ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 238–251

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+517.984.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕВЕЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГУРТИНА–ПИПКИНА С ЯДРАМИ РЕЛАКСАЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА СТИЛТЬЕСА

© 2022 г. А. В. Давыдов

Для интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина, ядро релаксации которого представимо в виде интеграла Стилтьеса по положительной полуоси от убывающей экспоненты, описано представление асимптотики невещественного спектра в зависимости от асимптотических характеристик меры Стилтьеса и поведения самого ядра релаксации в нуле. Продемонстрировано применение полученных результатов к наиболее широко применяемым на практике ядрам.

DOI: 10.31857/S0374064122020091

1. Введение. В работе исследуется уравнение Гуртина–Пипкина с ядром релаксации, представимым в виде интеграла Стилтьеса

$$R(t)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\,d\sigma(x),\quad t\in\mathbb{R}^+\equiv[0,+\infty). \tag{1}$$

Здесь ядро релаксации – эмпирический функциональный параметр из линейной теории вязкоупругости, используемый для описания релаксации напряжений при деформации тела. Уравнение Гуртина–Пипкина является абстрактным гиперболическим уравнением в сепарабельном гильбертовом пространстве H, возмущённым слагаемым, содержащим вольтерровы интегральные операторы:

$$u''(t)+A^2u(t)-\int\limits_0^t R(t-\tau)A^2u(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{2}$$

где A – неограниченный самосопряжённый положительный оператор в H, имеющий компактный обратный, а $u(t)$ и $f(t)$ – векторные функции $\mathbb{R}^+\to H$. Данное уравнение используется при изучении явлений, возникающих в теории вязкоупругости, в частности, при изучении движения вязкоупругой пластины при отсутствии внешнего потока жидкости или газа (см., например, [1]), а также при описании распространения тепла в средах с памятью и в задачах усреднения в многофазных средах (см. [2, 3]). Все известные в настоящее время модели, в которых применяется уравнение Гуртина–Пипкина, таковы, что ядра релаксации этих интегро-дифференциальных уравнений экспоненциально убывают на бесконечности и бесконечно возрастают при стремлении переменной ядра к нулю. Для ядра (1) эти свойства можно обеспечить, если использовать меру σ, которая не будет конечной.

Задаче Коши для уравнения (2) посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Отметим здесь работы В.В. Власова и Н.А. Раутиан [4; 5, § 3.2], в них при некоторых предположениях установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведён спектральный анализ символа уравнения (2), получена асимптотика невещественных точек спектра для ядер, представимых в виде ряда из экспонент, и локализация вещественных кластеров, на основе чего получено представление решения в виде ряда из экспонент. Кроме того, получены результаты о корректной разрешимости данной задачи. Естественное продолжение этих исследований проведено в работе [6], в которой исследуется классическое уравнение Гуртина–Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами релаксации.

В работах [7] и [8] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. В [9] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина.

Подход к решению задачи Коши для уравнения (2) с позиции теории полугрупп разработан в монографии [10] и работах [11, 12], в которых для широкого класса ядер $R(t)$ устанавливается вид генератора полугруппы и доказывается, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой. Полугрупповой подход к более общим задачам, в которых интегральное ядро имеет компактный носитель, развивался в работах Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры [13, 14]. В этих работах установлена экспоненциальная устойчивость соответствующих сжимающих полугрупп. Полугрупповой подход для исследования уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами используется в статье [15]. В ней описывается построение принципиально новой полугруппы, связанной с такими уравнениями, использующейся для доказательства экспоненциальной устойчивости решений этих уравнений, их классической разрешимости, а также для построения энергетического равенства. Кроме того, в работе [16] даётся описание полугрупп, возникающих при исследовании уравнений типа Гуртина–Пипкина с трением Кельвина–Фойгхта. Отметим также работу [17], в которой исследуется обобщённая разрешимость уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами.

В работе [18] доказано, что спектр символа интегро-дифференциального уравнения типа Гуртина–Пипкина с ненулевым слагаемым трения Кельвина–Фойгхта содержит лишь конечное число невещественных точек в спектре. В статье [19] исследуется вопрос о наличии и локализации бесконечного невещественного спектра символа этого уравнения в случае ядра, представимого бесконечной суммой экспонент, а в [20, 21] – вопросы асимптотической устойчивости решений и асимптотики спектра для модификации уравнения (2) с относительно компактным возмущением, описывающей колебание вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа.

Основная цель настоящей работы – найти асимптотику невещественного спектра символа интегро-дифференциального уравнения (2). Эта асимптотика может быть использована при исследовании высокочастотных колебаний, при определении скорости распространения волн, а также при составлении базиса Рисса в рассматриваемых задачах.

Исследование спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина ведётся достаточно давно для различных видов ядер релаксации. Здесь прежде всего необходимо отметить результаты работ [18, 5, 6].

