ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 204–222

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ВАРИАНТ РЯДА ФУРЬЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИСПАРЕНИЯ КАПЛИ ВОДЫ

© 2022 г. Х. Халласи, Х. Фуджита-Яшима

Рассматривается краевая задача для системы двух линейных уравнений в частных производных параболического типа, описывающей поведение температуры и плотности пара в сферической капле и её окрестности при процессе испарения. Для её изучения построен вариант ряда Фурье в сферической области для функций со сферической симметрией. С помощью этого ряда доказываются существование и единственность решения рассматриваемой задачи с характерным для испарения необычным условием связи уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122020078

Введение. Как хорошо известно (см., например, [1, пп. 180–182; 2, пп. 157, 158; 3, § 17]), решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в ограниченной области можно представить, используя ряд Фурье, в виде ряда по ортонормированной системе функций, умноженных на подходящие коэффициенты. В частности, если уравнение рассматривается на отрезке или на сфере со сферической симметрией, то ортонормированными функциями являются тригонометрические функции или функции типа $r^{-1}\sin(kr)$. Изучению уравнений аналогичного типа и вариантов условий посвящены многочисленные статьи и монографии, в том числе такие классические как [3–5].

В работе [6] мы рассматривали систему двух линейных уравнений в частных производных параболического типа, описывающих поведение температуры в воде и в воздухе и плотности пара в воздухе при наличии испарения, и, пользуясь соответствующим рядом Фурье, доказали существование и единственность решения граничной задачи для этой системы в области, ограниченной двумя горизонтальными плоскостями.

В настоящей работе, используя идеи [6], изучается аналогичная задача в сферической области. Эта задача соответствует описанию поведения температуры и плотности водяного пара при испарении с поверхности капли воды (в фазе, когда изменение объёма капли достаточно мало по сравнению с объёмом капли). Напомним, что явление испарения капли (не обязательно водяной) интересует инженеров с точки зрения его промышленного применения. Теоретические исследования в рамках математической физики проводились, например, в [7–11].

В данной работе будем предполагать, что водяная капля является сферической и заполняет открытый шар $\Omega_{0,a}$ радиуса a, а в качестве её воздушной окружающей среды рассматривается прилегающий к ней открытый сферический слой $\Omega_{a,b}$, внутренний и внешний радиусы которого a и b соответственно. В предположении сферической симметрии функций будем рассматривать линейное параболическое уравнение для температуры T в занятом водой и воздухом открытом шаре $\Omega_{0,b} = \overline{\Omega_{0,a}} \bigcup \Omega_{a,b}$ и линейное параболическое уравнение для плотности Π пара в занятой воздухом области $\Omega_{a,b}$. Будем предполагать, что в уравнении для T источник тепла сосредоточен на сфере $\{r = a\}$ – границе раздела водной и воздушной сред – и пропорционален величине $\varepsilon_1^{-1}[\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}]$ с некоторым $\varepsilon_1 > 0$ (см. ниже (1.3)). Это предположение соответствует скрытой теплоте испарения (см., например, [12]) и используемому на практике приближению для количества испарившейся воды (см., например, [13, 14]). Будем предполагать также, что функция Π удовлетворяет условию

$$\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T|_{r=a},$$

где $\overline{\pi}_0$ и $\overline{\alpha}_1$ – постоянные (см. ниже (1.7)). Это условие представляет собой линеаризацию соотношения $\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_{\mathrm{vs}}(T)$ между плотностью $\overline{\pi}_{\mathrm{vs}}(T)$ насыщенного пара и температурой T (см., например, [12]).

Технически наши рассуждении основаны на использовании ряда Фурье, построенного по системе собственных функций оператора диффузии. В частности, используются свойства этих функций, полученные с помощью анализа их явного выражения. Отметим, что оператор диффузии в нашем случае имеет кроме особенности в $r = 0$ различные коэффициенты в $\Omega_{0,a}$ и в $\Omega_{a,b}$, что значительно усложняет исследование задачи.

Применяя этот вариант ряда Фурье к нашей системе уравнений, с помощью оценок мы докажем существование и единственность решения нашей задачи.

1. Постановка задачи. Для вектора $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^3$ через r обозначим его евклидову норму, т.е. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Зафиксируем положительные числа $a < b$ и в областях $\Omega_{0,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant r < a\}$ и $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < r < b\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\nu \partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{в} \quad \Omega_{0,b}, \tag{1.1}$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \Delta \Pi \quad \text{в} \quad \Omega_{a,b}, \tag{1.2}$$

где число ψ задаётся соотношением

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1}, \tag{1.3}$$

здесь γ_0, γ_1, ε_1 – положительные постоянные, причём $0 < \varepsilon_1 < b - a$, а $\delta(\cdot)$ – δ-функция Дирака. Предположим, что

$$\nu(x) = \nu_1 \quad \text{при} \quad 0 < r < a, \quad \nu(x) = \nu_2 \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{1.4}$$

$$\kappa(x) = \kappa_1 \quad \text{при} \quad 0 < r < a, \quad \kappa(x) = \kappa_2 \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{1.5}$$

где ν_1, κ_1, ν_2, κ_2 – положительные постоянные. Для искомых функций T и Π будем рассматривать граничные условия

$$T|_{r=b} = \overline{T}_b, \tag{1.6}$$

$$\Pi|_{r=a} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T|_{r=a}, \tag{1.7}$$

$$\Pi|_{r=b} = \overline{\Pi}_b, \tag{1.8}$$

где $\overline{T}_b$, $\overline{\Pi}_b$ и $\overline{\pi}_0$, $\overline{\alpha}_1$ – заданные постоянные.

Как сказано выше, функция T описывает температуру, а Π – плотность пара. В этой интерпретации γ_0 – коэффициент диффузии пара в воздухе, κ_i $(i = 1, 2)$ – коэффициент теплопроводности в воде $(i = 1)$ и в воздухе $(i = 2)$, ν_i $(i = 1, 2)$ – произведение $c_{\mathrm{v}\,i}\varrho_i$ удельной теплоёмкости $c_{\mathrm{v}\,i}$ и плотности ϱ_i в воде $(i = 1)$ и в воздухе $(i = 2)$.

Напомним выражение оператора Лапласа для функций со сферической симметрией (в $\mathbb{R}^3$).

Лемма 1.1. *Если функция $u(x)$ принадлежит классам $C^2(\Omega_{0,a})$ или $C^2(\Omega_{a,b})$ и зависит только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, то оператор Лапласа от такой функции можно вычислять по формуле*

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} u(r) \right).$$

Доказательство следует непосредственно из правила вычисления производных.

Поэтому в предположении сферической симметрии функций $T(t, \cdot)$ и $\Pi(t, \cdot)$ уравнения (1.1), (1.2) сводятся к уравнениям

$$\nu \partial_t T = \partial_r (r^2 \kappa(r) \partial_r T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times]0, b[, \tag{1.9}$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \Pi) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+ \times]a, b[. \tag{1.10}$$

Определения (1.3)–(1.5) функций ψ, ν, κ и граничные условия (1.6)–(1.8), поскольку все они зависят только от r, остаются неизменными.

