ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 260–269

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.8

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПОИМКИ И ПОСТРОЕНИЕ СТРАТЕГИИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

© 2022 г. К. А. Щелчков

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается дифференциальная игра двух лиц – преследователя и убегающего, описываемая нелинейной автономной управляемой системой дифференциальных уравнений в нормальной форме, правая часть которой представляет собой сумму двух функций, одна из которых зависит только от фазовой переменной и управления преследователя, а другая – только от фазовой переменной и управления убегающего. Множество значений управления преследователя является конечным, а множество значений управления убегающего – компактом. Цель преследователя состоит в приведении траектории системы из начального положения в любую наперёд заданную окрестность нуля за конечное время. Стратегия преследователя конструируется как кусочно-постоянная функция со значениями в заданном конечном множестве, для построения которой разрешается использовать лишь информацию о значении текущих фазовых координат. Управление убегающего – измеримая функция, для построения которой нет ограничений по доступной информации. Показано, что для перевода системы в любую наперёд заданную окрестность нуля преследователю достаточно использовать стратегию с постоянным шагом разбиения временно́го промежутка. Величина фиксированного шага разбиения найдена в явном виде. Выделен класс систем, для которых получена оценка времени перевода из произвольного начального положения в заданную окрестность нуля. Оценка является неулучшаемой в некотором точно указанном смысле. В решении существенно используется понятие положительного базиса векторного пространства.

DOI: 10.31857/S037406412202011X

Введение. Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Р.Ф. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой достаточно развитую теорию, имеющую многочисленные практические приложения [2–7]. В ней разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе некоторого уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Н.Н. Красовским и его научной школой создана теория позиционных игр, в основе которой лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для реальных конфликтно управляемых процессов, в первую очередь, нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр. Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л.С. Понтрягина получены в [8]. В работе [9] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на вектограмму системы и терминальное множество. Приближённое построение стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в работах [10, 11].

В работе [12] введено понятие положительного базиса векторного пространства, которое в работах [12, 13] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. Свойства положительного базиса в работах [14–16] использовались для исследования управляемых систем на многообразиях, а в работах [17–21] – для исследования задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных дифференциальных играх с равными возможностями игроков. В работе [22] получены достаточные условия разрешимости задачи поимки для дифференциальной игры двух лиц, описываемой нелинейной дифференциальной системой первого порядка при дискретном управлении и с неполной информацией. Доказано, что существует окрестность нуля, из каждой точки которой происходит поимка.

В данной работе в продолжение исследования [22] получены следующие результаты. Показано, что для перевода системы в любую наперёд заданную окрестность нуля достаточно использовать стратегию с постоянным шагом разбиения временно́го интервала. Выделен класс систем, для которого получена оценка времени поимки из заданного начального положения, являющаяся неулучшаемой в некотором описанном в работе смысле. Свойства положительного базиса векторного пространства играют в дальнейшем существенную роль.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор, u, v – управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ конечно, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = \overline{1,m}$; множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ – для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ – липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$, L_2 такие, что

$$\|f(x^1,u_i) - f(x^2,u_i)\| \leqslant \overline{L}_i \|x^1 - x^2\|, \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\|g(x^1,v^1) - g(x^2,v^2)\| \leqslant L_2(\|x^1 - x^2\| + \|v^1 - v^2\|), \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^k, \quad v^1, v^2 \in V. \tag{2}$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой. Обозначим $L_1 = \max\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m\}$.

Под разбиением σ промежутка $[0,T]$ будем понимать конечное множество $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$ точек этого промежутка такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где $\sigma = \{\tau_q\}_{q=0}^{n}$ – разбиение промежутка $[0,T]$, а W_σ – семейство отображений d_r, $r = \overline{0, \eta-1}$, ставящих в соответствие парам $(\tau_r, x(\tau_r)) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под *управлением убегающего* понимаем произвольную измеримую функцию $v : [0, \infty) \to V$.

Обозначим данную игру через $\Gamma(x_0)$.

Определение 2. Будем говорить, что в игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполняется неравенство $\|x(\tau)\| < \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0,T]$.

Целью преследователя является осуществление ε-поимки.

Целью убегающего – воспрепятствовать этому.

