ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 252–259

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский

Для управляемой системы со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств и геометрическим ограничением, представляющим собой непустое замкнутое выпуклое множество, получены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений в терминах производных первого порядка отображений, задающих смешанные ограничения. Кроме того, в терминах производных первого и второго порядков этих отображений найдены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений, применимые и в случае вырождения первых производных указанных отображений.

DOI: 10.31857/S0374064122020108

Введение. Пусть для управляемой системы

$$\dot{x} = F(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

смешанные и геометрические ограничения имеют соответственно вид

$$G^1(x,u,t) = 0, \quad G^2(x,u,t) \leqslant 0 \tag{2}$$

и

$$u(x,t) \in U. \tag{3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления, $t \geqslant t_0$ – время, отображение $F\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ задано и является непрерывным по первой и второй переменным, измеримым по третьей переменной и ограниченным в окрестности фиксированной точки (x_0,u_0,t_0); заданное множество $U \subset \mathbb{R}^m$ непусто, замкнуто и выпукло. Вектор-функции $G^l\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{s_l}$, $l = 1,2,$ непрерывны; соотношения (2) выполняются покоординатно.

Под *управлением* понимается непрерывная функция u переменных x и t, определённая в некоторой окрестности точки (t_0,x_0) и такая, что $u(x,t) \in U$.

Будем говорить, что система (1)–(3) *локально разрешима* в точке (x_0,u_0,t_0), если существует окрестность Ω точки (x_0,t_0), непрерывное отображение $\bar{u} : \Omega \to U$, число $\tau > 0$ и абсолютно непрерывная функция $\bar{x} : [t_0, t_0+\tau) \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\bar{u}(x_0,t_0) = u_0$, при всех $t \in [t_0,t_0+\tau)$ выполнены соотношения

$$G^1(\bar{x}(t),\bar{u}(\bar{x}(t),t),t) = 0, \quad G^2(\bar{x}(t),\bar{u}(\bar{x}(t),t),t) \leqslant 0$$

и функция $\bar{x}(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x},\bar{u}(\bar{x},t),t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0, \tag{4}$$

т.е. $\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t),\bar{u}(\bar{x}(t),t),t)$ при п.в. $t \in [t_0,t_0+\tau)$ и $\bar{x}(t_0) = x_0$. Указанную функцию $\bar{u}(\cdot)$ принято называть *допустимым позиционным управлением*, а пару $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ – *допустимым процессом.*

Наша цель заключается в том, чтобы получить достаточные условия локальной разрешимости для системы (1)–(3) как в терминах первой производной отображений G^1 и G^2, так и в терминах второй производной этих отображений.

1. Регулярность первого порядка. В этом пункте работы в терминах первой производной приведём условия регулярности смешанных ограничений. Предположим, что

$$G^1(x_0,u_0,t_0) = 0, \quad G^2(x_0,u_0,t_0) \leqslant 0.$$

Обозначим через I множество всех тех индексов $i \in \{1, \ldots, s_2\}$, для которых i-я компонента $G^{2,i}(x_0, u_0, t_0)$ вектора $G^2(x_0, u_0, t_0)$ равна нулю. Для вектор-функции G^l, $l = 1, 2$, через ${G^l}_u$ обозначим матрицу её первых частных производных по компонентам вектора u, а для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^m$ через $({G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i$ – i-ю компоненту вектора ${G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi \in \mathbb{R}^{s_2}$.

Теорема 1. *Пусть отображения F и G^l, $l = 1, 2$, непрерывны, отображения G^l строго дифференцируемы по u в точке (x_0, u_0, t_0) равномерно по x и выполняются следующие предположения:*

(R1) $0 \in \operatorname{int} {G^1}_u(x_0, u_0, t_0)(U - \{u_0\})$;

(R2) *существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что ${G^1}_u(x_0, u_0, t_0)\xi = 0$ и*

$$({G^2}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Тогда система (1)–(3) локально разрешима в точке (x_0, u_0, t_0).