В дальнейшем рассмотрим систему уравнений (1.9), (1.10), (1.3) с граничными условиями (1.6)–(1.8) и начальными условиями

$$T\,|_{t=0}= T_0(r) \quad \text{при} \quad 0 < r < b, \tag{1.11}$$

$$\Pi\,|_{t=0}= \Pi_0(r) \quad \text{при} \quad a < r < b, \tag{1.12}$$

где $T_0(r)$ и $\Pi_0(r)$ – заданные функции. Требуется также выполнение условий согласования

$$T_0(b) = \overline{T}_b, \quad \Pi_0(a) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T_0(a), \quad \Pi_0(b) = \overline{\Pi}_b.$$

2. Некоторые предварительные замечания. Для изучения задачи (1.9), (1.10), (1.3), (1.6)–(1.8), (1.11), (1.12) нам понадобятся некоторые гильбертовы пространства, которые введём в этом пункте работы и отметим их нужные в дальнейшем свойства. Именно, определим следующие пространства:

$$\widetilde{L}^2_\nu(0,b) = \left\{\varphi : (0,b) \to \mathbb{R} \ \text{ измеримы и } \ \int\limits_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2 dr < \infty\right\},$$

$$\widetilde{H}^1_\kappa(0,b) = \left\{\varphi \in \widetilde{L}^2_\nu(0,b) \ \text{ такие, что } \ \int\limits_0^b \kappa(r) r^2 \left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2 dr < \infty \ \text{ и } \ \varphi(b) = 0\right\},$$

$$\widetilde{L}^2(a,b) = \left\{\varphi : (a,b) \to \mathbb{R} \ \text{ измеримы и } \ \int\limits_a^b r^2 |\varphi(r)|^2\, dr < \infty\right\},$$

$$\widetilde{H}^1(a,b) = \left\{\varphi \in \widetilde{L}^2(a,b) \ \text{ такие, что } \ \int\limits_a^b r^2 \left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2 dr < \infty \quad \text{и} \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} = \int\limits_0^b \nu(r) r^2 u(r) v(r)\, dr, \quad \langle u, v\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \int\limits_0^b \kappa(r) r^2 \frac{du(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}\, dr,$$

$$\langle u, v\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)} = \int\limits_a^b r^2 u(r) v(r)\, dr, \quad \langle u, v\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)} = \int\limits_a^b r^2 \frac{du(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}\, dr \tag{2.1}$$

соответственно и нормой, порождённой указанным скалярным произведением.

Напомним элементарные свойства этих гильбертовых пространств.

Лемма 2.1. *Вложение пространства* $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ *в пространство* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *компактно.*

Доказательство. Зададим отображение J равенством

$$J(\varphi)(x) = \varphi(|x|), \quad x \in \Omega_{0,b},$$

для определённых на $]0,b[$ функций φ. Тогда для любой измеримой функции φ, определённой на $]0,b[$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_{0,b}} J(\nu)(x) |J(\varphi)(x)|^2\, dx = 4\pi \int\limits_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2\, dr, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{\Omega_{0,b}} J(\kappa)(x)|\nabla J(\varphi)(x)|^2\,dx = 4\pi\int\limits_0^b \kappa(r)r^2\left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2 dr. \tag{2.3}$$

Пусть M – ограниченное множество в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Из равенства (2.3) и оценок $0<\kappa_1\leqslant \leqslant J(\kappa)(x)\leqslant\kappa_2<\infty$ следует, что множество

$$J(M)=\{v=J(u): u\in M\}$$

ограниченно в обычном пространстве Соболева $H^1_0(\Omega_{0,b})$. В силу компактности вложения $H^1_0(\Omega_{0,b})$ в $L^2(\Omega_{0,b})$ существует сходящаяся в $L^2(\Omega_{0,b})$ подпоследовательность $\{J(u_k)\}_{k=1}^\infty$. Из равенства (2.2) и оценок $0<\nu_1\leqslant J(\nu)(x)\leqslant\nu_2<\infty$ вытекает, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ сходится в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$. Следовательно, вложение $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ компактно. Лемма доказана.

Так как вложение $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ компактно, существует ортонормальный базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Свойства этого ортонормального базиса играют важную роль в наших рассуждениях в следующем пункте работы.

С другой стороны, известно (см., например, [15, гл. 3, § 5.4]), что вложение $\widetilde{H}^1(a,b)$ в $\widetilde{L}^2(a,b)$ компактно и существует ортонормальный базис $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$. Явное выражение для функций d_k указано в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$d_k(r)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\quad \textit{при}\quad a\leqslant r\leqslant b,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

(A′) Семейство $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ является ортонормальным базисом пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$ и ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$.

(B′) Справедливо равенство

$$\|d_k\|^2_{\widetilde{H}^1(a,b)}=k^2\pi^2/(b-a)^2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как вложение $\widetilde{H}^1(a,b)$ в $\widetilde{L}^2(a,b)$ компактно, существуют ортонормальный базис $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2(a,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$, и последовательность положительных чисел $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$, которые удовлетворяют соотношению

$$\langle d_k,\varphi\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)}=\Lambda_k\langle d_k,\varphi\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}\quad \text{для любой}\quad \varphi\in\widetilde{H}^1(a,b).$$

Поэтому в силу определения в (2.1) получаем

$$-\int\limits_a^b\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}d_k(r)\right)\right)\varphi(r)\,dr=\Lambda_k\int\limits_a^b r^2d_k(r)\varphi(r)dr\quad \text{для любой}\quad \varphi\in\widetilde{H}^1(a,b),$$

откуда следует равенство

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}d_k(r)\right)=\Lambda_k r^2d_k(r). \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что функции $u(r)$ и значения $\Lambda\in\mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}u(r)\right)=\Lambda r^2u(r)$$

и граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$, имеют вид

$$u(r) = \frac{c}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \Lambda = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому, принимая во внимание определение нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{L}^2(a,b)}$ (см. (2.1)), заключаем, что функции $d_k(r)$ и значения Λ_k, которые удовлетворяют уравнению (2.6) и условиям $d_k(a) = d_k(b) = 0$ и $\|d_k\|_{\widetilde{L}^2(a,b)} = 1$, имеют вид (2.4) (для $d_k(r)$) и $\Lambda_k = k^2\pi^2/(b-a)^2$, $k = 1, 2, \ldots$

Кроме того, согласно определению (2.1) скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}$, имеем

$$\langle d_k, d_m\rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b \sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)dr = \delta_{km}.$$

Значит, $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ является ортонормальной системой в $\widetilde{L}^2(a,b)$.

С другой стороны, из условия $d_k(a) = d_k(b) = 0$ и равенства

$$-\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\frac{\sin(\frac{k\pi}{b-a}(r-a))}{r}\right] = \left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)^2\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)$$

следует, что

$$\langle d_k, d_m\rangle_{\widetilde{H}^1(a,b)} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b r^2\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\right)\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)\right)dr =$$

$$= -\frac{2}{b-a}\int\limits_a^b\left(\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)\right]\right)\frac{1}{r}\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)dr = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2\delta_{km},$$

где $\delta_{km} = 1$, если $k = m$, и $\delta_{km} = 0$, если $k \neq m$. Таким образом, $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1(a,b)$ и выполняется равенство (2.5) Лемма доказана.

Отметим также, что справедливо свойство:

(C′) для всех $r \in [a,b]$ и каждого $k \in \mathbb{N}$ верна оценка $|d_k(r)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{a\sqrt{b-a}}$, которая следует непосредственно из определения (2.4).