Результаты, посвящённые спектру символа $L(z)=z^2I+(1-K(z))A^2$ уравнения (2), представлены в работе [18], в частности, при $\sigma(t)=Mt^\alpha+O(t^\rho)$, $0<\rho<\alpha<1$, в случае совпадения спектра оператора A с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел доказано

Предложение 1. *Для достаточно больших n невещественный спектр $\sigma_{\mathrm{Im}^+}(L(z))$ содержит точку z_n такую, что*

$$z_n = in + \hat{C}_1 M n^\alpha(1+\bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n\to+\infty,$$

где

$$\hat{C}_1 = \begin{cases} \pi\alpha e^{i\pi(\alpha-1)/2}/\sin(\pi\alpha), & \textit{если} \quad \alpha>0, \\ -i, & \textit{если} \quad \alpha>0. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема и следствие 1 настоящей работы обобщают результаты, представленные в [18], и могут быть применены к другим описанным в [18] операторным функциям.

В монографии [5, гл. 3] исследован невещественный спектр символа $L(z)$ уравнения (2) при $R(t)=\sum_{j=1}^\infty c_j e^{-\gamma_j t}$ в случае степенной зависимости величин c_j и γ_j от j. Следствие 5 дополняет этот результат из [5] и, в частности, исчерпывает случай степенного стремления c_j к $+\infty$ при $j\to+\infty$.

Отметим, что в работе [6] также обобщаются результаты монографии [5, гл. 3], но на уравнение (2) с дробно-экспоненциальным ядром

$$R(t)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)},$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

2. Постановка задачи. Обозначим через $\mathbf{F}[0,+\infty)$ класс неотрицательных непрерывных слева функций $\sigma(t)$ на $[0,+\infty)$ таких, что интеграл Стилтьеса $\int_1^{+\infty}t^{-1}\,d\sigma(t)$ существует и конечен и $\sigma(0)=0$.

Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения (2):

$$u''(t)+A^2u(t)-R(t)*A^2u(t)=f(t), \tag{4}$$

$$u(0)=\varphi_0, \tag{5}$$

$$u'(0)=\varphi_1. \tag{6}$$

Здесь u и f – векторные функции из $\mathbb{R}^+$ в сепарабельное гильбертово пространство H; $*$ – операция свёртки; A – неограниченный самосопряжённый положительный оператор в H, имеющий компактный обратный; функция $R(t)$ определяется равенством (1). Корректная разрешимость данного уравнения обоснована, например, в монографиях [10] (в классическом смысле) и [5] (в пространствах Соболева).

Как следует из теоремы Гильберта–Шмидта, в пространстве H имеется ортонормированный базис из собственных векторов e_n, $n\in\mathbb{N}$, оператора A; собственные значения, отвечающие вектору e_n, обозначим через a_n, $n\in\mathbb{N}$ $(a_n>0)$, т.е $Ae_n=a_ne_n$.

Применение преобразования Лапласа к левой части уравнения (4) приводит к оператор-функции

$$L(z)=z^2I+(1-K(z))A^2,$$

которая называется *символом* исходного уравнения. Здесь $K(z)$ – преобразование Лапласа функции $R(t)$ из (1), т.е.

$$K(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{z+t}.$$

Определение. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ называется множество всех значений $z\in\mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(z)$ существует и ограничена. Дополнение $\sigma(L)$ множества $R(L)$ в комплексной плоскости, т.е. $\sigma(L)=\mathbb{C}\setminus R(L)$, называется *спектром* оператор-функции $L(z)$.

Необходимо найти асимптотику спектра $\sigma(L)$ символа уравнения (4).

Рассмотрим проекции на одномерное собственное подпространство $\operatorname{span}e_n$ вектора $L(z)e_n$, т.е. функцию

$$l_n(z)\equiv(L(z)e_n,e_n)=z^2+(1-K(z))a_n^2,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{7}$$

Тогда спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$ представляет собой замыкание множества нулей функций $l_n(z)$, т.е.

$$\sigma(L)=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}:l_n(z)=0\}}.$$

Нас будет интересовать невещественный спектр уравнения (4):

$$\sigma_{\mathrm{Im}}(L)=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\neq0,\quad l_n(z)=0\}}=$$

$$=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0,\quad l_n(z)=0\}}\cup\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0,\quad l_n(z)=0\}}.$$

Заметим также, что из вещественности коэффициентов в (7) вытекает, что спектр $\sigma(L)$ симметричен относительно вещественной оси. Поэтому для нахождения невещественного спектра достаточно найти только спектр в верхней полуплоскости:

$$\sigma_{\mathrm{Im}^+}(L) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0, \quad l_n(z) = 0\}}.$$

3. Основные результаты.

Предложение 2. *Функция $l_n(z)$, определённая равенством (7), при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет в верхней полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ только один нуль μ_n^+.*

Доказательство сформулированного предложения приведено в работе [18].

Введём обозначение
$$\hat\sigma(x, v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ и выполняется условие асимптотической равномерной масштабируемости: существует $r(x) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ такая, что*

$$\lim_{v\to+\infty} \hat\sigma(x, v) = r(x) \quad \text{для любого} \quad x > 0. \tag{9}$$

Пусть, кроме того, существуют $v_0 > 0$ и $\sigma_1(x) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$, при которых выполняется неравенство
$$\sup_{v\geqslant v_0} \hat\sigma(x, v) < \sigma_1(x) \quad \text{для любого} \quad x > 0. \tag{10}$$

Тогда имеет место асимптотическое представление

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $C_1 = \int_0^{+\infty} (i + q)^{-1}\, dr(q)$.

