для физических приложений).

Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ищутся в виде

$$t_{\mathrm{e}}(y,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\varepsilon)t_{\mathrm{e}n}(y,\theta),\quad f_0(\varepsilon)=1, \tag{15}$$

$$t_{\mathrm{e}}^*(\xi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^*(\varepsilon)t_{\mathrm{e}n}^*(\xi,\theta), \tag{16}$$

где $\xi=\varepsilon y$ – "сжатая" радиальная координата [9, гл. 12.3, с. 291]. При этом требуется, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)}\to 0\quad\text{и}\quad\frac{f_{n+1}^*(\varepsilon)}{f_n^*(\varepsilon)}\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0. \tag{17}$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n (см. (17)). Недостающие краевые условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого разложения в некоторую промежуточную область

$$t_{\mathrm{e}}(y\to\infty,\theta)=t_{\mathrm{e}}^*(\xi\to 0,\theta).$$

Асимптотические разложения решения внутри частицы, как показывают краевые условия на поверхности частицы, следует искать в виде, аналогичном (15):

$$t_{\mathrm{i}}(y,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\varepsilon)t_{\mathrm{i}n}(y,\theta).$$

С учётом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_{e}^* (оно получается из уравнения конвективной теплопроводности заменой y на $\xi=\varepsilon y$):

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_{\mathrm{e}}^*}\left(V_r^*\frac{\partial t_{\mathrm{e}}^*}{\partial\xi}+\frac{V_\theta^*}{\xi}\frac{\partial t_{\mathrm{e}}^*}{\partial\theta}\right)=\mathrm{div}^*(t_{\mathrm{e}}^{*\alpha}\nabla^* t_{\mathrm{e}}^*), \tag{18}$$

при этом

$$\mathbf{V}_{\mathrm{e}}^*=\mathbf{n}_z+\varepsilon\mathbf{V}_{\mathrm{e}}^*+\ldots,\quad t_{\mathrm{e}}^*\to 1\quad\text{при}\quad\xi\to\infty,$$

где $\mathrm{Pr}_\infty=\mu_\infty c_p/\lambda_\infty$ – число Прандтля, ∇^* – оператор набла, полученный из оператора ∇ заменой y на ξ и т.д., $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси Oz.

Решения уравнений теплопереноса. Сначала найдём решение уравнения конвективного теплопереноса. Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (16). В данном случае, очевидно, нашей краевой задаче удовлетворяет решение

$$t_{\mathrm{e}0}^*=1. \tag{19}$$

Найдём нулевой член внутреннего разложения (15). При $\varepsilon=0$ из уравнения (8) получим

$$\Delta t_{\mathrm{e}0}^{1+\alpha}=0,$$

и его общее решение имеет вид

$$t_{\mathrm{e}0}=\left[K_0+\frac{\Gamma_0}{y}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(K_n y^n+\frac{\Gamma_n}{y^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\right]^{1/(1+\alpha)}. \tag{20}$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Постоянные интегрирования K_n и Γ_n определяются из условия сращивания, для этого внешнее разложение должно быть разложено в ряд по ξ. Затем значения констант находятся из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\xi \to 0$ и членов разложения (20) при $y \to \infty$. Для нулевых приближений сращивание тривиально: $K_0 = 1$, $\Gamma_n = K_n = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно,

$$t_{\mathrm{e}0} = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}. \tag{21}$$

Постоянная интегрирования K_0 определяется из краевых условий на поверхности частицы ($y = 1$). Для её определения необходимо знать поле температуры внутри частицы (9). Как будет показано ниже, поле температуры $t_{\mathrm{i}}(y,\theta)$ можно искать в виде

$$t_{\mathrm{i}}(y,\theta) = t_{\mathrm{i}0}(y) + \varepsilon t_{\mathrm{i}1}(y,\theta), \tag{22}$$