3. Ортонормальный базис в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ и свойства его элементов. Для того чтобы построить ортонормальный базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, который является ортогональной системой в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, построим сначала при каждом $\lambda > 0$ функцию $y(\lambda; r)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}y(r)\right) = -\lambda\nu(r)r^2y(r) \tag{3.1}$$

и начальному условию

$$y(b) = 0, \quad y'(b) \neq 0. \tag{3.2}$$

Для удобства вычислений положим

$$s = b - r, \quad \widetilde{\nu}(s) = \nu(b-s), \quad \widetilde{\kappa}(s) = \kappa(b-s)$$

и рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{ds}\left((b-s)^2\widetilde{\kappa}(s)\frac{d}{ds}z(\lambda; s)\right) = -\lambda\widetilde{\nu}(s)(b-s)^2z(\lambda; s) \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$z(\lambda;0)=0,\quad \frac{d}{ds}z(\lambda;s)\Big|_{s=0}=1. \tag{3.4}$$

Несложно видеть, что существует единственное решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) в полуинтервале $[0,b[$. Укажем в лемме 3.1 явный вид решения $z(\lambda;s)$, а в лемме 3.2 условие его принадлежности к классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Для упрощения в дальнейшем записи обозначим $\omega_i(\lambda)=\sqrt{\lambda\nu_i/\kappa_i}$, $i=1,2$.

Лемма 3.1. *Решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) в полуинтервале $[0,b[$ имеет вид*

$$z(\lambda;s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_2(\lambda)}\dfrac{b}{b-s}\sin(\omega_2(\lambda)s) & \text{при}\quad 0\leqslant s\leqslant b-a,\\ \dfrac{\gamma(\lambda)}{b-s}\sin(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)(s-b+a)) & \text{при}\quad b-a\leqslant s<b,\end{cases} \tag{3.5}$$

где $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ определяются следующими соотношениями:

i) если

$$2m<\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)<2m+1,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)=\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{\nu_2\kappa_2}{\nu_1\kappa_1}}\operatorname{ctg}(\omega_2(\lambda)(b-a))+\frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\lambda\kappa_1\nu_1}}\right), \tag{3.6}$$

$$\gamma(\lambda)=\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{\sin\beta(\lambda)}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)), \tag{3.7}$$

ii) если

$$2m+1<\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)<2(m+1),\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)\ \text{такая же, как в случае } i),\quad \gamma(\lambda)=-\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{\sin\beta(\lambda)}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

iii) если

$$\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)=2m,\quad m\in\mathbb{N},$$

то

$$\beta(\lambda)=0,\quad \gamma(\lambda)=\frac{\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda\nu_1\kappa_1}}, \tag{3.8}$$

iv) если

$$\frac{b-a}{\pi}\omega_2(\lambda)=2m+1,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$\beta(\lambda)=0,\quad \gamma(\lambda)=\frac{-\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda\nu_1\kappa_1}}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Вычисления показывают, что определённая равенством (3.5) функция $z(\lambda;s)$ удовлетворяет на интервале $]0,b-a[$ уравнению (3.3).

С другой стороны, каков бы ни был вектор $(\beta,\gamma)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^2$, функция

$$z(s)=\frac{\gamma}{b-s}\sin(\beta+\omega_1(\lambda)(s-b+a))$$

удовлетворяет на интервале $]b-a,b[$ уравнению (3.3). Однако непрерывность функций $z(\lambda;s)$ и $\widetilde{\kappa}(s)dz(\lambda;s)/ds$ в точке $s=b-a$ требует, чтобы функции β и γ удовлетворяли соотношениям

$$\gamma\frac{\sin\beta}{a}=\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)), \tag{3.10}$$

$$\kappa_1\gamma\omega_1(\lambda)\frac{\cos\beta}{a}+\kappa_1\gamma\frac{\sin\beta}{a^2}=\kappa_2\frac{b}{a}\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))+\kappa_2\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a^2}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)). \tag{3.11}$$

Для того чтобы определить функции $\beta=\beta(\lambda)$, $\gamma=\gamma(\lambda)$ для каждого $\lambda>0$, нужно различать те же четыре случая, что и в формулировке леммы 3.1:

i) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))>0$,

ii) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))<0$,

iii) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))=1$,

iv) $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))=0$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))=-1$.

В случаях i) и ii), разделив обе части равенства (3.11) на

$$\kappa_1\gamma\omega_1(\lambda)\frac{\sin\beta}{a}=\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2\nu_1}}{\sqrt{\nu_2}}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

получим

$$\operatorname{ctg}(\beta(\lambda))=\sqrt{\frac{\nu_2\kappa_2}{\nu_1\kappa_1}}\operatorname{ctg}(\omega_2(\lambda)(b-a))+\frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\lambda\kappa_1\nu_1}}, \tag{3.12}$$

откуда вытекают представления (3.6), (3.7) и представления в случае ii). В случаях iii) и iv), подставив в (3.10), (3.11) значения $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a))$ и $\cos(\omega_2(\lambda)(b-a))$, придём к представлениям (3.8) и (3.9). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Решение $z(\lambda;s)$ задачи Коши (3.3), (3.4) тогда и только тогда принадлежит классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, когда выполняется включение*

$$\frac{1}{\pi}(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)a)\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.13}$$

Кроме того, соотношения

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda;s)|<\infty,$$

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)\bigg|_{s=b}=0$$

справедливы тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.13).

Доказательство. Так как $\sin(m\pi-r')=\pm\sin r'$ при $m\in\mathbb{Z}_+$ (здесь знак “$+$” или “$-$” определяется в соответствии с чётностью m), то, если включение (3.13) выполняется, положив $r=b-s$, получим

$$z(\lambda;s)=\pm\frac{\gamma(\lambda)}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\quad\text{при}\quad 0<r\leqslant a. \tag{3.14}$$

Таким образом,

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda;s)|=\lim_{r\to 0+0}\frac{|\gamma(\lambda)|}{r}|\sin(\omega_1(\lambda)r)|=|\gamma(\lambda)|\omega_1(\lambda)<\infty.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)\bigg|_{s=b}=\pm\gamma(\lambda)\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\bigg|_{r=0}=0.$$

Из последнего соотношения вытекает, что производная $\widetilde{\kappa}(s)dz(\lambda;s)/ds$ ограничена. Следовательно, справедливо включение $z(\lambda;\cdot)\in\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$.

С другой стороны, если $\pi^{-1}(\beta(\lambda)+\omega_1(\lambda)a)\notin\mathbb{Z}_+$, то существует такое число $\varepsilon\in]0,\pi[$, что

$$z(\lambda;s)=\pm\gamma(\lambda)\frac{\sin(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)}{r}\quad\text{при}\quad 0<r\leqslant a\quad(b-a\leqslant s<b).$$

В этом случае имеем

$$\frac{d}{ds}z(\lambda;s)=\pm\gamma(\lambda)\left[\omega_1(\lambda)\frac{1}{r}\cos(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)-\frac{1}{r^2}\sin(\varepsilon+\omega_1(\lambda)r)\right].$$

Таким образом, существует такое число $\delta>0$, при котором выполняется оценка

$$\left|\frac{d}{dr}z(\lambda;b-r)\right|\geqslant\frac{1}{2}|\gamma(\lambda)|\frac{\sin\varepsilon}{r^2}\quad\text{для любого}\quad r\in]0,\delta[.$$

Следовательно,

$$\|z(\lambda;\cdot)\|^2_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)}=\int\limits_0^b\kappa(r)r^2\left|\frac{d}{dr}z(\lambda;b-r)\right|^2dr=\infty.$$

Лемма доказана.

Теперь установим характеристики тех значений λ, при которых функция $z(\lambda;\cdot)$ принадлежит классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, и докажем полезные свойства функции $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$. Для этого напомним, что при $0<r<a$ функция $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$ имеет вид (выражение (3.14))

$$y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)=\pm\frac{\gamma(\lambda)}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r),\quad 0<r<a.$$

Начнём со следующей леммы, которая доказывается непосредственным вычислением.