Доказательство. Предположим сначала, что $G^2(x_0, u_0, t_0) = 0$. Для произвольных $x \in \in \mathbb{R}^n$, $v = (\lambda, \nu, y)^{\mathrm{т}} \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и $t \in \mathbb{R}$ положим

$$G(x, t, v) := \begin{pmatrix} G^1(x, u_0 + \nu/\lambda, t) \\ G^2(x, u_0 + \nu/\lambda, t) + y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Определим множество K формулой

$$K := \{(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{т}} : \lambda \geqslant 0, \quad \nu \in U - \{u_0\}, \quad y \in \mathbb{R}^{s_2}_+\}, \tag{6}$$

где $\mathbb{R}^{s_2}_+$ – конус в $\mathbb{R}^{s_2}$, образованный векторами с неотрицательными компонентами.

Покажем, что множество K является выпуклым замкнутым конусом.

Для произвольных $\mu \geqslant 0$ и $(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{т}} \in K$ имеем $\mu(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{т}} = (\mu\lambda, \mu\lambda\nu, \mu y)^{\mathrm{т}} \in K$, поскольку, во-первых, $\mu\lambda \geqslant 0$, во-вторых, $\nu \in U - \{u_0\}$ и, в-третьих, $\mu y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$. Значит, множество K является конусом.

Для произвольных $\mu \in [0, 1]$, $(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{т}} \in K$, $(\lambda', \lambda'\nu', y')^{\mathrm{т}} \in K$ имеем

$$\mu(\lambda, \lambda\nu, y)^{\mathrm{т}} + (1 - \mu)(\lambda', \lambda'\nu', y')^{\mathrm{т}} =$$

$$= \left(\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda', \mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'\left(\frac{\mu\lambda}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}\nu + \frac{(1 - \mu)\lambda'}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}\nu'\right), \mu y + (1 - \mu)y'\right)^{\mathrm{т}} \in K.$$

Здесь включение следует из неравенства $\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda' \geqslant 0$ и включений

$$\frac{\mu\lambda}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}u + \frac{(1 - \mu)\lambda'}{\mu\lambda + (1 - \mu)\lambda'}u' \in U - \{u_0\} \quad \text{и} \quad \mu y + (1 - \mu)y' \in \mathbb{R}^{s_2}_+,$$

вытекающих из выпуклости множеств $U - \{u_0\}$ и $\mathbb{R}^{s_2}_+$ соответственно. Таким образом, конус K является выпуклым.

Возьмём произвольную последовательность $\{(\lambda_j, \lambda_j\nu_j, y_j)^{\mathrm{т}}\} \subset K$, сходящуюся к некоторой точке $(\lambda, z, y)^{\mathrm{т}}$. Так как $\{y_j\} \subset \mathbb{R}^{s_2}_+$ и $\{y_j\} \to y$, то $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$. Рассмотрим два случая: $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда, $z = \lambda \lim\limits_{j\to\infty} \nu_j = 0$ и, значит, $(\lambda, z, y)^{\mathrm{т}} \in K$. Пусть $\lambda > 0$. Тогда поскольку $\{\nu_j\} \to z/\lambda$, $\{\nu_j\} \subset U - \{u_0\}$ и множество $U - \{u_0\}$ замкнуто, то $z/\lambda \in U - \{u_0\}$ и, значит, $(\lambda, z, y)^{\mathrm{т}} = (\lambda, \lambda z/\lambda, y)^{\mathrm{т}} \in K$. Следовательно, множество K замкнуто.

Через G_v обозначим матрицу первых частных производных вектор-функции G по компонентам вектора v. Обозначим также $v_0 := (1, 0, 0)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и

$$\mathcal{K} := K + \operatorname{span}\{v_0\} \quad \text{и} \quad C := G_v(x_0, t_0, v_0)\mathcal{K}. \tag{7}$$

Покажем, что для отображения G и конуса K в точке v_0 выполнено условие регулярности Робинсона по переменной v, т.е. $C = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}$. Обозначим $A_l = {G^l}_u(x_0, u_0, t_0)$, $l = 1, 2$. Имеем

$$G_v(x_0, t_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_2 & E \end{pmatrix} \tag{8}$$

(здесь $E:\mathbb{R}^{s_2}\to\mathbb{R}^{s_2}$ – тождественный оператор),

$$\mathcal{K}=\{(\mu,\lambda\nu,y)^{\mathrm{T}}:\mu\in\mathbb{R},\quad \lambda\geqslant 0,\quad \nu\in U-\{u_0\},\quad y\in\mathbb{R}^{s_2}_{+}\}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$C=\left\{\begin{pmatrix}\lambda A_1\nu\\ y+\lambda A_2\nu\end{pmatrix}:\lambda\geqslant 0,\quad \nu\in U-\{u_0\},\quad y\in\mathbb{R}^{s_2}_{+}\right\}=\mathbb{R}^{s_1}\times\mathbb{R}^{s_2}.$$