Следствие 1. *Пусть $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha (\ln x)^\beta (1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{11}$$

где $M > 0$, а $\beta \in \mathbb{R}$, если $0 < \alpha < 1$, и $\beta \geqslant 0$, если $\alpha = 0$.

Тогда
$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat C_1}{2i} M(a_n)^\alpha (\ln a_n)^\beta (1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где величина $\hat C_1$ определена равенством (3).

Следствие 2. *Пусть $\sigma(t)$ – неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что интеграл Стилтьеса $\int_0^{+\infty} d\sigma(t)$ конечен. Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{\sigma(+\infty)}{2}(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $\sigma(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sigma(x)$.

Следствия 1 и 2 можно также сформулировать в терминах ядра релаксации $R(t)$.

Следствие 3. *Пусть $\sigma(t)$ – неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что интеграл Стилтьеса $\int_0^{+\infty} t^{-1}\, d\sigma(t)$ конечен и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha (\ln x)^\beta (1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $M > 0$, а $\beta \in \mathbb{R}$, если $0 < \alpha < 1$, и $\beta \geqslant 0$, если $\alpha = 0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i\Gamma(\alpha+1)} R(1/a_n)(1+\bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

где $\Gamma(t)$ *– гамма-функция Эйлера, а величина* $\hat{C}_1$ *определена равенством (3).*

Следствие 4. *Пусть* $\sigma(t)$ *– неубывающая неотрицательная непрерывная слева функция на* $[0, +\infty)$ *такая, что интеграл Стилтьеса* $\int_0^{+\infty} d\sigma(t)$ *конечен. Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{R(0)}{2}(1+\bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Если $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty}(\gamma_j + z)^{-1} c_j = \int_0^{+\infty}(z+t)^{-1}\, d\sigma(t)$, то функция $\sigma(t)$ – кусочно-постоянная, имеющая скачки в точках γ_j, равные c_j. Найдём асимптотическое представление функции $\sigma(t)$ при $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty}(\gamma_j + z)^{-1} c_j$ для некоторых c_j, γ_j – его даёт

Утверждение 1. *Пусть* $c_j = f(j)$, $\gamma_j = g(j)$, *где* $f(x)$ *– монотонная непрерывная положительная функция* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и* $g(x)$ *– возрастающая положительная функция* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$. *Пусть, кроме того, для первообразной* $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ *функции* f *выполняются соотношения*

$$F(t) \to +\infty \quad \textit{и} \quad f(t)/F(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{12}$$

Тогда $\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1+\bar{o}(1))$ $(t \to +\infty)$. *Здесь* g^{-1} *– обратная в функциональном смысле к* g *функция.*

Утверждение 1 позволяет сформулировать следствие 1 для степенных c_j, γ_j.

Следствие 5. *Пусть* $K(z) = \sum_{j=1}^{+\infty}(\gamma_j + z)^{-1} c_j$, *где* $c_j = Mj^\alpha$, $\gamma_j = Bj^\beta$, *а* $M, B > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geqslant -1$, $\alpha - \beta < -1$.

Тогда при $\alpha > -1$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{W}{2i}\frac{M}{B^s(\alpha+1)}(a_n)^s(1+\bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

где $s = (\alpha+1)/\beta$ *и* $W = \pi s e^{i\pi(s-1)/2}/\sin(\pi s)$, *а при* $\alpha = -1$ *– представление*

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{M}{\beta}\ln(a_n)(1+\bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

4. Доказательства. Имеет место

Утверждение 2. *Если* $\sigma_0(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$, *то* $\sigma_0(t)/t \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Достаточно считать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t) = +\infty$, в противном случае утверждение очевидно.

Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\sigma(t) \neq 0$, т.е. существуют константа $P > 0$ и возрастающая последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такие, что $\sigma_0(t_k) > Pt_k$.

Тогда, так как $\int_0^{+\infty} t^{-1}\, d\sigma_0(t) < +\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} < +\infty. \tag{13}$$

Но в то же время

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} \geqslant \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{t_{k+1}} > \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})/P}, \tag{14}$$

так как $\sigma_0(t_{k+1}) \to +\infty$ при $k \to +\infty$. В силу неравенств (13) и (14) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \tag{15}$$

сходится; в частности, $(\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k))/\sigma_0(t_{k+1}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Следовательно, $\varepsilon_k = \sigma_0(t_k)/\sigma_0(t_{k+1}) \to 1 - 0$ (так как $\sigma_0(t)$ неубывает и $\sigma_0(t_k)/\sigma_0(t_{k+1}) \leqslant 1$).