Лемма 3.3. *Пусть* $\varepsilon>0$. *Функция*

$$\varphi_0(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1-\varepsilon}{x},\quad x\in\mathbb{R}_+,\quad \frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Z}_+,\tag{3.15}$$

строго убывает на каждом интервале $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}_+$, *причём*

$$\lim_{x\to k\pi+0}\varphi_0(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to(k+1)\pi-0}\varphi_0(x)=-\infty\quad\text{для любого}\quad k\in\mathbb{Z}_+.\tag{3.16}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dx}\varphi_0(x)=-1-\operatorname{ctg}^2x+\frac{1-\varepsilon}{x^2}=\frac{-1}{\sin^2x}+\frac{1-\varepsilon}{x^2}$$

и $\sin x<x$ для всех $x>0$, то

$$\frac{d}{dx}\varphi_0(x)\leqslant\frac{-1}{\sin^2x}+\frac{1}{x^2}<0\quad\text{для всех}\quad x\in\mathbb{R}_+,\quad \frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Z}_+.$$

Следовательно, функция $\varphi_0(x)$ строго убывает на каждом интервале $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Соотношения (3.16) очевидны. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь две последовательности $\{p^*_{k'}\}_{k'=1}^\infty$ и $\{p^{**}_{k''}\}_{k''=1}^\infty$ положительных вещественных чисел, определяемые соотношениями

$$p^*_{k'}=k'\pi\frac{\sqrt{\kappa_1}}{a\sqrt{\nu_1}},\quad p^{**}_{k''}=k''\pi\frac{\sqrt{\kappa_2}}{(b-a)\sqrt{\nu_2}}.\tag{3.17}$$

Определим множества

$$E^*=\{p^*_{k'}\}_{k'=1}^\infty,\quad E^{**}=\{p^{**}_{k''}\}_{k''=1}^\infty.\tag{3.18}$$

Занумеровав в порядке неубывания все элементы объединения $E^*\bigcup E^{**}$ натуральными числами, считая дважды в случае $p^*_{k'}=p^{**}_{k''}$, и добавив $p_0=0$, определим последовательность $\{p_k\}_{k=0}^\infty$. Тогда

$$\{p_k\}_{k=0}^\infty=\{0\}\bigcup E^*\bigcup E^{**},\tag{3.19}$$

$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1}, \quad \text{если} \quad p_k = p^*_{k'} \in E^* \backslash E^{**},$$
$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1}, \quad \text{если} \quad p_k = p^{**}_{k''} \in E^{**} \backslash E^*,$$
$$p_{k-1} < p_k = p_{k+1} < p_{k+2}, \quad \text{если} \quad p_k = p_{k+1} = p^*_{k'} = p^{**}_{k''} \in E^* \bigcap E^{**}.$$

В случае $p_{k-1} < p_k$ положим

$$\Phi(q) = \operatorname{ctg}\left(a\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}}q\right) + \sqrt{\frac{\kappa_2\nu_2}{\kappa_1\nu_1}}\operatorname{ctg}\left((b-a)\sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}q\right) + \frac{\kappa_2-\kappa_1}{a\sqrt{\kappa_1\nu_1}q} \quad \text{при} \quad p_{k-1} < q < p_k. \tag{3.20}$$

Лемма 3.4. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $p_{k-1} < p_k$, существует единственное значение $q = q_k$, принадлежащее интервалу $]p_{k-1}, p_k[$ и удовлетворяющее уравнению*

$$\Phi(q) = 0.$$

Доказательство. Положив $x = a\sqrt{\nu_1/\kappa_1}q$, представим функцию $\Phi(q)$ в виде

$$\Phi(q) = \varphi_0(x) + \operatorname{ctg}(Ax),$$

где $\varphi_0(x)$ – определённая в (3.15) функция с $\varepsilon = \kappa_2/\kappa_1$, а

$$A = \frac{(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}}.$$

Положим $\overline{x}^*_{k'} = k'\pi$, $\overline{x}^{**}_{k''} = k''\pi/A$. Напомним, что

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{ctg}(Ax) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\overline{x}^{**}_{k''}+0}\operatorname{ctg}(Ax) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\overline{x}^{**}_{k''}-0}\operatorname{ctg}(Ax) = -\infty \quad \text{при любом} \quad k'' = 1, 2, 3, \ldots$$

Кроме того, функция $\operatorname{ctg}(Ax)$ непрерывна и строго убывает в интервале $]\overline{x}^{**}_{k''}, \overline{x}^{**}_{k''+1}[$ при каждом $k'' \in \mathbb{Z}_+$. Из этих соотношений и леммы 3.3 следует, что функция $\Phi(q)$ непрерывна, строго убывает на интервале $]p_{k-1}, p_k[$ и удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{q\to 0+0}\Phi(q) = +\infty, \qquad \lim_{q\to p_k+0}\Phi(q) = +\infty, \qquad \lim_{q\to p_k-0}\Phi(q) = -\infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Далее, используя лемму 3.4, определим числовую последовательность $\{\overline{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ соотношениями

$$p_{k-1} < \overline{q}_k < p_k, \quad \Phi(\overline{q}_k) = 0, \quad \text{если} \quad p_{k-1} < p_k,$$
$$p_{k-1} = \overline{q}_k = p_k, \quad \text{если} \quad p_{k-1} = p_k.$$

Отметим, что согласно определению чисел p_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ (см. (3.17)–(3.19)), имеем

$$0 < \overline{q}_1 < \ldots < \overline{q}_k < \overline{q}_{k+1} < \ldots \quad \text{и} \quad \overline{q}_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Положим

$$\lambda_k = \overline{q}_k^2. \tag{3.21}$$

Лемма 3.5. *Для заданной равенством (3.5) функции $z(\lambda; s)$ соотношение*

$$\lim_{s\to b-0}|z(\lambda; s)| < \infty \tag{3.22}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_k$, где числа λ_k $(k \in \mathbb{N})$ определены в (3.21). Функция $z(\lambda_k; s)$ имеет ровно $k-1$ нулей в интервале $]0, b[$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2 (см. также (3.14)), если $\lim\limits_{s\to b-0}|z(\lambda;s)| < \infty$, то функция $z(\lambda;s) = z(\lambda;b-r)$ имеет вид

$$z(\lambda;b-r) = \pm\frac{\gamma}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r) \quad \text{при} \quad 0 < r \leqslant a.$$

Так как функции $z(\lambda;s)$ и $\widetilde{\kappa}dz(\lambda;s)/ds$ непрерывны на полуинтервале $[0,b[$, то соотношение (3.22) выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $\gamma\in\mathbb{R}$, что

$$\frac{\gamma}{a}\sin(\omega_1(\lambda)a) = \frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{b}{a}\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)), \tag{3.23}$$

$$\kappa_1\gamma\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\sin(\omega_1(\lambda)r)\right)\bigg|_{r=a} = -\kappa_2 b\frac{1}{\omega_2(\lambda)}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{b-s}\sin(\omega_2(\lambda)s)\right)\bigg|_{s=b-a}. \tag{3.24}$$

Если $\sin(\omega_1(\lambda)a) = 0$ и $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)) \neq 0$, то очевидно, что ни при каком γ равенство (3.23) не выполняется.

Если $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)) = 0$ и $\sin(\omega_1(\lambda)a) \neq 0$, то из (3.23) следует, что $\gamma = 0$, но при $\gamma = 0$ не выполняется (3.24). Поэтому нет γ, при котором справедливы равенства (3.23), (3.24).

С другой стороны, если $\sin(\omega_1(\lambda)a) = \sin(\omega_2(\lambda)(b-a)) = 0$, то равенство (3.23) выполнено автоматически, а (3.24) сводится к равенству

$$\kappa_1\omega_1(\lambda)\frac{\gamma}{a}\cos(\omega_1(\lambda)a) = \kappa_2\frac{b}{a}\cos(\omega_2(\lambda)(b-a)),$$

из которого можно найти значение γ, при котором справедливы равенства (3.23) и (3.24).