Для доказательства последнего равенства возьмём произвольные $(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{s_1}\times\mathbb{R}^{s_2}$ и покажем, что система

$$\lambda A_1\nu=y_1,\quad y+\lambda A_2\nu=y_2 \tag{10}$$

имеет решение $(\lambda,\nu,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}\times(U-\{u_0\})\times\mathbb{R}^{s_2}_{+}$. В силу предположения **(R1)** существуют $\gamma>0$ и $\bar\nu\in U-\{u_0\}$ такие, что $\gamma A_1\bar\nu=y_1$. Следовательно,

$$\gamma A_1(\tau\bar\nu)/\tau=y_1\quad \text{для всех}\quad \tau\in(0,1).$$

В силу предположения **(R2)** существует вектор $\bar\xi\in U$ такой, что $A_1\bar\xi=0$ и каждая компонента вектора $A_2\bar\xi$ отрицательна. Тогда существует $\tau\in(0,1)$, при котором

$$\gamma A_2(1-\tau)\bar\xi/\tau\leqslant y_2-\gamma A_2\bar\nu$$

покомпонентно. Следовательно, существует $y\in\mathbb{R}^{s_2}_{+}$ такой, что

$$y+\gamma A_2(\tau\bar\nu+(1-\tau)\bar\xi)/\tau=y_2.$$

Положим $\lambda:=\gamma/\tau$, $\nu:=\tau\bar\nu+(1-\tau)\bar\xi$. Тогда $\lambda\geqslant 0$, $\nu\in U-\{u_0\}$, $y\in\mathbb{R}^{s_2}_{+}$ и соотношения (10) выполняются.

Таким образом, для отображения G имеют место предположения классической теоремы о неявной функции (см., например, [1, 5]). Поэтому существует окрестность $\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ точки (x_0,t_0) и непрерывные отображения $\widetilde\lambda:\Omega\to(0,+\infty)$, $\widetilde\nu:\Omega\to\mathbb{R}^m$ и $\widetilde y:\Omega\to\mathbb{R}^{s_2}_{+}$ такие, что

$$G^1(x,u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t),t)=0,\quad G^2(x,u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t),t)=-\widetilde y(x,t),$$

где $(\widetilde\lambda(x,t),\widetilde\nu(x,t),\widetilde y(x,t))\in K$, $(x,t)\in\Omega$. Положим $\bar u(x,t):=u_0+\widetilde\nu(x,t)/\widetilde\lambda(x,t)$, $(x,t)\in\Omega$. Тогда

$$G^1(x,\bar u(x,t),t)=0,\quad G^2(x,\bar u(x,t),t)\leqslant 0,\quad \bar u(x,t)\in U\quad \text{для всех}\quad (x,t)\in\Omega$$

и функция $\bar u$ непрерывна. Следовательно, функция $(x,t)\mapsto F(x,\bar u(x,t),t)$, $(x,t)\in\Omega$, непрерывна по x, измерима по t и ограничена в некоторой окрестности точки (x_0,t_0). Значит (см., например, [2, с. 214]), существует решение $\bar x(\cdot)$ задачи Коши (4), определённое на $[t_0,t_0+\tau)$ при некотором $\tau>0$.

В случае $G^2(x_0,u_0,t_0)\neq 0$ доказательство проводится аналогично с заменой G^2 на отображение, полученное вычёркиванием i-х компонент $G^{2,i}$, $i\notin I$, вектор-функции G^2. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в задаче (1)–(3) смешанные ограничения типа равенств отсутствуют, то предположения **(R1)** и **(R2)** принимают вид

(R2′) существует вектор $\xi\in U-\{u_0\}$ такой, что

$$({G^2}_u(x_0,u_0,t_0)\xi)_i<0\quad \text{для всех}\quad i\in I.$$

Отметим также, что достаточным условием для **(R2′)** (но не необходимым) является условие линейной независимости векторов $({G^2}_u(x_0,u_0,t_0))_i$, $i\in I$.

