ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 223–237

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ

© 2022 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Изучаются линейные пространства вектор-функций, голоморфных в угловой области комплексной плоскости, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что снабжённые соответствующими нормами указанные пространства являются гильбертовыми. В этих пространствах исследуется начальная задача для интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами и устанавливается её корректная разрешимость.

DOI: 10.31857/S037406412202008X

Введение. В настоящей работе изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главной частью этих уравнений является абстрактное параболическое уравнение, возмущённое вольтерровым интегральным оператором. Принципиальное отличие данной работы от имеющихся и посвящённых исследованию интегро-дифференциальных уравнений состоит в том что мы рассматриваем и изучаем интегро-дифференциальные уравнения для вектор-функций, аргументы которых принимают значения в угловой области комплексной плоскости.

Статья состоит из двух частей. В первой части вводятся необходимые в дальнейшем функциональные пространства и устанавливаются основные их свойства. Во второй её части исследуется во введённых функциональных пространствах начальная задача для рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений и устанавливается её корректная разрешимость. При этом существенно используются результаты первой части работы.

1. Функциональные пространства и их основные свойства. Определения, обозначения и формулировка результатов. В работе М.М. Джрбашяна и В.М. Мартиросяна [1], а также в монографии М.М. Джрбашяна [2, гл. VII] изучен класс $\Re_2(S_\theta)$ функций, голоморфных в угловой области $S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta\}$ и таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(te^{i\varphi})|^2 \, dt \right\} < +\infty.$$

В [1, 2] установлено, что это линейное пространство, снабжённое соответствующей нормой $\Re_2[S_\theta]$, является гильбертовым, и для него доказана теорема типа Пэли–Винера.

В данной работе исследуются классы $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в области S_θ, которые определяются следующим образом.

Обозначим через $\Re_2(S_\theta, H)$ класс вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left\| f(te^{i\varphi}) \right\|^2 dt,$$

а через $W_2^n(S_\theta, A^n)$ класс вектор-функций, для которых конечна величина

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt,$$

где A – самосопряжённый положительный оператор в пространстве $H,$ имеющий компактный обратный. Через $(\cdot,\cdot)$ и $||\cdot||$ обозначим скалярное произведение и норму в пространстве H соответственно.

В работе доказано, что снабжённый соответствующей нормой класс $\Re_2(S_\theta, H)$ образует гильбертово пространство, и для этого пространства установлен аналог теоремы Пэли–Винера. Показано также, что снабжённый соответствующей нормой класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций является гильбертовым пространством, и установлен аналог теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах.

Условимся в дальнейшем называть функцией (без добавления слова "вектор") функцию со значениями в пространстве $H,$ а функцию со значениями в $\mathbb{C}$ будем называть скалярной или числовой функцией.

Пусть $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ пространство (классов) функций $\mathbb{R}_+ \to \to H,$ измеримых относительно меры Лебега dt на полуоси $\mathbb{R}_+$ и таких, что

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|^2\, dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Пусть A – самосопряжённый положительный оператор (т.е. $A^* = A \geqslant \kappa I,$ $\kappa = \mathrm{const} > 0$), действующий в пространстве $H,$ имеющий компактный обратный.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}\,(A^\beta)$ оператора $A^\beta,$ $\beta > 0,$ в гильбертово пространство $H_\beta,$ введя норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|,$ эквивалентную норме графика оператора A^β.

Через $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева функций $\mathbb{R}_+ \to H,$ снабжённое нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} (\|u^{(n)}(t)\|^2 + \|A^n u(t)\|^2)\, dt \right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [3, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_2^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Будем также полагать в дальнейшем, что $\Re_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$.

Укажем основные свойства пространства $\Re_2(S_\theta, H)$.

Предложение 1. *У функции $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ существуют граничные значения $f(te^{\pm\theta}) \in \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0. \tag{1}$$

Предложение 2. *Для функции $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ справедлива интегральная формула Коши*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{-i\theta})}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{i\theta})}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma, \quad \tau \in S_\theta. \tag{2}$$

Предложение 3. *Пусть функции $f_{-\theta}$ и $f_{+\theta}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Тогда функция $f(\tau),$ представимая в виде*

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} e^{-i\theta} \frac{f_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} e^{i\theta} \frac{f_{+\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau}\, d\varsigma, \quad \tau \in S_\theta,$$

принадлежит классу $\Re_2(S_\theta, H)$.