Если $\sin(\omega_1(\lambda)a) \neq 0$ и $\sin(\omega_2(\lambda)(b-a)) \neq 0$, то аналогично выводу соотношения (3.12) из равенств (3.10), (3.11) заключаем, что $\gamma\in\mathbb{R}$, при котором выполняются равенства (3.23) и (3.24), существует тогда и только тогда, когда $\Phi(\sqrt{\lambda}) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ – функция, определённая в (3.20).

Из этих рассмотрений и леммы 3.4 следует, что соотношение

$$\lim_{r\to 0+0}|z(\lambda;b-r)| < \infty$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_k$ при $k\in\mathbb{N}$. Кроме того, как нетрудно видеть, из определения последовательностей $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\overline{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что функция $y(\lambda_k;r) = z(\lambda_k;b-r)$ имеет ровно $k-1$ нулей в интервале $]0,b[$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Положим*

$$e_k(r) = \frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}, \tag{3.25}$$

где

$$y_k(r) = z(\lambda_k;s), \tag{3.26}$$

а $z(\lambda;s)$ *– функция, определённая равенством (3.5).*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(A) семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является ортонормальным базисом в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$;

(B) семейство $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *является ортогональной системой в* $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$;

(C) верно равенство

$$\|e_k\|^2_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \lambda_k;$$

(D) функции $e_k(r)$ *и* $r^2\kappa(r)de_k(r)/dr$ *непрерывны;*

(E) имеют место равенства $de_k(r)/dr|_{r=0} = 0$ *и* $e_k(b) = 0$;

(F) выполняется соотношение

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}e_k(r)\right) = \lambda_k\nu(r)r^2e_k(r) \quad \text{для всех} \quad r\in]0,a[\bigcup]a,b[;$$

(G) существует такая постоянная $C_1 < \infty$, *что*

$$|e_k(a)| \leqslant C_1 \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

(H) функция $e_k(r)$ *имеет ровно* $k-1$ *нулей в интервале* $]0,b[$;
(I) имеет место двойное неравенство

$$M_0(k-1)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant M_0(k+1)^2, \quad \text{где} \quad M_0 = \left(\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})}\right)^2.$$

4. Доказательство теоремы 3.1. Доказательство теоремы 3.1 проводится в несколько этапов. Докажем сначала нужные леммы, а затем теорему.

Лемма 4.1. *Существует линейный оператор* A, *действующий из* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *в* $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, *который каждому* $u \in \widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *ставит в соответствие элемент* $Au \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, *удовлетворяющий соотношению*

$$\langle Au, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b). \tag{4.1}$$

Оператор A, *переводящий* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ *в себя, является самосопряжённым компактным оператором в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *а его собственные единичные векторы* $\widetilde{e}_k$ *составляют ортонормальный базис* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ *в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$. *При этом если* μ_k *– собственное значение, отвечающее вектору* $\widetilde{e}_k$,

$$A\widetilde{e}_k = \mu_k \widetilde{e}_k, \tag{4.2}$$

то $\mu_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *и без нарушения общности* $\mu_k \geqslant \mu_{k+1}$ *при* $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Так как

$$\int_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2\, dr = \int_0^b \nu(r) r^2 \int_b^r 2\varphi(r') \frac{d}{dr'}\varphi(r') dr'\, dr \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^b \kappa(r) r^2 \left|\frac{d}{dr}\varphi(r)\right|^2\right)^{1/2},$$

где

$$C = b\left(\max\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}, 1\right)\right)^{1/2} \left(\max\left(\frac{\nu_1}{\kappa_1}, \frac{\nu_1}{\kappa_2}, \frac{\nu_2}{\kappa_2}\right)\right)^{1/2},$$

то

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \leqslant C\|\varphi\|_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b).$$

Итак, скалярное произведение $\langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}$ является непрерывным линейным функционалом, определённым на функциях $\varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$. Следовательно, в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $U \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ такой, что выполняется соотношение

$$\langle U, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)} = \langle u, \varphi\rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} \quad \text{для любой} \quad \varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(0,b). \tag{4.3}$$

Положив $Au = U$, зададим оператор A из $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ в $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$.

Таким образом, лемма следует из теории самосопряжённых компактных операторов и определения пространств $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$ и $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ (см., например, [15, гл. IV, § 1, лемма 1]). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормальный базис в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *определённый в лемме 4.1. Тогда для каждого* $k\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mu_k\frac{d}{dr}\left(\kappa r^2\frac{d}{dr}\widetilde{e}_k\right)=-\nu r^2\widetilde{e}_k \quad \text{в} \quad L^2(0,b). \tag{4.4}$$

Доказательство. Так как $A\widetilde{e}_k=\mu_k\widetilde{e}_k$, то, положив $U=A\widetilde{e}_k$, будем согласно (4.3) иметь

$$\int\limits_I \mu_k\kappa(r)r^2\left(\frac{d}{dr}\widetilde{e}_k(r)\right)\frac{d}{dr}\varphi(r)\,dr=\int\limits_I \nu(r)r^2\widetilde{e}_k(r)\varphi(r)\,dr.$$

Это равенство с учётом того, что $\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$ плотно в $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, определяет обобщённую производную $\dfrac{d}{dr}\left(\kappa(r)r^2\dfrac{d}{dr}\widetilde{e}_k(r)\right)$, для которой выполняется равенство (4.4). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть* $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормальный базис в* $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)$, *определённый в лемме 4.1. Тогда для каждого* $k\in\mathbb{N}$ *функция* $\widetilde{e}_k(r)$ *имеет вид*

$$\widetilde{e}_k(r)=\frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}, \tag{4.5}$$

где $y_k(r)$ *– функция, определённая равенством (3.26).*

Доказательство. В силу леммы 4.2 функция $\widetilde{e}_k(r)$ должна удовлетворять уравнению (4.4), которое совпадает с уравнением (3.1) при $\lambda=1/\mu_k$, и граничным условиям (3.2). Следовательно, $\widetilde{e}_k(r)$ должна иметь вид функции $y(\lambda;r)=z(\lambda;b-r)$ (определённой равенством (3.5)) с $\lambda=1/\mu_k$. С другой стороны, $\widetilde{e}_k(r)$ должна принадлежать классу $\widetilde{L}^2_\nu(0,b)\bigcap\widetilde{H}^1_\kappa(0,b)$, поэтому, согласно лемме 3.5, $\lambda=1/\mu_k$ должно быть одним из значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая, то $\lambda_k=1/\mu_k$. Значит, справедлива формула (4.5). Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 3.1. Так как в силу леммы 4.3 справедливы равенства $\widetilde{e}_k=e_k$, $\lambda_k=1/\mu_k$, то утверждение (A) доказано. Утверждение (B) вытекает непосредственно из леммы 4.1. Чтобы проверить (C), достаточно подставить $u=\varphi=e_k$ в соотношение (4.1) и учесть равенство (4.2). Утверждения (D) и (F) следуют непосредственно из равенства (4.4). Утверждения (E) и (H) вытекают из определения функции $e_k(r)$ и леммы 3.2.