где

$$t_{\mathrm{i}0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0(y)\,dy + \int\limits_1^y \frac{\psi_0(y)}{y}\,dy\right)^{1/(1+\gamma)}, \quad \psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_*}\frac{1+\gamma}{T_\infty}y^2\int\limits_{-1}^1 q_{\mathrm{i}}\,dx,$$

$$H_0 = \int\limits_1^0 \psi_0(y)\,dy, \quad \psi_1(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_* T_\infty}y^2\int\limits_{-1}^{+1} q_{\mathrm{i}}x\,dx, \quad H_1 = \int\limits_1^0 \psi_1 y\,dy = \frac{R^2}{3\lambda_* T_\infty}J_1, \quad x = \cos\theta,$$

$$t_{\mathrm{i}1}(y,\theta) = \frac{N_0}{t_{\mathrm{i}0}^\gamma} + \frac{\cos\theta}{t_{\mathrm{i}0}^\gamma}\left[B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3}\left(y\int\limits_1^y \frac{\psi_1(y)}{y^2}\,dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1(y)y\,dy\right)\right], \quad J_1 = \frac{1}{V}\int\limits_V q_{\mathrm{i}}z\,dV.$$

Здесь $\int_V q_{\mathrm{i}}z\,dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников [7] и интегрирование ведётся по всему объёму частицы, $V = 4\pi R^3/3$, $z = r\cos\theta$.

Через T_S обозначим среднее значение температуры поверхности частицы ($T_S = t_{\mathrm{i}S}T_\infty$, $t_{\mathrm{i}S} = t_{\mathrm{i}0}$ $(y = 1)$), тогда из краевых условий (10), (11) получим

$$\Gamma_0 = \left(\frac{T_S}{T_\infty}\right)^{1+\alpha} - 1, \quad \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\frac{\lambda_{\mathrm{e}S}}{\lambda_{\mathrm{i}S}}t_{\mathrm{e}S} = \frac{R^2}{3\lambda_{\mathrm{i}S}T_\infty}J_0 - \sigma_0\sigma_1\frac{RT_\infty^3}{\lambda_{\mathrm{i}S}}(t_{\mathrm{i}S}^4 - 1),$$

где

$$\lambda_{\mathrm{e}S} = \lambda_\infty t_{\mathrm{e}S}^\alpha, \quad \lambda_{\mathrm{i}S} = \lambda_* t_{\mathrm{i}S}^\gamma, \quad t_{\mathrm{e}S} = t_{\mathrm{e}0} \quad (y = 1),$$

$$\ell^{(S)} = \ell \quad (y = 1), \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad J_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\int\limits_V q_{\mathrm{i}}\,dV.$$

Найдём первые приближения для внешней температуры. Для членов первого приближения внешнего разложения в силу представления (16) имеем

$$t_{\mathrm{e}}(\xi,\theta) = 1 + f_1^*(\varepsilon)t_{\mathrm{e}1}^*(\xi,\theta).$$

Найдём явный вид коэффициента $f_1(\varepsilon)$. Для этого перейдём в решении (21) к внешней переменной. Видим, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$, тогда

$$t_{\mathrm{e}}(\xi,\theta) = 1 + \varepsilon t_{\mathrm{e}1}^*(\xi,\theta). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) для t_{e} в уравнение (18) и удерживая члены порядка ε, получаем следующее уравнение:

$$\mathrm{Pr}_\infty\left(x\frac{\partial t_{\mathrm{e}1}^*}{\partial\xi} + \frac{1-x^2}{\xi}\frac{\partial t_{\mathrm{e}1}^*}{\partial x}\right) = \Delta^* t_{\mathrm{e}1}^* \quad \text{при} \quad \xi \to \infty, \quad t_{\mathrm{e}1}^* \to 0. \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид

$$t_{\mathrm{e}1}^{*}=\exp\left\{\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}x\xi\right\}\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}L_nK_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right)P_n(x),$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}\xi\right\}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!m!(\mathrm{Pr}_\infty\xi)^m}.$$

Здесь $\left(\frac{\pi}{\mathrm{Pr}_\infty\xi}\right)^{1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\infty\xi}{2}\right)$ – модифицированная функция Бесселя [10, с. 398]. Постоянные интегрирования L_n определяются из условия сращивания: $L_0=(\mathrm{Pr}_\infty\Gamma_0)/(\pi(1+\alpha))$ и $L_n=0$ при $n\geqslant 1$. Следовательно,

$$t_{\mathrm{e}1}^{*}(\xi,\theta)=\frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi}\exp\left\{-\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{2}\xi(1-\cos\theta)\right\}. \tag{25}$$