На основании предложений 1–3 доказывается

Теорема 1. 1^0. *Класс функций* $\Re_2(S_\theta, H)$ *с нормой*

$$\|f\|^*_{2,\theta} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $\Re_2(S_\theta, H)$ *со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle_{2,\theta} = \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{-i\theta}), g(te^{-i\theta}))\, dt + \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{i\theta}), g(te^{i\theta}))\, dt \tag{3}$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Если* $f(\tau)$ *– произвольная функция из класса* $\Re_2(S_\theta, H)$ *и* $\|f\|_{2,\theta} = \langle f(\tau), f(\tau)\rangle^{1/2}_{2,\theta}$, *то справедливы оценки*

$$\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\|f\|^*_{2,\theta}. \tag{4}$$

Приведём аналог теоремы Пэли–Винера для класса функций $\Re_2(S_\theta, H)$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Справедливы следующие утверждения:*

1^0. *Класс функций* $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t e^{-i\varphi}} f(te^{-i\varphi})\, dt, \quad |\arg\lambda - \varphi| < \pi/2, \quad \varphi \in (-\theta, \theta), \tag{5}$$

$f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$.

2^0. *В представлении (5) для каждой фиксированной функции* $F(\lambda) \in \Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *функция* $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ *единственна и справедлива формула обращения*

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F(e^{i(\pi/2\cdot \mathrm{sgn} y - \varphi)}|y|)\, dy. \tag{6}$$

3^0. *Если функция* $F(\lambda) \in \Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *с помощью функции* $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ *представима по формуле (5), то выполняются оценки*

$$\|F\|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2\|f\|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}\|F\|_{2,\theta+\pi/2}. \tag{7}$$

Отметим, что при $\theta = 0$ теорема 2 переходит в хорошо известную теорему Пэли–Винера для пространства $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и пространства Харди в правой полуплоскости $\Re_2(\mathrm{Re}\,\lambda > 0; H)$. Соответствующий комментарий по этому поводу в скалярном случае приведён в статье [1].

Перейдём к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций, голоморфных в угле S_θ.

Условимся в дальнейшем обозначать через $\dfrac{du}{d\tau}(\tau)$ производную функции $u(\tau)$ в смысле комплексного анализа. Поскольку

$$\frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) = e^{-ik\varphi} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(te^{i\varphi}), \quad |e^{ik\varphi}| = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

то класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ совпадает с классом функций, голоморфных в угле S_θ и таких, что конечна величина

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \equiv \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})\right\|^2+\|A^nu(te^{i\varphi})\|^2\right)dt\right\}^{1/2}.$$

В следующей лемме установлен аналог хорошо известной теоремы о промежуточных производных (см. [3, с. 29]).

Лемма. *Пусть функция $u(\tau)$ принадлежит классу $W_2^n(S_\theta, A^n)$. Тогда функции $A^{n-j}\times$ $\times\,\dfrac{d^j}{d\tau^j}u(\tau)$, $j=\overline{0,n}$, принадлежат классу $\Re_2(S_\theta, H)$ и справедливы неравенства*

$$\|A^{n-j}u^{(j)}\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \leqslant K_j\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}$$

с положительными постоянными K_j, $j=\overline{0,n}$.

Предложение 4. *У функции $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ существуют граничные значения $u_{\pm\theta}(t)=$ $=u(te^{\pm i\theta})$ из класса $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\int\limits_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})-\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{\pm i\theta})\right\|^2+\|A^n(u(te^{i\varphi})-u(te^{\pm i\theta}))\|^2\right)dt=0.$$

Теорема 3. 1^0. *Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ с нормой*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})\right\|^2+\|A^nu(te^{i\varphi})\|^2\right)dt\right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ со скалярным произведением*

$$\langle u,v\rangle_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \int\limits_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{-i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{-i\theta})\right)+(A^nu(te^{-i\theta}),A^nv(te^{-i\theta}))+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{i\theta})\right)+(A^nu(te^{i\theta}),A^nv(te^{i\theta}))\right\}dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Для произвольной функции $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} \leqslant 2\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)},$$

где $\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)} = \langle u,u\rangle^{1/2}_{W_2^n(S_\theta,A^n)}$.

Приведём вариант теоремы о следах для пространства $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Теорема 4. *Для функции $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ существуют пределы*

$$\lim_{\substack{\tau\in S_\theta,\\ |\tau|\to 0}} A^{n-p-1/2}\frac{d^p}{d\tau^p}u(\tau), \quad p=\overline{0,n-1},$$

в смысле нормы пространства H равномерно относительно $\arg\tau$, $|\arg\tau|<\theta$.

Отметим, что теоремы 3 и 4, а также предложение 4 приведены в статье [4]; полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ приведены в депонированной работе [5].

2. Доказательства некоторых сформулированных утверждений о свойствах функциональных пространств $\boldsymbol{\Re_2(S_\theta, H)}$ и $\boldsymbol{W_2^n(S_\theta, A^n)}$.