Далее, в некоторой левой окрестности точки 1 (пусть в окрестности $(r,1]$) выполняется неравенство $1 - x \geqslant -(\ln x)/2$. Выберем k_0 таким, чтобы при $k > k_0$ имело место включение $\varepsilon_k \in (r,1]$. Естественно, сходимость ряда (15) влечёт за собой сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k). \tag{16}$$

Так как $\varepsilon_k \in (r,1]$ и на $(r,1]$ выполняется неравенство $1 - x \geqslant -(\ln x)/2$, то из равенства (16) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (-\ln \varepsilon_k) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(-\ln \frac{\sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})}\right) =$$

$$= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\ln \sigma_0(t_{k+1}) - \ln \sigma_0(t_k)) = \lim_{k\to\infty} \ln \sigma_0(t_k) - \ln \sigma_0(t_{k_0+1}).$$

Так как $t_k \to +\infty$, то $\sigma_0(t_k) \to +\infty$ и, значит, $\ln \sigma_0(t_k) \to +\infty$. Противоречие. Следовательно, $\sigma_0(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что справедлива

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (11). Тогда*

$$K(ia_n) = C_1 \frac{\sigma(a_n)}{a_n}(1 + \bar{o}(1)) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{17}$$

Кроме того, если $D = \{z : |z - ia_n| < |C_1|\sigma(a_n)\}$, *то*

$$\max_{\overline{D}} |K'(z)| \leqslant C_2 \sigma(a_n)/a_n^2 \tag{18}$$

для некоторой константы C_2 *при достаточно большом* n.

Для доказательства леммы 1 нам понадобятся два утверждения.

Утверждение 3. *Пусть заданы конечные последовательность* M_i, $i = \overline{1,n}$, *неотрицательных чисел и возрастающая последовательность* t_i, $i = \overline{1,n}$, *положительных чисел. Пусть также числа* $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leqslant v_i \leqslant M_i$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда максимум суммы* $s(v_1,\ldots,v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{-1}(v_{i+1} - v_i)$ *достигается при* $v_1 = 0$ *и* $v_i = M_i$, $i = \overline{2,n}$.

Доказательство. Так как

$$\frac{\partial s}{\partial v_{i+1}} = \frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_{i+1}} > 0, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial s}{\partial v_1} = -\frac{1}{t_1} < 0,$$

то функция $s(v_1,\ldots,v_n)$ возрастает по каждой из переменных, начиная со второй, и убывает по первой, а значит, достигает своего максимума при $v_i = M_i$, $i = \overline{2,n}$, и $v_1 = 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Пусть* $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ *и при* $t > N$ *выполняется неравенство* $\sigma_2(t) < \sigma_1(t)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_2(t)}{t} \leqslant \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t}. \tag{19}$$

Доказательство. При $M > N$ имеем

$$\int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i},$$

где $t_i = N + i(M-N)/n$ – положительная неубывающая последовательность. Тогда, применяя утверждение 3 при $v_i = \sigma_2(t_i)$ и $M_i = \sigma_1(t_i)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_{i+1} - v_i}{t_i} \leqslant \frac{M_2}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{t_i} = \frac{\sigma_1(t_2)}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i)}{t_i}.$$

Устремляя n к $+\infty$, будем иметь $t_2 \to N$, $t_1 \to N$, а значит,

$$\int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} \leqslant \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{M} \frac{d\sigma_1(t)}{t},$$

поэтому, устремляя M к $+\infty$, приходим к неравенству (19). Утверждение доказано.

Доказательство леммы 1. Проводя замену $t = qa_n$, получаем

$$K(ia_n) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t + ia_n} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{a_n(i+q)} = \frac{1}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{i+q} = \frac{\sigma(a_n)}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{i+q}\, d\biggl(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\biggr). \tag{20}$$

Для того чтобы получить представление (17), необходимо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{i+q}\, d\biggl(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\biggr) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\hat\sigma(q, a_n)}{i+q} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i+q} = C_1, \tag{21}$$

где функция $\hat\sigma$ определена равенством (8).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него выберем N и n достаточно большими – такими, что выполняются следующие три неравенства:

$$1)\ \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t} < \varepsilon; \quad 2)\ \biggl|\int\limits_0^{N} \frac{d\hat\sigma(q, a_n)}{i+q} - \int\limits_0^{N} \frac{dr(q)}{i+q}\biggr| < \varepsilon; \quad 3)\ \int\limits_N^{+\infty} \frac{dr(q)}{q} < \varepsilon.$$

Возможность осуществить неравенство 1) следует из утверждения 2 и предположения (10). Выполнимость неравенства 2) вытекает из теоремы Хелли, которую содержит

Предложение 3 (первая теорема Хелли). *Пусть функции* Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, *с ограниченным изменением на отрезке* $[a, b]$ *поточечно на этом отрезке сходятся к некоторой функции* Φ, *причём полные изменения функций ограниченны в совокупности*)*

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

*) Через V_a^b здесь и далее обозначается вариация функции на отрезке $[a, b]$.

Тогда предельная функция Φ *тоже имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной функции* f *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\Phi(x).$$

Доказательство этой теоремы Хелли см. в [22, гл. VI, § 6.5].

Действительно, положив $\Phi_n(q)=\hat\sigma(q,a_n)$, $\Phi(q)=r(q)$, $a=0$, $b=N$, в силу условия (9) будем иметь поточечную сходимость. Кроме того, последовательность $d_n=V_0^N[\Phi_n]=\sigma(Na_n)/\sigma(a_n)$ сходится к $g(N)$, а значит, ограничена, что и влечёт за собой неравенства (22). Неравенство 3) можно осуществить в силу условия (9).