Для упрощения в дальнейшем записи обозначим $\omega_i^k=\sqrt{\lambda_k\nu_i/\kappa_i}$, $i=1,2$ (т.е. в предыдущих обозначениях $\omega_i^k=\omega_i(\lambda_k)$, $i=1,2$). Чтобы доказать неравенство (3.27), нам удобно рассмотреть функцию

$$z(\lambda_k;s)=\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{b-s}\sin(\omega_2^k s) \quad \text{при} \quad 0\leqslant s\leqslant b-a.$$

Таким образом,

$$e_k(a)=\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{a}\sin(\omega_2^k(b-a))\frac{1}{\|z(\lambda_k;\cdot)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}.$$

Из последнего выражения непосредственно следует, что

$$|e_k(a)|\leqslant\frac{1}{\omega_2^k}\frac{b}{a}\frac{1}{\|z(\lambda_k;\cdot)\|_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\lambda_k\geqslant\frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}, \quad \text{т.е.} \quad \omega_2^k(b-a)\geqslant\pi.$$

Здесь имеем

$$\|z(\lambda_k;\cdot)\|^2_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)} = \int\limits_0^b \widetilde{\nu}(s)(b-s)^2(z(\lambda_k;\cdot))^2\,ds \geqslant \nu_2 b\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_0^{b-a}\sin^2(\omega_2^k s)\,ds =$$

$$= \nu_2 b\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_0^{b-a}\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega_2^k s))\,ds \geqslant \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\int\limits_{\pi/(4\omega_2^k)}^{b-a}(1-\cos(2\omega_2^k))\,ds =$$

$$= \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[s-\frac{1}{\omega_2^k}\sin(2\omega_2^k s)\right]_{\pi/(4\omega_2^k)}^{b-a} = \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[b-a-\frac{1}{2\omega_2^k}\sin(2\omega_2^k(b-a))-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\omega_2^k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}\left[b-a-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\omega_2^k}\right] \geqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)(b-a)\frac{\nu_2 b}{2}\frac{1}{\omega_2^k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|e_k(a)| \leqslant \frac{2a}{b}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)(b-a)\nu_2 b\right)^{-1} \equiv C_1^{[+]} \quad \text{при} \quad \lambda_k \geqslant \frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, так как множество чисел λ_k таких, что $\lambda_k < \pi^2\kappa_2/((b-a)^2\nu_2)$, конечно, а функция $e_k(r)$ непрерывна, то

$$\sup_{k\in\Lambda_0}|e_k(a)| \equiv C_1^{[-]} < \infty, \tag{4.7}$$

где

$$\Lambda_0 = \left\{k\in\mathbb{N} : \lambda_k < \frac{\pi^2\kappa_2}{(b-a)^2\nu_2}\right\}.$$

Из (4.6), (4.7) следует утверждение (G):

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|e_k(a)| \leqslant \max\{C_1^{[+]}, C_1^{[-]}\} \equiv C_1 < \infty.$$

Из представления для функции $e_k(r)$ (см. (3.25), (3.26), (3.5)) вытекает, что число её нулей в полуинтервалах $]0,a]$ и $[a,b[$ равно $[a\omega_1^k\pi]$ и $[(b-a)\omega_2^k\pi]$ соответственно (здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа). Так как число нулей функции $e_k(r)$ в интервале $]0,b[$ равно $k-1$, имеем: $k=[a\omega_1^k\pi]+[(b-a)\omega_2^k\pi]$, если $a\omega_1^k\pi=[a\omega_1^k\pi]$ (и $(b-a)\omega_2^k\pi=[(b-a)\omega_2^k\pi]$), и $k=[a\omega_1^k\pi]+[(b-a)\omega_2^k\pi]+1$ в противном случае.

Так как для любого $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ верно неравенство

$$\alpha+\beta-2 < [\alpha]+[\beta] \leqslant \alpha+\beta,$$

то

$$\sqrt{\lambda_k}\pi\frac{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}-2 \leqslant k-1 \leqslant \sqrt{\lambda_k}\pi\frac{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}},$$

откуда находим, что

$$\frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}(k-1)}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})} \leqslant \sqrt{\lambda_k} \leqslant \frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\pi(a\sqrt{\nu_1\kappa_2}+(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1})}(k+1).$$

Таким образом, утверждение (I), а с ним и теорема 3.1 доказаны.

5. Стационарное решение. Найдём стационарное решение задачи (1.9), (1.10) (с (1.3)), (1.6)–(1.8). В следующем пункте работы воспользуемся им для решения эволюционной задачи.

Рассмотрим следующую задачу: найти функции $T(r)$ и $\Pi(r)$, удовлетворяющие уравнениям

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}T(r)\right) = \psi\delta(r-a) \quad \text{при} \quad 0<r<b, \tag{5.1}$$

$$-\gamma_0\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\Pi(r)\right) = 0 \quad \text{при} \quad a<r<b, \tag{5.2}$$

где число ψ задаётся соотношением

$$\psi = \gamma_1\frac{\Pi(a+\varepsilon_1)-\Pi(a)}{\varepsilon_1}, \tag{5.3}$$

и граничным условиям

$$T(b) = \overline{T}_b, \tag{5.4}$$

$$\Pi(a) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a), \tag{5.5}$$

$$\Pi(b) = \overline{\Pi}_b. \tag{5.6}$$

В (5.2)–(5.6), как и выше, $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$, $\varepsilon\in(0,b-a)$, $\overline{\pi}_0$, $\overline{\alpha}_1$, $\overline{T}_b$, $\overline{\Pi}_b$ – заданные постоянные.

Определим величину $\overline{\Theta}_a$ соотношением

$$\overline{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1)}(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))), \tag{5.7}$$

т.е.

$$\overline{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1)+\gamma_1 b\overline{A}_a\overline{\alpha}_1}(\overline{\Pi}_b - \overline{\pi}_0 - \overline{\alpha}_1\overline{T}_b),$$

где

$$\overline{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}.$$

Докажем, что справедлива

Теорема 5.1. *Решение $(T(r),\Pi(r))$ задачи (5.1)–(5.6) определяется соотношениями*

$$T(r) = \overline{T}_b + \sum_{k=1}^{\infty}c_k^{\Theta}e_k(r), \quad c_k^{\Theta} = \gamma_1\frac{\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))}{b}\frac{e_k(a)}{\lambda_k}, \tag{5.8}$$

$$\Pi(r) = \frac{b\overline{\Pi}_b - a(\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a))}{(b-a)} - \frac{ab(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \overline{\Theta}_a)))}{(b-a)r}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Очевидно, что решением задачи (5.2), (5.5), (5.6) является функция

$$\Pi(r) = \frac{b\overline{\Pi}_b - a(\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a))}{(b-a)} - \frac{ab(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)r}. \tag{5.10}$$

Подставив её в соотношение (5.3), получим

$$\psi = \gamma_1\frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1} = \gamma_1\frac{b(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)(a+\varepsilon_1)} \equiv \psi_a(T(a)). \tag{5.11}$$

Положим также $\Theta(r) = T(r) - \overline{T}_b$. Тогда задача (5.1), (5.4) сводится к следующей задаче:

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}\Theta(r)\right) = \psi_a(T(a))\delta(r-a), \tag{5.12}$$

$$\Theta(b) = 0. \tag{5.13}$$

Положив

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r)$$

и проинтегрировав по полуинтервалу $]0,b]$ обе части уравнения (5.12), умноженные на $e_k(r)$, получим с помощью утверждений (B), (C), (D), (F) теоремы 3.1 равенства

$$\lambda_k c_k^{\Theta} = \int\limits_0^b e_k(r)\left(-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}\Theta(r)\right)\right)dr = \psi_a(T(a))e_k(a).$$

Поэтому решением задачи (5.12)–(5.13) является функция

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r), \quad \text{где} \quad c_k^{\Theta} = \psi_a(T(a))\frac{e_k(a)}{\lambda_k}; \tag{5.14}$$

тогда

$$\Theta(a) = \psi_a(T(a))\overline{A}_a, \quad \overline{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}. \tag{5.15}$$

Поэтому из равенств (5.11) и (5.15) следует, что

$$\Theta(a) = \frac{\gamma_1 b\overline{A}_a}{(b-a)(a+\varepsilon_1)}(\overline{\Pi}_b - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_b + \Theta(a)))).$$

Таким образом, согласно определению величины $\overline{\Theta}_a$ (см. (5.7)), имеем $\Theta(a) = \overline{\Theta}_a$ и, следовательно, $T(a) = \overline{T}_b + \overline{\Theta}_a$. Подставив это выражение в (5.11), (5.14), (5.10), получим равенства (5.8) и (5.9). Теорема доказана.