Определение 3 [12]. Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом в* $\mathbb{R}^k$, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Используем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ – внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ – выпуклая оболочка множества A; $O_\varepsilon(x)$ – ε-окрестность точки x; $D_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Справедлива следующая теорема о поимке [22].

Теорема 1 [22]. *Пусть векторы $f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)$ образуют положительный базис и имеют место включения $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1), \ldots, f(0,u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка.*

Замечание 1. Согласно доказательству теоремы 1 движение, порождаемое выигрышной стратегией преследователя, находится внутри шара $D_{x_0}(0)$. Поэтому достаточно считать функции $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot)$ определёнными в некоторой окрестности нуля фазового пространства. При этом данные функции могут быть локально липшицевы в указанном выше смысле.

Замечание 2. Без ограничения общности можно считать, что $U=\{1,\ldots,m\}$, так как управление преследователя на интервалах разбиения постоянно, т.е. функция f имеет вид $f(x,j)=f_j(x)$, где $f_j\colon \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ – липшицева по x функция. Кроме того, множество U может быть произвольным непустым подмножеством в $\mathbb{R}^l$ при условии, что для каждого $u\in U$ функция f является липшицевой по x. В этом случае, если существует конечный набор величин $\{u_1,\ldots,u_m\}\subset U$, который удовлетворяет условию теоремы 1, то происходит ε-поимка.

2. Стратегия поимки, сконструированная в [22]. Приведём выигрышную стратегию преследователя, найденную в [22], сопутствующие обозначения и некоторые установленные в доказательстве теоремы 1 результаты. Считаем, что условия этой теоремы выполнены. Существование указанных в данном пункте параметров установлено в [22] при доказательстве теоремы 1.

Существуют $\alpha>0$, $\varepsilon_0>0$ такие, что для любых точки $x\in D_{\varepsilon_0}(0)$ и вектора $p\in\mathbb{R}^k$, $\|p\|=1$, найдётся $i\in\{1,\ldots,m\}$, для которого при любом $v\in V$ выполнено неравенство

$$\langle f(x,u_i)+g(x,v),p\rangle\geqslant\alpha,$$

где

$$\alpha=\min_{x\in D_{\varepsilon_0}(0)}\min_{\|p\|=1}\min_{v\in V}\max_{i=\overline{1,m}}\langle f(x,u_i)+g(x,v),p\rangle.$$

Существует число $h>0$ такое, что для каждого $x_0\in D_{\varepsilon_0}(0)\setminus\{0\}$ и любого $v\in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(x,\overline{u}_0)+g(x,v),-x_0/\|x_0\|\rangle\geqslant\alpha/2=\overline{\alpha} \tag{3}$$

при всех $x\in D_h(x_0)$. Здесь $\overline{u}_0$ находится из следующего максимума:

$$\max_{u\in U}\langle f(x_0,u),-x_0/\|x_0\|\rangle=\langle f(x_0,\overline{u}_0),-x_0/\|x_0\|\rangle. \tag{4}$$

При этом достаточно взять $h=\alpha/(2L_1+2L_2)$.

Пусть D – число, при котором имеет место неравенство $\|f(x,u_i)+g(x,v)\|\leqslant D$ для всех $x\in D_{\varepsilon_0}(0)$, любого $v\in V$ и каждого $i\in\{1,\ldots,m\}$.

Обозначим

$$\Delta(\xi)=\min\{\overline{\alpha}\|\xi\|/D^2,h/D\}. \tag{5}$$

В работе [22] показано, что при реализации стратегии преследователя длина отрезка разбиения $[\tau_j,\tau_{j+1})$, $j=0,1,\ldots,$ выбирается с использованием определённой равенством (5) функции $\Delta(\cdot)$ и задаётся равенством $\tau_{j+1}-\tau_j=\Delta(x(\tau_j))$. Управление $\overline{u}_j$ находится из следующего максимума:

$$\max_{u\in U}\langle f(x(\tau_j),u),-x(\tau_j)/\|x(\tau_j)\|\rangle=\langle f(x(\tau_j),\overline{u}_j),-x(\tau_j)/\|x(\tau_j)\|\rangle. \tag{6}$$