Окончательно получаем

$$\bigg|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{i+q}\bigg|\leqslant\bigg|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\bigg|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{|i+q|}\leqslant$$

$$\leqslant\bigg|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\bigg|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{q}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{q}<3\varepsilon \tag{23}$$

согласно условиям 1)–3), а также результату (19) утверждения 4 при $\sigma_2(q)=\hat\sigma(q,a_n)$. Из этого и следует соотношение (21).

Докажем теперь оценку (18). Выберем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\sigma(a_n)/a_n<1/(2|C_1|)$. Тогда круг D из условия леммы 1 содержится в круге $D_0=\{z:|z-ia_n|<a_n/2)\}$. Далее, проведём при $t=a_nq\in\mathbb{R}^+$ следующие оценки:

$$|z+t|^2\geqslant|\mathrm{Im}\,(z+t)||z+t|\geqslant|\mathrm{Im}\,z||z+t|\geqslant\frac{a_n}{2}|z+t|\geqslant\frac{a_n}{2}(|t+ia_n|-|ia_n-z|)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\bigg(1-\frac{|ia_n-z|}{|t+ia_n|}\bigg)\geqslant\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\bigg(1-\frac{|ia_n-z|}{|\mathrm{Im}\,(t+ia_n)|}\bigg)=$$

$$=\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\bigg(1-\frac{|ia_n-z|}{a_n}\bigg)>\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\bigg(1-\frac{a_n/2}{a_n}\bigg)=\frac{a_n}{4}|t+ia_n|=\frac{a_n^2}{4}|i+q|.$$

Таким образом, при $z\in D_0$ имеем

$$|K'(z)|=\bigg|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t+z)^2}\bigg|\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{|t+z|^2}\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{a_n^2|i+q|/4}=\frac{4}{a_n^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|}. \tag{24}$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых устанавливались соотношения (20)–(23), но заменяя в них $i+q$ на модуль $|i+q|$, несложно получить, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|}=\sigma(a_n)(C_3+\overline{o}(1)),\quad\text{где}\quad C_3=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}. \tag{25}$$

Из (24), (25) следует, что оценка (18) выполняется при достаточно большом n, если положить в ней $C_2=8C_3$, что и требовалось доказать.

Утверждение 5. *Пусть* $h(z)$ *– некоторая комплексная функция,* $a,b,z_0\in\mathbb{C}$ *и функция* $h_1(z)$ *определена равенством* $h_1(z)=h(z)-a-b(z-z_0)$. *Если найдётся* $c\in(|b|,+\infty)$, *при котором выполнены следующие условия:*

1) круг $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leqslant r\}$, *где* $r = z_0 - \dfrac{a}{b}$ *и* $r = \left|\dfrac{a}{b}\right| \dfrac{c}{|b| - c}$, *целиком содержится в области определения функции* $h_1(z)$,

2) при всех $z \in B$ *справедливо неравенство* $|h_1(z)| < c|z - z_0|$,
то в круге B *функция* $h(z)$ *имеет единственный нуль.*

Доказательство. Верно равенство $h(z) = f_1(z) + h_1(z)$, где $f_1(z) = a + b(z - z_0)$. Линейная функция $f_1(z)$ имеет единственный нуль (в точке z_1), а её модуль на границе ∂B постоянен: $|f_1(z)| = |b|r$. Кроме того, на границе ∂B справедлива оценка

$$|g_1(z)| < c|z - z_0| = c|z_1 + re^{i\varphi} - z_0| = c|re^{i\varphi} - a/b| \leqslant c\left(r + \left|\frac{a}{b}\right|\right) = c\left|\frac{a}{b}\right|\left(\frac{c}{|b| - c} + 1\right) =$$

$$= c\left|\frac{a}{b}\right|\frac{|b|}{|b| - c} = |b|\left|\frac{a}{b}\right|\frac{c}{|b| - c} = |b|r = |f_1(z)|.$$

Значит, по теореме Руше в области $B \setminus \partial B$ существует и единственен нуль функции $h(z)$. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)$, $g(z)$ *– голоморфные функции в области* $D \subset \mathbb{C}$ *и выполнены следующие условия:*

1) в области D *функция* $f(z)$ *имеет единственный нуль в точке* z_0 *(пусть* $g(z_0) = g_0$*);*

2) справедливо представление $f'(z) = C + v(z)$, *где* C *– константа и* $|v(z)| < V$ *при* $z \in D$;

3) выполняется оценка $|g'(z)| \leqslant G$ *в области* D;

4) имеет место неравенство $G + V < |C|$;

5) круг $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leqslant r\}$, *где* $r = \left|\dfrac{g_0}{C}\right| \dfrac{G + V}{|C| - V - G}$ *и* $z_1 = z_0 - \dfrac{g_0}{C}$, *содержится в области* D.