6. Существование и единственность решения эволюционной задачи. Обозначим через $(\overline{T}_{\rm st}(r), \overline{\Pi}_{\rm st}(r))$ решение стационарной задачи, которое мы определили формулами (5.8)–(5.9) в теореме 5.1. Положим

$$\vartheta = \vartheta(t,r) = T(t,r) - \overline{T}_{\rm st}(r), \tag{6.1}$$

$$\eta = \eta(t,r) = \Pi(t,r) - \overline{\Pi}_{\rm st}(r) - \overline{\alpha}_1\vartheta(t,r). \tag{6.2}$$

Так как $\partial_r(r^2\partial_r\Pi) = 0$ (см. (5.2)), то из (1.10) вытекает, что

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\eta) = -\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) \quad \text{при} \quad a < r < b.$$

Отметим, что в силу (1.9), (1.4), (1.5) и (6.1) выполняется также равенство

$$-\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) = -\overline{\alpha}_1\left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\vartheta) \quad \text{при} \quad a < r < b.$$

Эти соотношения позволяют свести систему (1.9), (1.10) (с (1.3)) к следующей системе:

$$\nu\partial_t\vartheta - \partial_r(r^2\kappa\partial_r\vartheta) = q\delta(r-a) \quad \text{в} \quad]0,b[, \tag{6.3}$$

$$\partial_t \eta - \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \eta) = f \quad \text{в} \quad]a, b[, \tag{6.4}$$

где

$$q = q(t) = \gamma_1 \frac{\eta(t, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \tag{6.5}$$

$$f = -\overline{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0 \right) \partial_r (r^2 \partial_r \vartheta). \tag{6.6}$$

Тогда граничные условия преобразуются в условия

$$\vartheta(t, b) = 0, \quad \eta(t, a) = \eta(t, b) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \tag{6.7}$$

а начальные условия примут вид

$$\vartheta(0, r) = T_0(r) - \overline{T}_{\mathrm{st}}(r) \equiv \vartheta_0(r) \quad \text{при} \quad 0 < r < b, \tag{6.8}$$

$$\eta(0, r) = \Pi_0(r) - \overline{\Pi}_{\mathrm{st}}(r) - \overline{\alpha}_1 \vartheta_0(r) \equiv \eta_0(r) \quad \text{при} \quad a < r < b. \tag{6.9}$$

Для определённых на полуинтервале $]0, b]$ функций u, используя функции e_k, заданные равенствами (3.25), (3.26), определим коэффициенты Фурье $\widehat{u}(k)$ и норму $\|u\|_{H^\sigma_{(0,b)}}$ соотношениями

$$\widehat{u}(k) = \langle u, e_k \rangle_{\widetilde{L}^2_\nu(0,b)}, \quad \|u\|_{H^\sigma_{(0,b)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{6.10}$$

Аналогично, для определённых на отрезке $[a, b]$ функций u, используя функции $d_k(r)$, заданные равенством (2.4), определим коэффициенты Фурье $\widehat{u}(k)$ и норму $\|u\|_{H^\sigma_{(a,b)}}$ следующим образом:

$$\widehat{u}(k) = \langle u, d_k \rangle_{\widetilde{L}^2(a,b)}, \quad \|u\|_{H^\sigma_{(a,b)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{6.11}$$

Имеем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть* $1 < \sigma < 3/2$. *Если* $\vartheta_0 \in H^{\sigma-1}_{(0,b)}$ *и* $\eta_0 \in H^{\sigma-1}_{(a,b)}$, *то, каково бы ни было число* $\overline{t} > 0$, *существует единственное решение* (ϑ, η) *задачи (6.3)–(6.9) в классе*

$$\vartheta \in L^\infty(0, \overline{t}; H^{\sigma-1}_{(0,b)}) \bigcap L^2(0, \overline{t}; H^\sigma_{(0,b)}), \quad \eta \in L^\infty(0, \overline{t}; H^{\sigma-1}_{(a,b)}) \bigcap L^2(0, \overline{t}; H^\sigma_{(a,b)}). \tag{6.12}$$

Доказательство. Используя коэффициенты Фурье, определённые в (6.10), (6.11) (даже если используем один и тот же символ $\widehat{u}(k)$ для двух разных значений, их нетрудно отличить в зависимости от контекста), преобразуем уравнения (6.3), (6.4) соответственно в уравнения

$$\frac{d}{dt} \widehat{\vartheta}(t, k) + \lambda_k \widehat{\vartheta}(t, k) = q(t) e_k(a), \tag{6.13}$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{\eta}(t, k) + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} k^2 \widehat{\eta}(t, k) = \widehat{f}(t, k). \tag{6.14}$$

Умножив обе части уравнения (6.13) на функцию $\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k)$, получим

$$\frac{1}{2} \partial_t \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}^2(t, k) + \lambda_k^\sigma \widehat{\vartheta}^2(t, k) = \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(a).$$

В силу оценки (3.27) имеем

$$\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(a) \leqslant \frac{1}{2} \lambda_k^\sigma |\widehat{\vartheta}(t, k)|^2 + \frac{C_1^2}{2} \lambda_k^{\sigma-2} |q(t)|^2.$$

Учитывая, что $\sigma - 2 < -1/2$, вследствие утверждения (I) теоремы 3.1 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\sigma-2} \equiv C_\lambda < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\vartheta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\vartheta\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda |q(t)|^2.$$

Далее, нетрудно получить неравенство

$$|q(t)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}|\eta(t,\varepsilon_1)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\eta}(t,k)d_k(\varepsilon_1)\right|^2 \leqslant C_q \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-1}|\widehat{\eta}(t,k)|^2 = C_q\|\eta(t,\cdot)\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}},$$

где

$$C_q = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\frac{2}{a^2(b-a)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\sigma-1}} < \infty.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\vartheta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\vartheta\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda C_q \|\eta\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}. \tag{6.15}$$

С другой стороны, если умножим обе части уравнения (6.14) на функцию $k^{2\sigma-2}\widehat{\eta}(t,k)$ и просуммируем получившиеся уравнения по k, то получим

$$\frac{d}{dt}\|\eta\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\eta\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} \leqslant C_2\|f(t,\cdot)\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}}, \tag{6.16}$$

где $C_2 = (b-a)^2/(\gamma_0\pi^2)$.