Найдём первое приближение для внутреннего разложения (15). Из формулы (25) видно, что $f_1(\varepsilon)=\varepsilon$, и тогда

$$t_{\mathrm{e}}(y,\theta)=t_{\mathrm{e}0}(y)+\varepsilon t_{\mathrm{e}1}(y,\theta). \tag{26}$$

Подставляя выражение (26) для t_{e} в уравнение (8), приходим к уравнению для функции $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$:

$$\frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_{\mathrm{e}0}(y)}V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)\frac{\partial t_{\mathrm{e}0}(y)}{\partial y}=\operatorname{div}\left(t_{\mathrm{e}0}^{\alpha}(y)\nabla t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)+\alpha t_{\mathrm{e}0}^{\alpha-1}(y)t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)\nabla t_{\mathrm{e}0}(y)\right). \tag{27}$$

Чтобы определить поведение $t_{\mathrm{e}1}(y\to\infty,\theta)$ (т.е. краевое условие), срастим двучленные внутреннее и внешнее разложения, имеем:

$$t_{\mathrm{e}1}(y\to\infty,\theta)=\frac{\omega_1}{2}(\cos\theta-1),\quad \omega_1=\frac{\Gamma_0\mathrm{Pr}_\infty}{1+\alpha}. \tag{28}$$

Из уравнения (27) видно, что для нахождения первого приближения $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$ для внутреннего разложения необходимо знать компоненты поля массовой скорости. Для их определения поступим аналогично тому, как это сделано в [4, 5]. Учитывая решение (21) и допущение 2, заключаем, что зависимость динамической вязкости от температуры имеет вид

$$\mu_{\mathrm{e}}(y,\theta)=\mu_\infty\left(1+\frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\beta(1+\alpha)}. \tag{29}$$

Продифференцируем уравнение (5) по переменной θ и уравнение (6) по переменной y, затем, подставляя в получившиеся уравнения представления (13) и учитывая соотношения (14) и (29), после очевидных преобразований получим для функции $G(y)$ на полуинтервале $[1,\infty)$ следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$[\ell^3-3\ell^4+3\ell^5-\ell^6]\frac{d^3G(\ell)}{d\ell^3}+[2\ell^2-\ell^3(10+\gamma_1)+2\ell^4(7+\gamma_1)-\ell^5(6+\gamma_1)]\frac{d^2G(\ell)}{d\ell^2}-$$

$$-[6\ell-\ell^2(2-2\gamma_1-\gamma_2)-\ell^3(10+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+\ell^4(6+2\gamma_1+\gamma_3)]\frac{dG(\ell)}{d\ell}+$$

$$+\gamma_3\ell^2(2-\ell)G(\ell)=\frac{d}{\Gamma_0}\ell(1-\ell)^{\gamma_4^*}, \tag{30}$$

в котором

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_1 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}, \quad \gamma_4^* = \frac{\beta}{1+\alpha} - 1, \quad d = \mathrm{const},$$

$$1 < y < \infty, \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y+\Gamma_0},$$

с краевым условием

$$\lim_{y\to\infty} G(y) = 1. \tag{31}$$

Далее будем называть однородным уравнением (30) уравнение (30) с нулевой правой частью. Найдём решение однородного уравнения (30). Точка $\ell = 0$ является для него регулярной особой точкой, поэтому его решение будем искать в виде обобщённого степенного ряда [10, гл. V, с. 101; 11, гл. IV, с. 146]:

$$G(\ell) = \ell^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \ell^n, \quad \alpha_0 \neq 0. \tag{32}$$

Подставляя ряд (32) в однородное уравнение (30) и приравнивая коэффициент при y^ρ к нулю, получаем определяющее уравнение $\rho(\rho-3)(\rho+2) = 0$, корни которого $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = -2$. Большему из этих корней отвечает решение

$$G_1(y) = \ell^3 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(1)} \ell^n, \quad \alpha_0^{(1)} \neq 0. \tag{33}$$

Подставляя ряд (33) в однородное уравнение (30) и используя метод неопределённых коэффициентов, приходим к следующей рекуррентной формуле для нахождения коэффициентов $\alpha_n^{(1)}$ $(n \geqslant 1)$:

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)}\{(n+2)[(n+1)(3n+10+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(1)} -$$

$$- [(n+1)(n(3n+11+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(1)} +$$

$$+ [n((n-1)(n+4+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(1)}\}.$$

Второе решение $G_3(\ell)$ однородного уравнения (30), отвечающее корню $\rho_2 = 0$, имеет вид

$$G_3(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(3)} \ell^n + \omega_3^* G_1(\ell) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \alpha_0^{(3)} \neq 0, \quad \ell_0 = \ell \quad (y = 1), \tag{34}$$

где коэффициенты $\alpha_n^{(3)}$ $(n \geqslant 3)$ определяются следующей рекуррентной формулой:

$$\alpha_n^{(3)} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)}\{(n-1)[(n-2)(3n+1+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(3)} -$$

$$- [(n-2)((n-3)(3n+2+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(3)} +$$

$$+ [(n-3)((n-4)(n+1+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(3)} - \omega_3^* S_{n-3}^{(1)}\},$$

$$S_n^{(1)} = (3n^2+16n+15)\alpha_n^{(1)} - (9n^2+18n+(10+\gamma_1)(2n+3)+2\gamma_1+\gamma_2)\alpha_{n-1}^{(1)} +$$

$$+ (9n^2+7+(14+2\gamma_1)(2n+1)+4\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\alpha_{n-2}^{(1)} - (3n^2-6n+8+(6+\gamma_1)(2n-1)+2\gamma_1+\gamma_3)\alpha_{n-3}^{(1)}.$$

Третье решение однородного уравнения (30), линейно независимое с решениями $G_1(\ell)$, $G_3(\ell)$ и соответствующее корню определяющего уравнения $\rho_3 = -2$, мы не приводим, поскольку оно не удовлетворяет краевому условию (31).

Исходя из вида правой части неоднородного уравнения (30), его частное решение ищем в виде

$$G(\ell) = A_2 G_2(\ell), \quad G_2(\ell) = \ell \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(2)} \ell^n + \omega_2^* G_1(\ell) \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \alpha_0^{(2)} \neq 0, \quad A_2 = \text{const}. \tag{35}$$

Поступая аналогичным образом, имеем рекуррентные формулы для коэффициентов $\alpha_n^{(2)}$ $(n \geqslant 3)$:

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \Big\{ n[(n-1)(3n+4+\gamma_1) - 2 + 2\gamma_1 + \gamma_2]\alpha_{n-1}^{(2)} -$$

$$- [(n-1)((n-2)(3n+5+2\gamma_1) + 10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2\gamma_3]\alpha_{n-2}^{(2)} +$$

$$+ [(n-2)((n-3)(n+2+\gamma_1) + 6 + \gamma_3 + 2\gamma_1) + \gamma_3]\alpha_{n-3}^{(2)} - \omega_2^* S_{n-2}^{(1)} + \frac{d}{\Gamma_0}(-1)^n \frac{\gamma_4^*!}{(\gamma_4^* - n)!n!} \Big\}.$$

Здесь

$$\omega_2^* = \frac{1}{15\alpha_0^{(1)}}[(16 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2)\alpha_1^{(2)} - (10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 + 3\gamma_4^*(\gamma_4^* - 1))\alpha_0^{(2)}],$$

$$\frac{d}{\Gamma_0} = -6\alpha_0^{(2)}, \quad \alpha_1^{(2)} = -\frac{\alpha_0^{(2)}}{6}(-2 + 2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4^*), \quad \alpha_2^{(2)} = 1, \quad \alpha_1^{(3)} = 0, \quad \alpha_3^{(3)} = 1,$$

$$\omega_3^* = \frac{\gamma_3}{15\alpha_0^{(1)}}[(16 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2)\alpha_1^{(2)} - (10 + 4\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3 + 3\gamma_4^*(\gamma_4^* - 1))\alpha_0^{(2)}],$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{\gamma_3}{4}\alpha_0^{(3)}, \quad \alpha_n^{(k)} = 0, \quad \text{если} \quad n < 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Таким образом, общее решение уравнения (30) имеет вид

$$G(\ell) = A_1 G_1(\ell) + A_2 G_2(\ell) + A_3 G_3(\ell), \tag{36}$$

где функции $G_1(\ell)$, $G_2(\ell)$ и $G_3(\ell)$ задаются формулами (33), (35) и (34) соответственно, а входящие в них коэффициенты определяются следующими после этих формул равенствами.