Доказательство предложения 1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства H. Для функции $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$ положим $f_j(\tau) = (f(\tau), e_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in S_\theta$. Тогда справедливы представление

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\tau) e_j \tag{8}$$

и следующая цепочка равенств:

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Согласно лемме А [1, с. 871] числовая функция $f_j(\tau)$, $j \in \mathbb{N}$, имеет граничные значения $f_j(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+)$, т.е. существуют такие функции $f_j(te^{\pm i\theta})$, для которых справедливо соотношение

$$\lim_{\varphi \to \pm\theta} \int\limits_0^{+\infty} |f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{\pm i\theta})|^2\, dt = 0. \tag{9}$$

Положим $f(te^{\pm i\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(te^{\pm i\theta}) e_j$ и покажем, что $f(te^{\pm i\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$, т.е. что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{\pm i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < +\infty. \tag{10}$$

Доказательство проведём для $+\theta$; рассуждения для $-\theta$ совершенно аналогичны. Обозначим через M величину

$$M := \sup_{|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{|\varphi|<\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Предположим противное. Тогда найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} > 4M. \tag{11}$$

В силу соотношения (9) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\varphi_0 < \theta$, что при всех φ, удовлетворяющих неравенствам $\varphi_0 < \varphi < \theta$, выполняются оценки

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < 2\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \varepsilon \leqslant 2\sup_{|\varphi|<\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2M + \varepsilon.$$

Но тогда получаем противоречие с неравенством (11).

Таким образом, неравенство (10) установлено. Согласно лемме 1.1 [1, с. 873] для числовых функций $f_j(\tau)$ справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2(\|f_j(te^{-i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}),$$

откуда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty} (\|f_j(te^{-i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}). \tag{12}$$

Установим теперь справедливость соотношения (1). Рассмотрим случай $\varphi \to +\theta$; случай $\varphi \to -\theta$ рассматривается аналогично.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По ε выберем такое $N \in \mathbb{N}$, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и} \quad \sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{13}$$

В силу (10), (12) такой выбор N возможен. По N выберем такое $\delta > 0$, чтобы при любом φ, для которого $\theta - \varphi < \delta$, выполнялись неравенства

$$\|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2N}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{14}$$

Существование такого δ вытекает из соотношения (9). Тогда будем иметь

$$\sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \theta - \varphi < \delta. \tag{15}$$

Наконец, из неравенств (13), (15) следует, что

$$\|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|f_j(te^{i\varphi}) - f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ 2\sum_{j=N+1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f_j(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + 2\sum_{j=N+1}^{\infty} \|f_j(te^{i\theta})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon.$$

Таким образом, соотношение (1) установлено. Предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Сходимость интегралов в правой части формул (2) при $\tau \in S_\theta$ вытекает из оценок

$$\left\| \int_0^{+\infty} \frac{f(\varsigma e^{\pm i\theta})}{\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau} e^{\pm i\theta}\, d\varsigma \right\| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\|f(\varsigma e^{\pm i\theta})\|}{|\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau|}\, d\varsigma \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \|f(\varsigma e^{\pm i\theta})\|^2\, d\varsigma \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} |\varsigma e^{\pm i\theta} - \tau|^{-2}\, d\varsigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\varsigma e^{-i\theta})}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(\varsigma e^{i\theta})}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma,$$

достаточно проверить его покоординатно:

$$(f(\tau), e_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\varsigma e^{-i\theta}), e_j)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(f(\varsigma e^{i\theta}), e_j)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma.$$

Для числовых функций $(f(\tau), e_j)$ справедлива интегральная формула Коши [2, теорема 7.5, с. 414], откуда и вытекает интегральная формула Коши для $f(\tau) \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+, H)$.

Доказательство предложения 3. Для числовых функций известен следующий аналог теоремы М. Рисса об интегралах типа Коши [6, с. 471, теорема 2.2].

Теорема. *Пусть функции* $h_{-\theta}(\varsigma)$ *и* $h_{+\theta}(\varsigma)$ *принадлежат пространству* $L_2(\mathbb{R}_+)$. *Тогда для функции* $h(\tau)$, *представимой в виде*

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{h_{-\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{-i\theta} - \tau} e^{-i\theta}\, d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{h_{+\theta}(\varsigma)}{\varsigma e^{i\theta} - \tau} e^{i\theta}\, d\varsigma,$$

справедливо неравенство

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^\infty |h(te^{i\varphi})|^2\, dt \leqslant \mathrm{const}\bigg\{\int\limits_0^\infty |h_{-\theta}(\varsigma)|^2\, d\varsigma + \int\limits_0^\infty |h_{+\theta}(\varsigma)|^2\, d\varsigma\bigg\},$$

где постоянная const *не зависит от функций* $h_{-\theta}(\varsigma)$, $h_{+\theta}(\varsigma)$. *Кроме того, функция* $h(\tau)$ *голоморфна в секторе* S_θ.