Рассмотрим управляемую систему (1), (2) с управлением

$$u(t) \in U. \tag{11}$$

Эта система называется *локально разрешимой* в точке (t_0, x_0), если существуют $\tau > 0$, абсолютно непрерывная функция $\widehat{x} : [t_0, t_0 + \tau) \to \mathbb{R}^n$ и измеримая существенно ограниченная функция $\widehat{u} : [t_0, t_0 + \tau) \to \mathbb{R}^m$ такие, что

$$G^1(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t) = 0, \quad G^2(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t) \leqslant 0$$

при п.в. t и функция $x = \widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = F(x, \widehat{u}(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Указанную функцию $\widehat{u}(\cdot)$ принято называть *допустимым программным управлением.*

Из локальной разрешимости системы (1)–(3) в точке (x_0, u_0, t_0) следует, что существует допустимое программное управление $\widehat{u}(\cdot)$ системы (1), (2), (11). Действительно, если $\bar{u}(\cdot)$ – допустимое позиционное управление, а $\bar{x}(\cdot)$ – соответствующая траектория, то $\widehat{u}(t) \equiv \bar{u}(t, \bar{x}(t))$ – допустимое программное управление. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 1. Зададим отображение $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$\Psi(u) := \frac{1}{|u|} \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1u_2 \end{pmatrix}, \quad u = (u_1, u_2)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^2, \quad u \neq 0, \quad \Psi(0) = 0.$$

Положим $x_0 := 0$, $t_0 := 0$, $u_0 := 0$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad \Psi(u) = x,$$

т.е. $n = m = 2$, $G^1(x, u, t) = \Psi(u) - x$, $G(x, u, t) \equiv 0$.

Эта система имеет допустимое программное управление $\widehat{u}(t) \equiv 0$. Однако допустимого позиционного управления $\bar{u}$ для рассматриваемой системы не существует. Действительно, если некоторая функция $\bar{u}$ является допустимым позиционным управлением, то она непрерывна, $\bar{u}(0,0) = 0$ и $\Psi(\bar{u}(x,t)) \equiv x$, т.е. $\bar{u}(\,\cdot\,, 0)$ является непрерывным правым обратным отображением к Ψ в окрестности нуля. Последнее противоречит примеру 2 в [3], в котором было показано, что непрерывного правого обратного отображения к Ψ в окрестности нуля не существует.

В заключение отметим, что для управляемой системы в примере 1 выполняются предположения теоремы о существовании программных допустимых управлений [4, теорема 2]. Предположения [4, теорема 2] слабее предположений теоремы 1. Пример 1 показывает, что в предположениях [4, теорема 2] допустимого программного управления системы (1)–(3) в окрестности заданной точки может не существовать.

2. Регулярность второго порядка. Исследуем вопрос о разрешимости управляемой системы (1)–(3) в случае, когда условия **(R1)** и **(R2)** нарушаются.

Положим

$$\mathcal{V} := \ker {G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \bigcap \{v \in \mathbb{R}^m : {G^2}_u(x_0, u_0, t_0)v \leqslant 0\}.$$

Через ${G^l}_{uu}$, $l = 1, 2$, обозначим матрицу вторых частных производных вектор-функции G^l по компонентам вектора u.

Теорема 2. *Пусть отображения F и G^l, $l = 1, 2$, непрерывны, отображения G^l, $l = 1, 2$, дважды непрерывно дифференцируемы по u в окрестности точки (x_0, u_0, t_0). Если выполняются предположения*

(R3) *существует вектор $h \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$ такой, что*

$$-{G^1}_{uu}(x_0, u_0, t_0)[h, h] \in {G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \operatorname{cone}(U - \{u_0\}), \tag{12}$$

$${G^1}_u(x_0, u_0, t_0) \operatorname{cone}(U - \{u_0\}) + {G^1}_{uu}(x_0, u_0, t_0)[h, \operatorname{cone}(U - \{u_0\}) \bigcap \mathcal{V}] = \mathbb{R}^{s_1}; \tag{13}$$

(R4) *существует вектор* $\xi \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$, *для которого*

$$(G^2{}_u(x_0, u_0, t_0)\xi)_i < 0 \text{ при всех } i \in I \text{ таких, что } (G^2{}_u(x_0, u_0, t_0)h)_i = 0.$$

Тогда система локально разрешима в точке (x_0, u_0, t_0).