Для каждого $j=0,1,\ldots$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\|x(\tau_{j+1})\|^2&=\|x(\tau_j)\|^2+\left\|\int\limits_{\tau_j}^{\tau_j+\Delta(x(\tau_j))}(f(x(s),\overline{u}_j)+g(x(s),v(s)))\,ds\right\|^2+\\&+2\int\limits_{\tau_j}^{\tau_j+\Delta(x(\tau_j))}\langle f(x(s),\overline{u}_j)+g(x(s),v(s)),x(\tau_j)\rangle\,ds\leqslant\\&\leqslant\|x(\tau_j)\|^2+D^2(\Delta(x(\tau_j)))^2-2\Delta(x(\tau_j))\overline{\alpha}\|x(\tau_j)\|\leqslant\|x(\tau_j)\|^2-\Delta(x(\tau_j))\overline{\alpha}\|x(\tau_j)\|.\end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того, $\|x(t)\|<\|x(\tau_j)\|$, $t\in(\tau_j,\tau_{j+1})$.

При использовании данной стратегии происходит ε-поимка. В доказательстве теоремы 1 (см. [22]) получена общая, т.е. для всех $x_0\in D_{\varepsilon_0}(0)\setminus\{0\}$, верхняя оценка времени ε-поимки.

Геометрический смысл такого выбора параметров для описанной выше стратегии заключается в следующем.

Пусть начальное положение находится в точке $b \in D_{\varepsilon_0}(0)$ (рис. 1). Управление преследователя выбирается в соответствии с максимумом (4), где $x_0 = b$. Тогда для всех $t \in [0, \Delta(b)]$ справедливо включение $x(t) \in D_h(b)$ (рис. 1, малая окружность). Поэтому до момента $\Delta(b)$ для скорости будет справедливо неравенство (3), т.е. вектор скорости будет находиться в выпуклом конусе, определяемом положительным числом $\overline{\alpha}$. Таким образом, траектория также будет содержаться в выпуклом конусе, определяемом числом $\overline{\alpha}$, но с вершиной в точке b (рис. 1, лучи, выходящие из точки b). В силу определения функции $\Delta(\cdot)$ к моменту $\Delta(b)$ траектория в конусе уйдёт не дальше некоторого расстояния (рис. 1, большая дуга). Причём это расстояние равно половине длины произвольной хорды, проведённой из точки b вдоль границы конуса. Так как в силу (3) для всех $t \in [0, \Delta(b)]$ верно неравенство $\|\dot{x}(t)\| \geqslant \overline{\alpha}$, то в момент $\Delta(b)$ точка траектории будет находиться в конусе на расстоянии от точки b не ближе, чем $\overline{\alpha}\Delta(b)$ (рис. 1, малая дуга). Из описанного выше следует, что к моменту $\Delta(b)$ траектория системы будет находиться в закрашенной области (рис. 1).

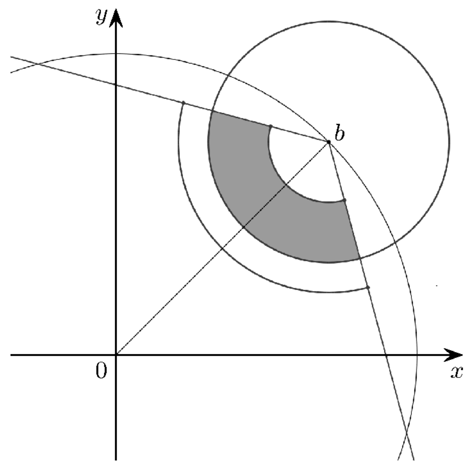

Рис. 1. Геометрический смысл выбора параметров.

3. Гарантированное время поимки. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество систем, удовлетворяющих постановке задачи и теореме 1. Другими словами, под элементом $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ будем понимать набор $(f(\,\cdot\,,\cdot), g(\,\cdot\,,\cdot), U, V)$, для которого выполнены следующие условия:

1) $k, l, s, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$;

2) множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ конечно, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = \overline{1, m}$;

3) множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт;

4) функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ при каждом $u \in U$ липшицева по x, функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что выполняются оценки (2);

5) векторы $f(0, u_1)$, $\ldots$, $f(0, u_m)$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, и имеет место включение $-g(0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)\})$.

Дифференциальную игру (1), соответствующую четвёрке $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и начальному положению x_0, обозначим $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$.