Используя разложение функции $f(\tau)$ по ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^\infty$:

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^\infty (f(\tau), e_j)e_j,$$

а также то, что

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \int\limits_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2\, dt = \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)},$$

получаем векторный аналог приведённого утверждения. В самом деле, для любого $\varphi \in (-\theta, \theta)$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sum_{j=1}^\infty \|(f(te^{i\varphi}), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^\infty (\|(f_{-\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \|(f_{+\theta}(t), e_j)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)}) = C(\|f_{-\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \|f_{+\theta}(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}),$$

где C – некоторая постоянная, откуда вытекает, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant C\int\limits_0^\infty (\|f_{-\theta}(t)\|^2 + \|f_{+\theta}(t)\|^2)\, dt.$$

Голоморфность функции $f(\tau)$ при $\tau \in S_\theta$ очевидным образом следует из свойств интегралов типа Коши.

Доказательство теоремы 1. Вначале докажем п. 3^0. Установим оценки (4). Оценка $\|f\|^*_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta}$ вытекает из более сильного неравенства (12).

Докажем правую оценку в (4). Для этого воспользуемся соотношением (1) из предложения 1, согласно которому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех φ, для которых $\theta - \varphi < \delta$, выполняется неравенство $\|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} < \varepsilon$. Отсюда из неравенства

$$|\|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} - \|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}| \leqslant \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}$$

следует, в частности, что $\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(te^{i\varphi})\| + \varepsilon$ и тем более

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что

$$\|f(te^{i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|f(te^{i\varphi})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \|f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Дословно повторяя проведённые рассуждения для $-\theta$, получаем

$$\|f(te^{-i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(\tau)\|^*_{2,\theta}.$$

Из последних двух неравенств и следует, что $\|f(\tau)\|_{2,\theta} \leqslant \sqrt{2}\|f(\tau)\|^*_{2,\theta}$.

1^0. В доказательстве нуждается лишь утверждение о полноте, так как проверка того, что числовая функция $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ обладает свойствами нормы, вытекает из соответствующих свойств нормы $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)}$.

Итак, пусть имеется фундаментальная по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ последовательность $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ функций, т.е. $\|f_k(\tau) - f_l(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0$ при $k,l \to \infty$. Покажем, что существует функция $f(\tau) \in \in \Re_{2,\theta}(\mathbb{R}_+,H)$ такая, что $\|f_k(\tau) - f(\tau)\|^*_{2,\theta} \to 0$ при $k \to \infty$.

Согласно предложению 1 каждая из функций $f_k(\tau)$ имеет граничные значения $f_k(te^{\pm i\theta}) \in \in L_2(\mathbb{R}_+,H)$, а значит, в соответствии с неравенством (4) из сходимости последовательности функций $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$ вытекает сходимость последовательностей $\{f_k(te^{\pm i\theta})\}_{k=1}^{\infty}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}_+,H)$. Но так как пространство $L_2(\mathbb{R}_+,H)$ является полным, то существуют функции $f_{\pm\theta}(t) \in L_2(\mathbb{R}_+,H)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(te^{\pm i\theta}) - f_{\pm\theta}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0.$$

По функциям $f_{\pm\theta}(t)$ образуем интеграл типа Коши

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-i\theta}\frac{f_{-\theta}(t)}{te^{-i\theta}-\tau}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{i\theta}\frac{f_{\theta}(t)}{te^{i\theta}-\tau}\,dt.$$

Тогда в соответствии с предложением 3 функция $f(\tau)$ принадлежит классу $\Re_2(S_\theta,H)$, поэтому последовательность $\{f_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(\tau)$ по норме $\|\cdot\|^*_{2,\theta}$.

2^0. Полнота пространства $\Re_2(S_\theta,H)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\theta}$, порождаемой скалярным произведением (3), вытекает из неравенства (4) и утверждения п. 1^0. Проверка остальных аксиом гильбертова пространства со скалярным произведением (4) проводится непосредственно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1^0. Пусть $F(\lambda) \in \Re_2(S_\theta,H)$. Положим $F_j(\lambda) = (F(\lambda),e_j)$. Тогда $F_j(\lambda) \in \Re_2(S_{\theta+\pi/2})$ и, согласно [1, теорема 1], существует скалярная функция $f_j(\tau) \in \in \Re_2(S_\theta)$ такая, что

$$F_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\varphi}\int_o^{\infty} e^{-\lambda te^{-i\varphi}} f_j(te^{-i\varphi})\,dt.$$