Тогда функция $f(z) + g(z)$ *в круге* B *имеет единственный нуль.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(z) = f(z) + g(z) = f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)\,dz + g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} g'(z)\,dz =$$

$$= 0 + \int\limits_{z_0}^{z} (C + v(z))\,dz + g_0 + \int\limits_{z_0}^{z} g'(z)\,dz = g_0 + C(z - z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} (v(z) + g'(z))\,dz.$$

Тогда можно применить предыдущее утверждение, так как

$$\left|\int\limits_{z_0}^{z} (v(z) + g'(z))\,dz\right| \leqslant \max_{B} |v(z) + g'(z)||z - z_0| \leqslant \sup_{D} |v(z) + g'(z)||z - z_0| \leqslant (V + G)|z - z_0|$$

при $a = g_0$, $b = C$, $c = G + V$. Лемма доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы. Выберем при достаточно большом n (т.е. при $n > n_0$, где n_0 будет указано ниже) $z_0 = ia_n$, и пусть $D = \{z : |z - z_0| < |C_1|\sigma(a_n)\}$. С помощью леммы 2 оценим местоположение нуля функции $l_n(z)$. Положим $f(z) = z^2 + a_n^2$, $g(z) = -a_n^2 K(z)$. В области D можно записать $f'(z) = 2z = 2ia_n + 2(z - ia_n)$.

В обозначениях леммы 2 очевидно, что $C = 2ia_n$, $V = 2|C_1|\sigma(a_n)$. Кроме того, согласно лемме 1 выполнено $g_0 = -a_n^2 C_1 a_n^{-1}\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)) = C_1 a_n \sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1))$. Положим далее n достаточно большим – таким, что выполняется оценка (18) с некоторой константой C_2. В этом случае константу G можно положить равной $C_2\sigma(a_n)$.

Положим, следуя условию 5) леммы 2,

$$r_n = 2\frac{|g_0|}{|C| - V - G}\frac{G + V}{|C|} = 2\frac{|C_1|a_n\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1))}{2a_n - 2|C_1|\sigma(a_n) - C_2\sigma(a_n)}\frac{2|C_1|\sigma(a_n) + C_2\sigma(a_n)}{2a_n} =$$

$$= 2\frac{|C_1|\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\sigma(a_n)/a_n}\frac{2|C_1|+C_2}{2}\frac{\sigma(a_n)}{a_n} = 2\frac{(\sigma(a_n))^2}{a_n}\frac{|C_1|(1+\bar{o}(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\sigma(a_n)/a_n}\frac{2|C_1|+C_2}{2}.$$

Так как, согласно утверждению 2, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma(a_n)/a_n) = 0$, то при $n\to\infty$ последовательности r_n и $a_n^{-1}(\sigma(a_n))^2$ эквивалентны. Значит, $r_n = \bar{o}(\sigma(a_n))$. Вспоминая, что

$$z_1 = z_0 - g_0/C = ia_n + \frac{C_1 a_n\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))}{2ia_n} = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)), \tag{26}$$

видим, что круг $B = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_1| < r_n\}$ при достаточно большом n содержится в области D. Действительно, если $|z-z_1| < r_n$, то при достаточно большом n выполняется неравенство

$$|z-z_0| \leqslant |z-z_1| + |z_1-z_0| < r_n + \left|\frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))\right| =$$

$$= |C_1|\sigma(a_n)\frac{|1+\bar{o}(1)|}{2} + \bar{o}(\sigma(a_n)) < |C_1|\sigma(a_n). \tag{27}$$

Таким образом, при достаточно большом n выполнено условие 4) леммы 2 (здесь мы берём n достаточно большим, чтобы выполнялись оценки (18) и (27)). Тогда применима лемма 2 и в круге B находится ровно один нуль функции $l_n(z)$.

В итоге имеет место (с учётом (26)) представление

$$\mu_n^+ = z_1 + \bar{o}(\sigma(a_n)) = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)) + \bar{o}(\sigma(a_n)) = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)),$$

так как $r_n = \bar{o}(\sigma(a_n))$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Запишем представление (11) в эквивалентной форме

$$\sigma(x) = Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1+d(x)), \qquad \lim_{x\to+\infty} d(x) = 0. \tag{28}$$

Докажем, что для $\sigma(x)$ имеет место

Утверждение 6. Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{v\to+\infty}\hat{\sigma}(x,v) = x^\alpha$, $x>0$;

2) для некоторых констант $v_0>0$, $S>0$ *и для любых* $\theta\in(\alpha,1)$, $x>e$, $v>v_0$ *выполняется оценка* $\hat{\sigma}(x,v)\leqslant Sx^\theta$;

3) $\hat{\sigma}(0,v) = 0$.

Доказательство. Сначала отметим следующее свойство: если $\sigma(x) = \sigma_1(x)\sigma_2(x)$, то

$$\hat{\sigma}(x,v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)} = \frac{\sigma_1(xv)}{\sigma_1(v)}\frac{\sigma_2(xv)}{\sigma_2(v)} = \hat{\sigma}_1(x,v)\hat{\sigma}_2(x,v). \tag{29}$$

Далее,

$$(Mxv)^\alpha/(Mv)^\alpha = x^\alpha, \tag{30}$$

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta} = \left(1+\frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta \to 1 \quad \text{при} \quad v\to+\infty, \tag{31}$$

$$\frac{1+d(xv)}{1+d(v)} \to 1, \quad \text{так как} \quad d(v)\to 0, \quad d(xv)\to 0 \quad \text{при} \quad v\to+\infty. \tag{32}$$

Учитывая полученные выше соотношения (11)–(32), несложно показывается, что свойство 1) утверждения выполняется.