Заметим, что функция $G(\ell)$ удовлетворяет уравнению (30) по построению. Ряды, определяющие функции $G_k(\ell)$, $k = 1, 2, 3$, равномерно сходятся при всех $1 \leqslant y < \infty$ $(\ell(y) = \Gamma_0/(y + \Gamma_0))$.

Учитывая явный вид коэффициентов $\alpha_n^{(1)}$, введём в рассмотрение мажорирующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(1)} \ell^n, \tag{37}$$

в котором коэффициенты $\beta_n^{(1)}$ неотрицательны и определяются рекуррентной формулой

$$\beta_n^{(1)} = 3\beta_{n-1}^{(1)} + 3\beta_{n-2}^{(1)} + \beta_{n-3}^{(1)},$$

где $\beta_{-2}^{(1)} = \beta_{-1}^{(1)} = \beta_0^{(1)} = \beta$, $\beta > 0$ – достаточно большое число.

Тогда имеем следующую оценку:

$$\beta_n^{(1)} \leqslant 7^n \beta.$$

Следовательно, ряд (37) сходится при $7\ell < 1$ ($\ell < 1/7$ или $y > 6\Gamma_0$, $\Gamma_0 = (T_s/T_\infty)^{1+\alpha} - 1$). Так как коэффициенты дифференциального уравнения (30) аналитичны при $1 \leqslant y < \infty$, то в силу принципа аналитического продолжения решение этого уравнения ряд (37) не может иметь особых точек при всех $1 \leqslant y < \infty$. Таким образом, ряд (33) сходится при всех $1 \leqslant y < \infty$. Аналогично устанавливается равномерная сходимость рядов, определяющих функции $G_2(\ell)$, $G_3(\ell)$.

В результате проведённого исследования доказана следующая

Теорема 1. *Общее решение уравнения (30) имеет вид (36), где коэффициенты A_1, A_2, A_3 – произвольные постоянные, а функции $G_1(\ell)$, $G_2(\ell)$, $G_3(\ell)$ задаются формулами (33), (35), (34).*

Отметим, что выбор постоянных $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_0^{(2)}$, $\alpha_0^{(3)}$ осуществляется таким образом, чтобы выполнялся предельный переход к задаче обтекания сфере при малых относительных перепадах температуры. Для этого удобно перейти от переменной ℓ к переменной y. Тогда имеем

$$G(y) = A_1G_1(y) + A_2G_2(y) + A_3G_3(y),$$

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\ell^n, \quad G_2(y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\ell^n + \omega_2 G_1(y)\ln y, \quad G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)}\ell^n + \omega_3 G_1(y)\ln y,$$

$$C_n^{(1)} = \Gamma_0^3(1-\ell)^3\alpha_n^{(1)}, \quad C_n^{(2)} = \Gamma_0(1-\ell)\alpha_n^{(2)}, \quad C_n^{(3)} = \alpha_n^{(3)},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_2^*}{\ln(\Gamma_0(1-\ell)/\ell)}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right), \quad \omega_3 = \frac{\omega_3^*}{\ln(\Gamma_0(1-\ell)/\ell)}\ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right).$$

В этом случае функции $G_1(y)$, $G_2(y)$, $G_3(y)$ стремятся к соответствующим функциям для сферы при малых относительных перепадах температуры [2, с. 144; 3, с. 83]. При $\Gamma_0 \to 0$ имеем

$$G_1(y) \to \frac{1}{y^3}, \quad G_2(y) \to \frac{1}{y}, \quad G_3(y) \to 1,$$

откуда видим, что $C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = C_0^{(3)} = 1$, $A_3 = 1$.

Зная общее решение уравнения (30) и связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$, получаем выражения для компонент векторного поля скорости $\mathbf{U}_{\mathrm{e}}(x)$:

$$V_r(y,\theta) = \cos\theta\Big[A_1G_1(y) + A_2G_2(y) + G_3(y)\Big], \tag{38}$$

$$V_\theta(y,\theta) = -\sin\theta\Big[A_1G_4(y) + A_2G_5(y) + G_6(y)\Big], \tag{39}$$

где

$$G_k(y)\left(1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)}\right)G_{k-3}(y) + \frac{y}{2}G'_{k-3}(y) \quad (k = 4, 5, 6).$$

Таким образом, в работе для линеаризованной по скорости стационарной системы уравнений Навье–Стокса при степенной зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры получено приближённое решение, удовлетворяющее краевому условию (31).