Причём функция $f_j(\tau)$ определяется единственным образом по функции $F_j(\lambda)$ и, согласно теореме Пэли–Винера (см. [1]), имеют место неравенства

$$|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 2|f_j(\tau)|_{2,\theta} \leqslant 2\sqrt{2}|F_j(\lambda)|_{2,\theta+\pi/2}. \qquad (16)$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения

$$|f|^2_{2,\kappa} := \int\limits_0^{+\infty} \left|f(te^{-i\kappa})\right|^2 dt + \int\limits_0^{+\infty} \left|f(te^{+i\kappa})\right|^2 dt,$$

$$|f|^*_{2,\kappa} := \sup_{\varphi:|\varphi|<\kappa} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left|f(te^{i\varphi})\right|^2 dt\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \kappa < \pi.$$

По набору скалярных функций $\{f_j(\tau)\}_{j=1}^{\infty}$ определим функцию $f(\tau)$ равенством (8). Покажем, что $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$. Так как для числовых функций $f_j(\tau)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left|f_j(te^{i\varphi})\right|^2 dt \leqslant 2|f_j(\tau)|^2_{2,\theta}, \tag{17}$$

то в силу оценок (16), (17) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left|f_j(te^{i\varphi})\right|^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(te^{i\varphi})|^2 dt = \frac{1}{4} \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt.$$

Искомое утверждение вытекает теперь из того, что слабая голоморфность в банаховых пространствах влечёт за собой сильную голоморфность (см. [7, теорема 3.10.1]), и, значит, из голоморфности скалярных функций $f_j(\tau)$ следует голоморфность вектор-функции $f(\tau)$.

2^0. Так как интеграл в правой части формулы (6) существует при всех φ таких, что $|\varphi| < \theta$, то достаточно установить равенство (6) покоординатно. Но покоординатное равенство справедливо в силу [1, теорема 1] (см. п. 2^0).

3^0. Неравенство (7) вытекает из того, что для числовых функций $F_j(\lambda)$ и $f_j(\tau)$, согласно [1, теорема 1] (см. п. 3^0), справедливы оценки $|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2} \leqslant 4|f_j(\tau)|^2_{2,\theta} \leqslant 8|F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}$, и, кроме того, имеют место очевидные равенства

$$\|F(\lambda)\|^2_{2,\theta+\pi/2} = \sum_{j=1}^{\infty} |F_j(\lambda)|^2_{2,\theta+\pi/2}, \quad \|f(\tau)\|^2_{2,\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(\tau)|^2_{2,\theta}.$$

Теорема 2 доказана.

Ограничения по объёму статьи не позволяют нам привести полные доказательства леммы, предложения 4, теорем 3 и 4. Как уже отмечалось, полные подробные доказательства указанных утверждений приведены в работе [5]. Ограничимся здесь только указанием схем доказательства некоторых из указанных утверждений.

Доказательство леммы существенно опирается на теорему о промежуточных производных для пространства $W_2^n(\mathbb{R}_+, A)$ (см. [3, с. 29]), из которой вытекают неравенства

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \|A^{n-j}u^{(j)}(te^{i\varphi})\|^2{}_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \|A^{n-j}\frac{\partial^j}{\partial t^j}u(te^{i\varphi})\|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant K_j^2 \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left\|\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(te^{i\varphi})\right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2\right) dt.$$

В свою очередь доказательство предложения 4 опирается на лемму, а также на предложение применительно к функциям

$$A^{n-j}\frac{d^j u}{d\tau^j}(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H), \quad j = \overline{0,n}.$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Доказательство теоремы 4 опирается на теорему о следах (см. [3, теорема 3.1]), подробнее см. [5].

3. Начальная задача для интегро-дифференциального уравнения. Постановка задачи и формулировка основного результата. Рассмотрим для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{du}{d\tau}(\tau) + Au(\tau) - \int_0^\tau K(\tau - s)Au(s)\,ds = f(\tau), \quad \tau \in S_\theta, \tag{18}$$

начальную задачу

$$u(+0) = \varphi_0. \tag{19}$$

Здесь, как и выше, A – самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\Re_1(S_\theta)$, правая часть $f(\tau)$ – пространству $\Re_2(S_\theta, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$.

Напомним, что пространства Харди $\Re_p(S_\theta)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоят из функций, голоморфных в угловой области S_θ и удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Подробнее см., например, [6, с. 463].

Отметим, что в интегро-дифференциальном уравнении (18) в интегральном слагаемом интегрирование проводится по отрезку, соединяющему начало координат и точку $\tau \in S_\theta$. Однако в силу регулярности функций $K(\tau)$ и $u(\tau)$ интеграл можно брать по любому спрямляемому кусочно-гладкому контуру, соединяющему эти точки.

Основным результатом второй части работы является теорема 5 о разрешимости задачи (18), (19) в пространстве $W_2^1(S_\theta, A)$. Для упрощения в дальнейшем записи удобно обозначить $c(\alpha, r, \theta) := (\alpha^2 + r^2)^{-1/2}(1 - \sin\theta)^{-1/2}$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2)$.