Заметим, что так как для функции $y(x) = x^\tau/\tau - \ln x$ справедливы неравенства

$$y(1) = 1/\tau > 0 \quad \text{и} \quad y'(x) = x^{\tau-1} - x^{-1} = \frac{x^\tau - 1}{x} > 0, \quad \text{где} \quad x>1, \quad \tau>0,$$

то функция $y(x)$ положительна, $x > 1$, $\tau > 0$, а значит,

$$\ln x < x^\tau/\tau, \quad x > 1, \quad \tau > 0. \tag{33}$$

Тогда, используя (31), (33), получаем, что при $v > e$, $x > e$, $\beta \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta < (1 + \ln x)^\beta < (2\ln x)^\beta < 2^\beta \frac{x^{\beta\beta_1}}{\beta_1^\beta} \tag{34}$$

для любого $\beta_1 > 0$, а при $\beta < 0$ – неравенство

$$\frac{(\ln(xv))^\beta}{(\ln v)^\beta} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln v}\right)^\beta < 1. \tag{35}$$

Кроме того, если взять v_0 таким, чтобы при $v > v_0$ выполнялась оценка $|d(v)| < 1/2$, то при таких v и при $x > e > 1$ будем иметь

$$\frac{1 + d(xv)}{1 + d(v)} < \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3, \tag{36}$$

так как $xv > v > v_0$. В итоге на основании (28)–(30), (35), (36) получаем при $v > v_0$, $x > e$, $\beta < 0$, что справедлива оценка

$$\hat{\sigma}(x, v) < 3x^\alpha < 3x^\theta,$$

а при $v > v_0$, $x > e$, $\beta \geqslant 0$, $\beta_1 = (\theta - \alpha)/\beta$ – оценка

$$\hat{\sigma}(x, v) < 3\frac{x^{\beta\beta_1 + \alpha}}{\beta_1^\beta} = \frac{3 \cdot 2^\beta}{\beta_1^\beta} x^\theta.$$

Свойство 2) утверждения установлено.

Свойство 3) утверждения следует из того, что $\hat{\sigma}(0, v) = \sigma(0)/\sigma(v) = 0$. Утверждение доказано.

В обозначениях теоремы работы с помощью утверждения 6 заключаем, что

$$r(q) = \begin{cases} q^\alpha, & q > 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases} \qquad \sigma_1(x) = \begin{cases} Sx^\theta, & x > e, \\ Se^\theta, & x \leqslant e. \end{cases} \tag{37}$$

Равенство (21) при $\alpha > 0$ вытекает из того, что (см., например, [23, задача 28.22])

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dq^\alpha}{z + q} = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} z^{\alpha - 1},$$

а при $\alpha = 0$ – из того, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i + q} = \frac{1}{i + 0}(r(0+) - r(0)) + \int\limits_{0+}^{+\infty} \frac{d1}{i + q} = \frac{1}{i} + 0 = \frac{1}{i}. \tag{38}$$

Доказательство следствия 2. Следствие 2 представляет собой частный случай следствия 1 при $\alpha = \beta = 0$, $M = \sigma(+\infty)$, т.е. случай конечной меры Стилтьеса $\sigma(t)$. В данном случае функция

$$r(q) = \begin{cases} 1, & q > 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases}$$

является функцией Хевисайда на $\mathbb{R}^+$, значение которой в нуле заменено нулём.

Доказательство следствий 3, 4. Докажем вначале следствие 3. Используя вместо функции $i+q$ функцию e^q и проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых устанавливались соотношения (20)–(23), получаем

$$R(1/a_n) = \int_0^{+\infty} e^{-t/a_n}\,d\sigma(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{e^{t/a_n}} = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{e^q} = \sigma(a_n)\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^q}\left(\frac{d\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right) =$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{39}$$

так как аналогично (21) имеем при $\alpha > 0$ равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^q}\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-q}dr(q) = \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$$

вследствие того, что функция $r(q)$ задаётся так же, как и в (37). При $\alpha = 0$ по аналогии с (38) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^q}\left(\frac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right) = e^0(r(0+)-r(0)) = 1 = \Gamma(\alpha+1).$$

Тогда, заменяя асимптотику $\sigma(a_n)$ согласно соотношению (39), приходим к утверждению следствия 3.

Следствие 4 – частный случай следствия 3 для конечной меры $\sigma(x)$.