Поскольку нами получены выражения для компонентов массовой скорости, мы можем решить уравнение (27), удовлетворяющее краевому условию (28). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$t_{\mathrm{e}1}(y,\theta) = \zeta(y) + \frac{1}{t_{\mathrm{e}0}^{\alpha}}\tau_{\mathrm{e}}(y)\cos\theta \tag{40}$$

с краевыми условиями

$$\zeta(y\to\infty) \to -\frac{\omega_1}{2}, \quad \tau_{\mathrm{e}}(y\to\infty) \to \frac{\omega_1}{2}. \tag{41}$$

Подставляя представление (40) в уравнение (27) и учитывая, что

$$V_r^{(\mathrm{e})}(y,\theta)=\cos\theta(A_1G_1(y)+A_2G_2(y)+G_3(y)),\quad t_{\mathrm{e}0}(y)=(1+\Gamma_0/y)^{1/(1+\alpha)},$$

для нахождения функции τ_{e} получаем линейное обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\tau_{\mathrm{e}}}{dy^2}+\frac{2}{y}\frac{d\tau_{\mathrm{e}}}{dy}-\frac{2}{y^2}\tau_{\mathrm{e}}=-\omega_1\frac{\ell}{y\Gamma_0}(A_1G_1(y)+A_2G_2(y)+G_3(y)),$$

решение которого ищется стандартным способом.

Таким образом, имеем следующее выражение для функции $t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)$, удовлетворяющее краевым условиям (41):

$$t_{\mathrm{e}1}(y,\theta)=\frac{\omega_1}{2yt_{\mathrm{e}0}^{\alpha}(y)}(N_1-y)+\frac{\cos\theta}{t_{\mathrm{e}0}^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma_1}{y^2}+\frac{\omega_1}{3}\left(\tau_3(y)+A_2\frac{\tau_2(y)}{y}-A_1\frac{\tau_1(y)}{y^3}\right)\right]. \tag{42}$$

Здесь

$$\tau_1(y)=(1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(1)}\ell^n}{n+1}-\frac{(1-\ell)^4}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(3)}\ell^n}{n+4},$$

$$\tau_2(y)=\frac{1}{1-\ell}\left[1+\ell\ln\ell+C_1^{(2)}(\ell^2-\ell\ln\ell)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}\ell^n}{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\ell\right)\right]+$$

$$+(1-\ell)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(4)}\ell^n}{n+2}+\frac{\omega_2(1-\ell)}{y^2}S_n^{(2)},$$

$$\tau_3(y)=\frac{1}{(1-\ell)^2}\left[\frac{1}{2}-2\ell-\ell^2\ln\ell+C_1^{(3)}(\ell+2\ell^2\ln\ell-\ell^3)+C_2^{(3)}\left(-\frac{1}{2}-\ell^2\ln\ell+2\ell^3\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{C_n^{(3)}\ell^n}{n-2}\left(1+\frac{n-2}{n}\ell^2-2\frac{n-2}{n-1}\ell\right)\right]+(1-\ell)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega_n^{(6)}\ell^n}{n+1}+\frac{\omega_3}{y^3}(1-\ell)S_n^{(2)},$$

$$\Omega_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n}C_k^{(1)},\quad \Omega_n^{(3)}=\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)C_k^{(1)},$$

$$\Omega_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(1)}}{k+1},\quad \Omega_n^{(6)}=\sum_{k=0}^{n}C_k^{(3)},\quad \Omega_n^{(5)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega_k^{(3)}}{k+4},$$

$$\Theta_n^{(1)}=\Omega_n^{(2)}+\Omega_n^{(1)}\ln y,\quad \Theta_n^{(2)}=\Omega_n^{(5)}+\Omega_n^{(3)}\ln y,\quad \Omega_n^{(4)}=\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)C_k^{(2)},$$

$$S_n^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell^n}{6(n+4)}\left[(1-\ell)^3\Theta_n^{(2)}-6\frac{n+4}{n+1}\Theta_n^{(1)}\right].$$