Теорема 5. *Пусть в задаче (18), (19) ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\Re_1(S_\theta)$, вектор-функция $f(\tau)$ – пространству $\Re_2(S_\theta, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$ и для преобразования Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ ядра $K(\tau)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\varphi\in(-\frac{\pi}{2}-\theta, \frac{\pi}{2}+\theta)}|\hat{K}(re^{i\varphi})|\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0} ac(\alpha, r, \theta) < 1, \tag{20}$$

где $a \in (\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 = \inf\limits_{\|x\|=1, x\in \mathrm{Dom}\,(A)}(Ax, x)$. Тогда существует единственное решение $u(\tau) \in W_2^1(S_\theta, A)$ этой задачи, и это решение удовлетворяет оценке

$$\|u(\tau)\|_{W_2^1(S_\theta, A)} \leqslant d(\|f(\tau)\|^2_{\Re_2(S_\theta, H)} + \|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2} \tag{21}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(\tau)$ и вектора φ_0.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varphi_0 = 0$. Тогда преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ решения $u(\tau)$ уравнения (18) имеет вид

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda), \tag{22}$$

при этом оператор-функция $L(\lambda)$, являющаяся символом уравнения (18), представима в виде $L(\lambda)=\lambda I+A-\hat{K}(\lambda)A$. Для доказательства этой теоремы достаточно, как следует из теоремы Пэли–Винера, показать, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)$, а также получить их оценки.

С этой целью покажем, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ в области $G_{\theta+\pi/2}=\{\lambda\in\mathbb{C}: |\arg\lambda|<\theta+\pi/2\}$ является голоморфной и допускает оценки

$$\|AL^{-1}(\lambda)\|<+\infty,\quad \|\lambda L^{-1}(\lambda)\|<+\infty. \tag{23}$$

Запишем оператор-функцию $L^{-1}(\lambda)$ следующим образом:

$$L^{-1}(\lambda)=(\lambda I+A)^{-1}(I-\hat{K}(\lambda)A(\lambda I+A)^{-1})^{-1}, \tag{24}$$

где I – тождественный в H оператор. После перехода к полярным координатам $\lambda=r\cos\varphi+ + ir\sin\varphi$ получаем неравенство

$$a/|\lambda+a|\leqslant a(r^2-2ar\sin\theta+a^2)^{-1/2}\leqslant ac(a,r,\theta),\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2},\quad a\in(\alpha_0,+\infty).$$

Отсюда и из спектральной теоремы (см. [8, с. 446]) вытекает, что справедлива оценка

$$\|A(\lambda I+A)^{-1}\|\leqslant\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}ac(a,r,\theta),\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2},\quad a\in(\alpha_0,+\infty), \tag{25}$$

из которой и неравенств (20) и (25) следует, что $\|\hat{K}(\lambda)A(\lambda I+A)^{-1}\|<1,\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2}$. Поэтому в области $G_{\theta+\pi/2}$ существует и аналитична оператор-функция $(I-\hat{K}(\lambda)A(A+\lambda I)^{-1})^{-1}$, являющаяся ограниченной в этой области, т.е.

$$\|(I-\hat{K}(\lambda)A(A+\lambda I)^{-1})^{-1}\|\leqslant\mathrm{const},\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2}. \tag{26}$$

Переходя к полярным координатам $\lambda=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$, в силу легко проверяемого неравенства $|\lambda|/|a+\lambda|\leqslant c(a,r,\theta),\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2}$, и спектральной теоремы (см. [8, с. 446]) приходим к неравенству

$$\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|\leqslant\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}rc(\alpha,r,\theta),\quad \lambda\in G_{\theta+\pi/2}, \tag{27}$$

На основании неравенств (25)–(27) и представления (24) получаем, что справедливы неравенства (23). Вследствие того, что умножение функции из пространства Харди на голоморфную и ограниченную оператор-функцию не выводит её из этого пространства, заключаем, что функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)$. Отсюда и из теоремы 2 (Пэли–Винера) вытекает, что функции $\dfrac{du}{d\tau}(\tau)$ и $Au(\tau)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_\theta,H)$.