Доказательство. Будем предполагать, что $G^2(x_0, u_0, t_0) = 0$. Если $G^2(x_0, u_0, t_0) \neq 0$, то доказательство проводится аналогично, но с заменой G^2 на вектор-функцию, полученную вычёркиванием i-х компонент $G^{2,i}$, $i \notin I$, вектор-функции G^2.

I. Для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $v = (\lambda, \nu, y)^{\mathrm{T}} \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$, $t \in \mathbb{R}$, определим функцию $G(x, t, v)$ равенством (5). Пусть A_l, $l = 1, 2$, – те же матрицы, что и в доказательстве теоремы 1, а $Q_l := G^l{}_{uu}(x_0, u_0, t_0)$, $l = 1, 2$. Определим множество K формулой (6). В доказательстве теоремы 1 показано, что K является выпуклым замкнутым конусом.

Пусть h – вектор из предположения **(R3)**. Так как $-Q_1[h, h] \in A_1 \operatorname{cone}(U - \{u_0\})$, то существуют число $\gamma > 0$ и вектор $\bar{\nu} \in U - \{u_0\}$, для которых

$$-Q_1[h, h] = \gamma A_1 \bar{\nu}. \tag{14}$$

В силу предположения **(R4)** существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что

$$A_1\xi = 0, \quad A_2\xi \leqslant 0 \quad \text{и} \quad (A_2\xi)_i < 0 \quad \text{при всех} \quad i \in I, \quad \text{для которых} \quad (A_2h)_i = 0. \tag{15}$$

Следовательно, существуют числа $\theta > 0$, $\tau \in (0, 1)$ и вектор $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$Q_2[h, h] - \gamma A_2\bar{\nu} = y + 2\theta A_2 h + \frac{1 - \tau}{\tau} A_2\xi. \tag{16}$$

Как и выше, положим $v_0 := (1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s_2}$ и определим множества $\mathcal{K}$ и C равенствами (7). Тогда имеют место представления (8) и (9) и

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_1 \nu \\ y + \lambda A_2 \nu \end{pmatrix} : \lambda \geqslant 0, \quad \nu \in U - \{u_0\}, \quad y \in \mathbb{R}^{s_2}_+ \right\}.$$

II. Покажем, что отображение G является 2-регулярным в точке (x_0, t_0, v_0) относительно конуса K по направлению вектора $h_0 := (\theta, h, -A_2h)^{\mathrm{T}}$, т.е. что

$$h_0 \in \mathcal{K}, \quad G_v(x_0, t_0, v_0)h_0 = 0,$$

$$-G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, h_0] \in C, \tag{17}$$

$$G_v(x_0, t_0, v_0)\mathcal{K} + G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, \mathcal{K} \textstyle\bigcap \ker G_v(x_0, t_0, v_0)] = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}. \tag{18}$$

Включение $h_0 \in \mathcal{K}$ следует из (9) и определений множества $\mathcal{K}$ и вектора h_0. Из равенства (8) и предположения **(R3)** вытекает, что

$$G_v(x_0, t_0, v_0)h_0 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_2 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ h \\ -A_2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1h \\ A_2h - A_2h \end{pmatrix} = 0.$$

Докажем включение (17). Имеем

$$G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[\delta, \delta] = \begin{pmatrix} -2\delta_\lambda A_1\delta_\nu + Q_1[\delta_\nu, \delta_\nu] \\ -2\delta_\lambda A_2\delta_\nu + Q_2[\delta_\nu, \delta_\nu] \end{pmatrix} \quad \text{для любого} \quad \delta = (\delta_\lambda, \delta_u, \delta_y), \tag{19}$$

$$G_{vv}(x_0, t_0, v_0)[h_0, h_0] = \begin{pmatrix} Q_1[h, h] \\ -2\theta A_2h + Q_2[h, h] \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$-G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,h_0] = -\begin{pmatrix} Q_1[h,h] \\ -2\theta A_2 h + Q_2[h,h] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma A_1(\tau\bar{\nu} + (1-\tau)\xi)/\tau \\ y + \gamma A_2(\tau\bar{\nu} + (1-\tau)\xi)/\tau \end{pmatrix} \in C.$$

Здесь второе равенство вытекает из равенств (14), $A_1\xi = 0$ и (16). Включение (17) доказано.