Теорема 2. *Распределения температур* $T_{\mathrm{e}}(x)$ $(x\in\Omega_{\mathrm{e}})$ *и* $T_{\mathrm{i}}(x)$ $(x\in\Omega_{\mathrm{i}})$, *где* $\Omega_{\mathrm{e}}=\mathbb{R}^3\setminus\Omega_{\mathrm{i}}$ (Ω_{i} *– сферическая область с центром в нуле евклидова пространства* $\mathbb{R}^3$) *в газообразной среде и внутри частицы, удовлетворяющие уравнениям (3), (4) и краевым условиям (10)–(12), имеют вид (22), (42).*

Постоянные интегрирования A_1, A_2, входящие в выражения (38), (39) и поле температуры $t_{\mathrm{e}}(y,\theta)$, определяются из краевых условий для компонент массовой скорости (нормальной $U_r^{(\mathrm{e})}$ и касательной $U_\theta^{(\mathrm{e})}$) на поверхности частицы. Эти краевые условия определяются конкретной

физической задачей. При математическом описании процесса теплообмена между движущейся нагретой частицей и вязкой неизотермической газообразной средой (в системе координат, связанной с частицей, имеем задачу обтекания) природа сил, вызывающих это движение, может быть гравитационной, магнитной, фотофоретической, термофоретической и т.д., что позволяет распространить разработанный метод решения системы газодинамических уравнений на широкий класс физических задач.

Полученные выше формулы можно использовать и при малых относительных перепадах температуры, т.е. когда величина нагрева поверхности частицы мала. В этом случае средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей газообразной среды вдали от неё и при $\Gamma_0 \to 0$ $(y = 1)$ имеем

$$G_1 = 1, \quad G_1' = 1, \quad G_1'' = 12, \quad G_2 = 1, \quad G_2' = -1, \quad G_2'' = 2, \quad G_3 = 1, \quad G_3' = 0, \quad G_3'' = 0,$$
$$\tau_1 = 3/4, \quad \tau_1' = 0, \quad \tau_2 = 3/2, \quad \tau_2' = 0, \quad \tau_3 = 3/2, \quad \tau_3' = 0.$$

Качественный анализ показывает (см. формулу (42)), что величина конвективного переноса тепла пропорциональна коэффициенту $\omega_1 = \Gamma_0 \mathrm{Pr}_\infty/(1+\alpha)$ (при прочих равных условиях). Для большинства газов число Прандтля имеет порядок единица, а $\Gamma_0 = (T_S/T_\infty)^{(1+\alpha)} - 1$. Следовательно, $\omega_1 \sim \Gamma_0$, т.е. чем сильнее нагрета частица, тем значительнее вклад конвективного переноса тепла.

Заключение. В работе получено приближённое решение стационарной системы газодинамических уравнений, описывающей конвективный теплообмен между движущейся неравномерно нагретой крупной твёрдой частицей сферической формы и вязкой неизотермической газообразной средой при малых значениях чисел Пекле и Рейнольдса. При описании теплообмена предполагалось, что зависимости коэффициентов теплопроводности, вязкости и плотности газообразной среды от температуры имеют степенной характер. Получено приближённое решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса (теорема 1). Методом сращиваемых асимптотических разложений найдено решение уравнения теплопроводности, описывающего поле температуры вне частицы, и методом теории возмущений – решение уравнения Пуассона, описывающего поле температуры внутри частицы (теорема 2). Нулевые приближения внутренних и внешних асимптотических разложений определяются формулами (19), (21), а первые приближения – формулами (25), (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М., 1954.
2. *Ладыженская О.А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса. Существование и гладкость // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58. Вып. 2 (350). С. 44–78.
3. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., 1960.
4. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р.* Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1328–1338.
5. *Малай Н.В., Глушак А.В., Щукин Е.Р.* Решение краевой задачи медленного обтекания сферы неизотермическим газом // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 54–65.
6. *Малай Н.В., Щукин Е.Р.* Термофорез нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы // Прикл. механика и техн. физика. 2019. Т. 60. № 3 (355). С. 136–145.
7. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А.* Термофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Журн. техн. физики. 2012. Т. 82. № 10. С. 42–49.
8. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., 1966.
9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущения. М., 1984.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2003.
11. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Объединённый институт высоких температур РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.