Более того, согласно представлениям (22), (24), неравенствам (23), (25)–(27) справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda\hat{u}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)}\leqslant d_1\|\hat{f}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)}\quad\text{и}\quad\|A\hat{u}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)}\leqslant d_2\|\hat{f}(\lambda)\|_{\Re_2(S_{\theta+\pi/2},H)},$$

в силу которых и теоремы 2 получаем, что

$$\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)}\leqslant d_3\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}\quad\text{и}\quad\|Au(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}\leqslant d_4\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}.$$

Откуда и вытекает искомая оценка

$$\|u(\tau)\|_{W_2^1(S_\theta,A)}\leqslant d_0\|f(\tau)\|_{\Re_2(S_\theta,H)}. \tag{28}$$

Перейдём к случаю ненулевого вектора φ_0 в начальном условии (19). Будем искать решение задачи (18), (19) в виде суммы

$$u(\tau) = \exp(-A\tau)\varphi_0 + v(\tau),$$

где $v(\tau)$ – решение задачи вида (18), (19), для которого $v(+0) = 0$. Таким образом, для функции $v(\tau)$ получаем следующую задачу:

$$\frac{dv}{d\tau}(\tau) + Av(\tau) - \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)v(\zeta)\,d\zeta = f_1(\tau), \tag{29}$$

$$v(+0) = 0, \tag{30}$$

где

$$f_1(\tau) = f(\tau) + \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0\,d\zeta.$$

Для доказательства разрешимости задачи (29), (30) достаточно установить, что функция

$$h(\tau) = \int\limits_0^\tau K(\tau-\zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0\,d\zeta$$

принадлежит пространству $\Re_2(S_\theta, H)$ и найти её оценку. В силу теоремы 2 (Пэли–Винера) включение $h(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ равносильно тому, что преобразование Лапласа $\hat{h}(\lambda)$ функции $h(\tau)$ принадлежит пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$. Очевидно, что $\hat{h}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A(A-\lambda I)^{-1}\varphi_0$.

Покажем, что функция $\hat{h}(\lambda)$ принадлежит пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ и установим её оценку. Разложим функцию $\hat{h}(\lambda)$ по ортонормированному базису $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ из собственных векторов оператора A. Обозначим через a_j собственное значение, отвечающее вектору e_j, т.е. $Ae_j = a_je_j$ (в силу сделанных предположений об операторе A числа a_j вещественны и положительны; без нарушения общности считаем их упорядоченными по неубыванию с учётом кратности: $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_j \leqslant a_{j+1} \leqslant \ldots$). Имеем

$$\hat{h}(\lambda) = \sum_{j=1}^\infty h_j(\lambda)e_j = \sum_{j=1}^\infty \hat{K}(\lambda)a_j(a_j+\lambda)^{-1}(\varphi_0, e_j)e_j = \sum_{j=1}^\infty \hat{K}(\lambda)a_j^{1/2}(a_j+\lambda)^{-1}(a_j^{1/2}\varphi_0, e_j)e_j.$$

Заметим, что

$$\|\hat{h}(\lambda)\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\hat{K}(\lambda)|^2 \frac{a_n}{|a_n+\lambda|^2}|(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2.$$

Справедливо равенство

$$\sup_{|\varphi|<\theta+\pi/2}\int\limits_0^\infty \|\hat{h}(re^{i\varphi})\|^2\,dr = \sup_{|\varphi|<\theta+\pi/2}\int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{|a_n+re^{i\varphi}|^2}|(a_n^{1/2}\varphi_0, e_n)|^2\,dr. \tag{31}$$

Поменяем в правой части равенства (31) порядок интегрирования и суммирования и оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2+2ra_n\cos\varphi}\,dr \leqslant \int\limits_0^\infty |\hat{K}(re^{i\varphi})|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2-2a_nr\sin\theta}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \bigl|\hat K(re^{i\varphi})\bigr|^2 \frac{a_n}{(a_n^2+r^2)(1-\sin\theta)}\,dr = \frac{1}{(1-\sin\theta)}\int\limits_0^\infty \bigl|K(re^{i\varphi})\bigr|^2 \frac{dr}{a_n.(1+r^2/a_n^2)}. \tag{32}$$

Сделаем замену переменных $\zeta = r/a_n,\ d\zeta = dr/a_n.$ Тогда последний интеграл в соотношениях (32) примет вид

$$\frac{1}{(1-\sin\theta)}\int\limits_0^\infty \bigl|\hat K(a_n\zeta e^{i\varphi})\bigr|^2 \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\int\limits_0^{+\infty} \bigl|\hat K(re^{i\varphi})\bigr|^2 \frac{a_n}{a_n^2+r^2+2a_n r\cos\varphi}\,dr \leqslant \frac{\pi}{2}\sup_{\substack{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2\\ \zeta\in\mathbb{R}_+}} |\hat K(a_n\zeta e^{i\varphi})|^2 \frac{1}{1-\sin\theta} =: d_1.$$

Отсюда вытекает, что выражение в правой части равенства (31) допускает оценку

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2}\sum_{n=1}^\infty \left(\int\limits_0^{+\infty} \bigl|\hat K(re^{i\varphi})\bigr|^2 \frac{a_n}{\bigl|a_n+re^{i\varphi}\bigr|^2}\,dr\right)|(a_n^{1/2}\varphi_0,e_n)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant d_1\sum_{n=1}^\infty \bigl|(a_n^{1/2}\varphi_0,e_n)\bigr|^2 = d_1\|A^{1/2}\varphi_0\|^2,$$