Доказательство утверждения 1. Очевидны равенства

$$\sigma(t) = \int_0^t d\sigma = \sum_{j:\gamma_j<t} c_j = \sum_{j:\gamma_j<t} c_j = \sum_{j:g(j)<t} f(j) = \sum_{j:j<g^{-1}(t)} f(j) = \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j).$$

Допустим, что функция $f(y)$ убывает. Тогда при $y\in[j,j+1]$ выполняются неравенства $f(y-1)\geqslant f(j)\geqslant f(y)$, а значит, верны неравенства

$$f(1)\geqslant f(1)\geqslant \int_1^2 f(y)\,dy,$$

$$\int_{j-1}^{j} f(y)\,dy = \int_j^{j+1} f(y-1)\,dy \geqslant f(j) \geqslant \int_j^{j+1} f(y)\,dy, \quad j=\overline{2,[g^{-1}(t)]},$$

$$f(1)+\int_1^{[g^{-1}(t)]} f(y)\,dy \geqslant \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j) \geqslant \int_1^{[g^{-1}(t)]+1} f(y)\,dy.$$

Итак,

$$f(1)+F([g^{-1}(t)]) \geqslant \sigma(t) \geqslant F([g^{-1}(t)]+1). \tag{40}$$

Так как f положительна и непрерывна, то F возрастает и дифференцируема, кроме того, по условию $F(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Следовательно, при некотором $|\theta|<1$ будем иметь

$$|\sigma(t)-F(g^{-1}(t))| \leqslant F([g^{-1}(t)])+f(1)-F([g^{-1}(t)]) = f(1)+f(g^{-1}(t)+\theta) = \bar{o}(F(g^{-1}(t))),$$

так как согласно условию $f(t) = \bar{o}(F(t))$. Это следует из соотношений (12), (40), так как $f(1) = \bar{o}(F(g^{-1}(t)))$. Поэтому

$$\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{41}$$

Допустим, что функция $f(y)$ возрастает. Тогда при $y \in [j, j+1]$ выполняются неравенства $f(y-1) \leqslant f(j) \leqslant f(y)$, а значит, верны неравенства

$$f(1) \leqslant f(1) \leqslant \int\limits_1^2 f(y)\,dy,$$

$$\int\limits_{j-1}^{j} f(y)\,dy = \int\limits_{j}^{j+1} f(y-1)\,dy \leqslant f(j) \leqslant \int\limits_{j}^{j+1} f(y)\,dy, \quad j = \overline{2, [g^{-1}(t)]},$$

$$f(1) + \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]} f(y)\,dy \leqslant \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j) \leqslant \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]+1} f(y)\,dy.$$

Итак,

$$F([g^{-1}(t)]) \leqslant f(1) + F([g^{-1}(t)]) \leqslant \sigma(t) \leqslant F([g^{-1}(t)] + 1). \tag{42}$$

Так как f положительна, возрастает и непрерывна, то F возрастает и дифференцируема, кроме того, $F(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, при некотором $|\theta| < 1$ будем иметь

$$|\sigma(t) - F(g^{-1}(t))| \leqslant F([g^{-1}(t)] + 1) - F([g^{-1}(t)]) = f(g^{-1}(t) + \theta) = \bar{o}(F(g^{-1}(t))),$$

так как согласно условию $f(t) = \bar{o}(F(t))$. Это следует из соотношений (12), (42). Поэтому верно представление (41). Утверждение доказано.

Доказательство следствия 5. Согласно предположению следствия $g^{-1}(t) = (t/B)^{1/\beta}$, а

$$F(t) = \begin{cases} Mt^{\alpha+1}/(\alpha+1), & \alpha > -1, \\ M \ln t, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Значит,

$$F(g^{-1}(t)) = \begin{cases} MB^{-s}t^s/(\alpha+1), & \alpha > -1, \\ (\ln t - \ln B)/\beta, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Для завершения доказательства остаётся применить утверждение 2 и следствие 1. Следствие доказано.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи, научное руководство и активную поддержку, а также участникам научного семинара “Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ”, в особенности Н.А. Раутиан, за поддержку и ценные советы.

Автор признателен рецензенту за конструктивные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова научной школе “Математические методы анализ сложных систем”, руководимой акад. В.А. Садовничим, а также при финансовой поддержке фонда развития теоретической физики и математики “Базис”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М., 2006.
2. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
3. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.

4. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 75–113.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
7. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
8. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. 2005. V. 52. P. 143–165.
9. *Rivera J.E.M., Naso M.G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // Asympt. Anal. 2006. V. 49. P. 189–204.
10. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory, Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
11. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. for Rat. Mech. and Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
12. *Fabrizio M., Giorgi C., Pata V.* A New approach to equations with memory // Arch. for Rat. Mech. and Anal. 2010. V. 198. P. 189–232.
13. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 6. С. 924–928.
14. *Закора Д.А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 5. С. 702–719.
15. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1122–1126.
16. *Тихонов Ю.А.* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающих в задачах теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 808–822.
17. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений наследственной механики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 78–87.
18. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. № 43. P. 2296–2306.
19. *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1663–1677.
20. *Давыдов А.В.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 2020. № 2. С. 15–22.
21. *Davydov A.V.* Asymptotics of the spectrum of an integro-differential equation arising in the study of the flutter of a viscoelastic plate // Rus. J. of Math. Phys. 2021. T. 28. № 2. C. 188–197.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2012.
23. *Евграфов М.А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М., 1972.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.10.2021 г.
После доработки 27.12.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.