Докажем соотношение (18). Для этого возьмём произвольную пару $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}$ и покажем, что уравнение

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta + G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,\zeta'] = (y_1,y_2)^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

имеет решение (ζ,ζ') такое, что $\zeta \in \mathcal{K}$, $\zeta' \in \mathcal{K} \bigcap \ker G_v(x_0,t_0,v_0)$.

Согласно предположению **(R3)** существуют $\gamma > 0$, $\nu \in U - \{u_0\}$, $\lambda' > 0$, $\nu' \in U - \{u_0\}$, для которых

$$A_1\nu' = 0, \quad A_2\nu' \leqslant 0, \quad \gamma A_1\nu + Q_1[h,\lambda'\nu'] = y_1. \tag{21}$$

В силу (15) существуют $\tau > 0$, $\mu' < 0$ и $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$\gamma\frac{1-\tau}{\tau}A_2\xi - \mu' A_2 h + y = y_2 - \gamma A_2\nu + \theta\lambda' A_2\nu' - Q_2[h,\lambda'\nu']. \tag{22}$$

Положим

$$\zeta := (0, \gamma(\tau\nu + (1-\tau)\xi)/\tau, y)^{\mathrm{T}}, \quad \zeta' = (\mu', \lambda'\nu', -\lambda' A_2\nu')^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

Покажем, что $\zeta \in \mathcal{K}$, $\zeta' \in \mathcal{K} \bigcap \ker G_v(x_0,t_0,v_0)$ и пара (ζ,ζ') является решением уравнения (20). Включение $\zeta \in \mathcal{K}$ вытекает из выпуклости множества $U - \{u_0\}$, соотношений $\gamma > 0$, $\tau > 0$, $y \in \mathbb{R}^{s_2}_+$ и определения множества $\mathcal{K}$. Включение $\zeta' \in \mathcal{K}$ следует из соотношений $\lambda' > 0$, $\nu' \in U - \{u_0\}$, $A_2\nu' \leqslant 0$. Кроме того,

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta' = \begin{pmatrix} \lambda' A_1\nu' \\ \lambda' A_2\nu' - \lambda' A_2\nu' \end{pmatrix} = 0,$$

поскольку $A_1\nu' = 0$. Следовательно, $\zeta' \in \mathcal{K} \bigcap \ker G_v(x_0,t_0,v_0)$. Наконец,

$$G_v(x_0,t_0,v_0)\zeta + G_{vv}(x_0,t_0,v_0)[h_0,\zeta'] =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma A_1(\tau\nu + (1-\tau)\xi)/\tau \\ \gamma A_2(\tau\nu + (1-\tau)\xi)/\tau + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta\lambda' A_1\nu' - \mu' A_1 h + \lambda' Q_1[h,\nu'] \\ -\theta\lambda' A_2\nu' - \mu' A_2 h + \lambda' Q_2[h,\nu'] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma A_1\nu + \lambda' Q_1[h,\nu'] \\ \gamma A_2(\tau\nu + (1-\tau)\xi)/\tau + y - \theta\lambda' A_2\nu' - \mu' A_2 h + \lambda' Q_2[h,\nu'] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь первое равенство следует из соотношений (9), (19) и (23), второе – из того, что $A_1\xi = 0$, $A_1\nu' = 0$ и $A_1 h = 0$, а третье – из равенств в (21) и (22). Следовательно, пара (ζ,ζ') является решением уравнения (20). Соотношение (18) доказано.

III. Отображение G является 2-регулярным в точке (x_0,t_0,v_0) относительно конуса K по направлению h_0. Следовательно, для G выполнены предположения теоремы о неявной функции в окрестности анормальной точки [1, теорема 3]. Поэтому существуют окрестность $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ точки (x_0,t_0) и непрерывные отображения $\widetilde{\lambda} : \Omega \to (0,+\infty)$, $\widetilde{\nu} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ и $\widetilde{y} : \Omega \to \mathbb{R}^{s_2}_+$ такие, что

$$G^1(x, u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t), t) = 0, \quad G^2(x, u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t), t) = -\widetilde{y}(x,t),$$