из которой и равенства (31) следует, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta+\pi/2}\int\limits_0^{+\infty} \bigl\|\hat h(re^{i\varphi})\bigr\|^2\,dr \leqslant d_1\|A^{1/2}\varphi_0\|^2. \tag{33}$$

Объединяя неравенства (28) и (33), приходим к доказываемому неравенству (21) с постоянной $d = d_0\max(1,d_1).$ Теорема 5 доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и ядро* $K(\tau)$ *тождественно нулевое. Тогда существует единственное решение* $u(\tau)\in W_2^1(S_\theta,A)$ *задачи (18), (19), и это решение удовлетворяет неравенству (21).*

Замечание. Хорошо известно, что решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности при естественных предположениях о начальных данных допускает аналитическое продолжение по временно́й переменной t в угловую область комплексной плоскости. С этим тесно связана теория аналитических полугрупп операторов (см., например, монографии [7–10]).

В утверждении следствия из теоремы 5 установлена не только аналитичность решения абстрактного параболического уравнения, но и получена оценка (21) в гильбертовых пространствах $W_2^1(S_\theta,A),\ \Re_2(S_\theta,H),$ что является более глубоким результатом, чем результат об аналитичности (голоморфности) решения.

Из теоремы 5 также вытекает соответствующее утверждение при $\theta=0,$ т.е. для случая, когда задача (18), (19) рассматривается на полуоси $\mathbb{R}_+,$ а не в угловой области $S_\theta.$ При этом пространство $\Re_2(S_\theta,H)$ переходит в пространство $L_2(\mathbb{R}_+,H),$ а пространство $W_2^1(S_\theta,A)$ – в пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+,A).$

Таким образом, задача принимает следующий вид:

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) - \int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds = f(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{34}$$

$$u(+0) = \varphi_0. \tag{35}$$

Теорема 6. *Пусть в задаче (34), (35) ядро $K(t)$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$, вектор-функция $f(t)$ – пространству $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, а вектор φ_0 – пространству $H_{1/2}$ и для преобразования Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ ядра $K(\tau)$ выполняется неравенство*

$$|\hat{K}(re^{\pm i\pi/2})| \sup_{\alpha \geqslant \alpha_0} a(a^2 + r^2)^{-1/2} < 1,$$

где $a \in (\alpha_0, +\infty)$, $\alpha_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathrm{Dom}\,(A)}} (Ax, x)$, $r > 0$. Тогда эта задача имеет единственное решение $u(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$ и это решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+,A)} \leqslant d(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} + \|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(t)$ и вектора φ_0.

Отметим, что теорема 6 тесно связана с теоремой 2.1 из работы [11], а также теоремой 3.2.3 из монографии [12]. В указанных теоремах установлена корректная разрешимость начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения, близкого к уравнению (34), в весовых пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, снабжённых нормой

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A)} \equiv \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u^{(1)}(t)\|^2 + \|Au(t)\|^2)\,dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом, теорема 6 относится к случаю $\gamma = 0$. При этом в упомянутых теоремах из [11, 12] ядро интегрального оператора $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts}}{s}\,d\mu(s), \tag{36}$$

где $d\mu$ – положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ, а его преобразование Лапласа имеет вид

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s(s+\lambda)}. \tag{37}$$

Из представления (37) вытекает, что при некоторых предположениях относительно меры $d\mu(s)$ функция $\hat{K}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение из правой полуплоскости в угловую область $\{\lambda : |\arg\lambda| < \theta + \pi/2\}$, $0 < \theta < \pi/2$. Вопрос о том, когда функция $\hat{K}(\lambda)$, заданная равенством (37), удовлетворяет неравенству (20), будет рассмотрен в другой работе авторов. Отметим также, что весьма популярные в механике и, в частности, в теории вязкоупругости, ядра Работного допускают интегральное представление (36) с помощью интегралов Стилтьеса (подробнее см. [13, 14]).

Утверждения п. 2 работы, а также теоремы 1 и 2 получены при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Математические методы анализа сложных систем", теоремы 5 и 6 – при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М.М., Мартиросян В.М.* Теоремы Винера–Пэли и Мюнца–Саса // Изв. АН СССР. 1977. Сер. Мат. Т. 41. № 4. С. 868–894.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М., 1966.
3. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

4. *Власов В.В.* Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М.В. Келдыша // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1289–1293.
5. *Власов В.В.* О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Деп. в ВИНИТИ 20.08.1981 г. № 4177–81..
6. *Григорян Ш.А.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 461–489.
7. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
10. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
14. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Полугруппы операторов, порождаемые интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Совр. математика. Фунд. направления. 2021. Т. 67. № 4. С. 507–525.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.