Пусть ω – положительное число, которое выберем в дальнейшем. Если положить

$$\widetilde{\vartheta} = e^{-\omega t}\vartheta, \quad \widetilde{\eta} = e^{-\omega t}\eta, \quad \widetilde{q} = e^{-\omega t}q, \quad \widetilde{f} = e^{-\omega t}f,$$

то из уравнений (6.3), (6.4) вытекает соответственно, что

$$\nu\partial_t\widetilde{\vartheta} - \partial_r(r^2\kappa\partial_r\widetilde{\vartheta}) + \omega\nu\widetilde{\vartheta} = \widetilde{q}\delta(r) \quad \text{в} \quad]0,b[, \tag{6.17}$$

$$\partial_t\widetilde{\eta} - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\widetilde{\eta}) + \omega\widetilde{\eta} = \widetilde{f} \quad \text{в} \quad [a,b[. \tag{6.18}$$

Действуя аналогично тому, как получены неравенства (6.15), (6.16), из уравнений (6.17), (6.18) получим неравенства

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2 C_\lambda C_q\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}, \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant C_2\|\widetilde{f}\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}}. \tag{6.20}$$

Введём банахово пространство

$$Y_\vartheta = L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(0,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^{\sigma}_{(0,b)}).$$

Пусть $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$. Подставляя $\overline{\vartheta}$ вместо ϑ в правую часть равенства (6.6), определим функцию $\overline{f} = \overline{f}(\overline{\vartheta})$, т.е.

$$\overline{f} = \overline{f}(\overline{\vartheta}) = -\overline{\alpha}_1\left(\frac{\kappa_2}{\nu_2} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\overline{\vartheta}).$$

Затем, подставив $\overline{f}$ в правую часть уравнения (6.4), получим

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\eta) = \overline{f} \quad \text{в} \quad]a,b[.$$

Разрешив это уравнение, найдём η, причём согласно (6.16) справедливо включение

$$\eta \in L^\infty(0,\overline{t}; H^{\sigma-1}_{(a,b)}) \bigcap L^2(0,\overline{t}; H^{\sigma}_{(a,b)}).$$

Затем, определив q соотношением (6.5), получим решение ϑ уравнения (6.3). Это решение в силу (6.15) принадлежит пространству Y_ϑ. Таким образом, определён оператор G_1, который каждому $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$ ставит в соответствие решение $\vartheta \in Y_\vartheta$ уравнения (6.3), полученное так, как сказано выше.

Если положить $\widetilde{\overline{f}} = e^{-\omega t}\overline{f}$, то из определения функции $\overline{f}$ следует, что существует такая постоянная C_f, для которой

$$\|\widetilde{\overline{f}}\|^2_{H^{\sigma-2}_{(a,b)}} \leqslant C_f\|\widetilde{\overline{\vartheta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}}. \tag{6.21}$$

Теперь рассмотрим две функции $\overline{\vartheta}_1$ и $\overline{\vartheta}_2$ из Y_ϑ. Определим $\widetilde{\overline{\vartheta}}_1$, $\widetilde{\overline{\vartheta}}_2$, $\widetilde{\vartheta}_1$, $\widetilde{\vartheta}_2$, $\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{\eta}_2$ так, как сказано выше ($\widetilde{\overline{\vartheta}}_1 = e^{-\omega t}\overline{\vartheta}_1$ и т.д.), и положим

$$\widetilde{\Theta} = \widetilde{\vartheta}_1 - \widetilde{\vartheta}_2, \quad \widetilde{H} = \widetilde{\eta}_1 - \widetilde{\eta}_2, \quad \widetilde{\overline{\Theta}} = \widetilde{\overline{\vartheta}}_1 - \widetilde{\overline{\vartheta}}_2.$$

Поскольку уравнения (6.17), (6.18) линейны, то так же, как и для (6.19)–(6.21), получаем

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} \leqslant C_1^2C_\lambda C_q\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}}, \tag{6.22}$$

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant C_2C_f\|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}}.$$

Так как $\lambda^{2\sigma-1} \leqslant \delta\lambda^{2\sigma} + \lambda^{2\sigma-2}/(4\delta)$ и поэтому $\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{(a,b)}} \leqslant \delta\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}/(4\delta)$ для любого $\delta > 0$, то, умножив обе части (6.22) на постоянную Λ, которая будет определена ниже, получим

$$\frac{d}{dt}(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}) + \Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + 2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant$$

$$\leqslant \delta\Lambda C_1^2C_\lambda C_q\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} + \frac{\Lambda}{4\delta}C_1^2C_\lambda C_q\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} + C_2C_f\|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}}. \tag{6.23}$$

Если возьмём

$$\Lambda = 2C_2C_f, \quad \delta = \frac{\gamma_0\pi^2}{2\Lambda(b-a)^2C_1^2C_\lambda C_q}, \quad \omega = \frac{\Lambda}{4\delta}C_1^2C_\lambda C_q,$$

то неравенство (6.23) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}}) + \Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{2(b-a)^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma}_{(a,b)}} +$$

$$+ 2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(0,b)}} + \omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{\sigma-1}_{(a,b)}} \leqslant \frac{\Lambda}{2}\|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{H^{\sigma}_{(0,b)}}. \tag{6.24}$$

Из неравенства (6.24) вытекает, что последовательные приближения $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, для задачи (6.17), (6.18) (с начальными условиями (6.8), (6.9) для всякого n с $\vartheta_0 \in H^{\sigma-1}_{(0,b)}$ и $\eta_0 \in H^{\sigma-1}_{(a,b)}$) сходятся в банаховом пространстве $\widetilde{Y}_\vartheta$ с нормой

$$\|\widetilde{\vartheta}\|_{\widetilde{Y}_\vartheta} = (\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};H^{\sigma-1}_{(0,b)})} + \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{\sigma}_{(0,b)})} + 2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{\sigma-1}_{(0,b)})})^{1/2}.$$

Так как уравнения линейны, предел $\widetilde{\vartheta}$ последовательных приближений $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$ будет решением задачи (6.17), (6.18), причём с ним определяется также и $\widetilde{\eta}$. Итак, положив

$$\vartheta = e^{\omega t}\widetilde{\vartheta}, \quad \eta = e^{\omega t}\widetilde{\eta},$$

видим, что пара (ϑ, η) является решением задачи (6.3)–(6.9). Включения (6.12) следуют из полученных выше оценок. Теорема доказана.

Отметим, что, используя представления (6.1), (6.2) и найденное решение (ϑ, η) задачи (6.3)–(6.9), можно определить функции $T(t, r)$ и $\Pi(t, r)$, удовлетворяющие уравнениям (1.9), (1.10) (с (1.3)) и условиям (1.6)–(1.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М., 1974.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М., 1981.
3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
5. *Крылов Н.В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М., 1985.
6. *Hallaci Kh., Fujita Yashima H.* Système d'équations paraboliques linéaires du type: température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 2020. V. 65. P. 45–73.
7. *Fuchs N.A.* Evaporation and Droplet Growth in Gaseous Media. London, 1959.
8. *Pustovalov V.K., Romanov G.S.* The theory of heating and evaporation of a spherical particle exposed to optical radiation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28. P. 277–289.
9. *Козырев А.В., Ситников А.Г.* Испарение сферической капли в газе среднего давления // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. С. 765–774.
10. *Sazhin S.S.* Droplets and Sprays. Heidelberg, 2014.
11. *Zubkov V.S., Cossali G.E., Tonini S., Rybdylova O., Crua C., Sazhin S.S.* Mathematical modelling of heating and evaporation of a spheroidal droplet // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 108. P. 2181–2190.
12. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. СПб, 2000.
13. *Albertson M.L.* La mécanique de l'évaporation // La Houille Blanche. 1995. V. 5. P. 704–717.
14. *Гета Р.И.* Моделирование испарения с водной поверхности на основе теории подобия // Вестн. Восточно–Казахстан. гос. техн. ун-та. 2012. № 4. С. 5–12.
15. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.

Высшая национальная школа гидравлики,
г. Блида, Алжир,
Высшая нормальная школа,
г. Константина, Алжир

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.
После доработки 18.07.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.