где $(\widetilde{\lambda}(x,t), \widetilde{\nu}(x,t), \widetilde{y}(x,t)) \in K$, $(x,t) \in \Omega$. Положим $\bar{u}(x,t) := u_0 + \widetilde{\nu}(x,t)/\widetilde{\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$. Тогда

$$G^1(x,\bar{u}(x,t),t) = 0, \quad G^2(x,\bar{u}(x,t),t) \leqslant 0, \quad \bar{u}(x,t) \in U \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega$$

и функция $\bar{u}$ непрерывна. Следовательно, функция $(x,t) \mapsto F(x,\bar{u}(x,t),t)$, $(x,t) \in \Omega$, непрерывна. Значит (см., например, [2, с. 214]), существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи Коши (4), определённое на $[t_0, t_0+\tau)$ при некотором $\tau > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Если в задаче (1)–(3) смешанные ограничения типа неравенств отсутствуют, то предположение **(R3)** является достаточным для локальной разрешимости системы (1)–(3) в точке (x_0,u_0,t_0).

Замечание 3. Теорема 2 даёт достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы также и в случае, когда условия регулярности **(R1)** и **(R2)** нарушаются. Если же условия **(R1)** и **(R2)** выполняются, то выполняются и условия **(R3)** и **(R4)**. Покажем это.

Пусть выполнены предположения **(R1)** и **(R2)**. Положим $h := 0$. Тогда

$$-{G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0, \quad {G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,v] = 0 \quad \text{для любого} \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Кроме того, из предположения **(R1)** следует, что

$${G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) = \mathbb{R}^{s_1}.$$

Поэтому

$$-{G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0 \in {G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\});$$

$${G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) + {G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h, \mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) \textstyle\bigcap \mathcal{V}] =$$

$$= {G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) + \{0\} = \mathbb{R}^{s_1}.$$

Таким образом, предположение **(R3)** выполняется.

В силу предположения **(R2)** существует вектор $\xi \in U - \{u_0\}$ такой, что ${G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\xi = 0$ и

$$({G^2}_u(x_0,u_0,t_0)\xi)_i < 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Значит, $\xi \in \mathcal{V} \bigcap (U - \{u_0\})$ и, следовательно, предположение **(R4)** также выполняется.

Приведём пример управляемой системы, к которой применима теорема 2 и неприменима теорема 1.

Пример 2. Положим $G^1(x,u,t) := u_1^2 - u_2^2 - t|x|$, $F(x,u,t) = u$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $U := \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $t_0 = 0$. Тогда система (1)–(3) примет вид

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u_1^2 - u_2^2 - t|x| = 0.$$

Для этой системы предположение **(R1)** нарушается, поскольку

$${G^1}_u(x_0,u_0,t_0) = 0.$$

Покажем, что предположение **(R3)** выполняется.

Положим $h := (1,1)^{\mathrm{T}}$. Имеем $V = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) = \mathbb{R}^2$,

$${G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[u,v] = 2u_1v_1 - 2u_2v_2 \quad \text{для всех} \quad u = (u_1,u_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{и} \quad v = (v_1,v_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно,

$$-{G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,h] = 0 \in \{0\} = {G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}),$$

$${G^1}_u(x_0,u_0,t_0)\,\mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) + {G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h, \mathrm{cone}\,(U - \{u_0\}) \textstyle\bigcap \mathcal{V}] =$$

$$= {G^1}_{uu}(x_0,u_0,t_0)[h,\mathbb{R}^2] = \{2v_1 - 2v_2 : (v_1,v_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}.$$

Значит, в рассматриваемом примере предположение **(R3)** выполняется. Поэтому в силу теоремы 2 (см. замечание 2) система разрешима в точке (x_0,u_0,t_0).

В заключение приведём простой пример, иллюстрирующий существенность условий регулярности **(R3)** и **(R4)**. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad u^2 + t^2 \leqslant 0.$$

Очевидно, что эта система не разрешима в точке $(0, 0, 0)$ и предположения **(R3)** и **(R4)** для этой системы нарушаются.

Результаты п. 1 получены Арутюновым А.В. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042), результаты п. 2 – Жуковским С.Е. при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-2658.2021.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 205–215.
2. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 18–28.
4. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 04.11.2021 г.
После доработки 04.11.2021 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.