Пусть $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Определим число $\varepsilon_0(\mathfrak{s})$ условием

$$\varepsilon_0(\mathfrak{s}) = \sup\{r \geqslant 0 : -g(x, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x, u_1), \ldots, f(x, u_m)\}), \quad x \in D_r(0)\}.$$

Далее, определим множество $O(\mathfrak{s}) \subset \mathbb{R}^k$ равенством

$$O(\mathfrak{s}) = \begin{cases} O_{\varepsilon_0(\mathfrak{s})}(0), & \varepsilon_0(\mathfrak{s}) < +\infty, \\ \mathbb{R}^k, & \varepsilon_0(\mathfrak{s}) = +\infty. \end{cases}$$

Отметим, что согласно теореме 1 для каждого $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и любого $x_0 \in O(\mathfrak{s})$ в игре $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ происходит ε-поимка.

Обозначим

$$D(\mathfrak{s}, r) = \max\{\|f(x, u) + g(x, v)\| : x \in D_r(0), u \in U, v \in V\},$$
$$\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \min_{x \in D_{\|x_0\|}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=\overline{1,m}} \langle f(x, u_i) + g(x, v), p\rangle. \tag{8}$$

Для $\mu \in [0, 1]$ определим следующие функции:

$$h(\mathfrak{s}, \mu) = \frac{\mu\alpha(\mathfrak{s}, x_0)}{2(L_1 + L_2)} \tag{9}$$

и

$$\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \alpha(\mathfrak{s}, x_0)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, $x_0 \in O(\mathfrak{s})$, $x_0 \neq 0$, L_1 *и* L_2 *– константы Липшица, соответствующие четвёрке* $\mathfrak{s}$. *Тогда в игре* $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ *для любого* $\delta > 0$, $\delta < \|x_0\|$, *траекторию системы можно перевести в шар* $D_\delta(0)$, *используя кусочно-постоянную стратегию преследователя с фиксированным шагом разбиения* $\Delta = h(\mathfrak{s}, \mu_0)/D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)$ *за время*

$$T_\delta \leqslant \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu_0)\delta - (D(\mathfrak{s}, \|x_0\|))^2\Delta} + \Delta,$$

где

$$\mu_0 = \min\{1, (L_1 + L_2)\delta/D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)\}. \tag{11}$$

Доказательство. Так как четвёрка $\mathfrak{s}$ фиксирована, то для упрощения записи обозначим: $D(\mathfrak{s}, \|x_0\|) = D$, $\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \alpha(x_0)$, $h(\mathfrak{s}, \mu) = h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \overline{\alpha}(\mu)$.

$\mathbf{1^0}$. В этом пункте доказательства получим оценки, соответствующие функциям $\alpha(x_0)$, $h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mu)$.

Пусть $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $\mu \in (0, 1]$, $\xi \in D_{\|x_0\|}(0)$, $\overline{x} \in D_{h(\mu)}(\xi)$. Выберем такое значение $\overline{u} \in U$, на котором достигается следующий максимум:

$$\max_{u \in U} \langle f(\xi, u), p\rangle = \langle f(\xi, \overline{u}), p\rangle.$$

Докажем, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(\overline{x}, \overline{u}) + g(\overline{x}, v), p\rangle \geqslant \overline{\alpha}(\mu). \tag{12}$$

Используя определения (8), оценим скалярное произведение в (12):

$$\begin{gathered}
\langle f(\overline{x}, \overline{u}) + g(\overline{x}, v), p\rangle = \langle f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u}) + f(\xi, \overline{u}) + g(\overline{x}, v) - g(\xi, v) + g(\xi, v), p\rangle = \\
= \langle f(\xi, \overline{u}) + g(\xi, v), p\rangle + \langle f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u}), p\rangle + \langle g(\overline{x}, v) - g(\xi, v), p\rangle \geqslant \\
\geqslant \alpha(x_0) - \|f(\overline{x}, \overline{u}) - f(\xi, \overline{u})\| - \|g(\overline{x}, v) - g(\xi, v)\| \geqslant \\
\geqslant \alpha(x_0) - L_1\|\overline{x} - \xi\| - L_2\|\overline{x} - \xi\| \geqslant \alpha(x_0) - (L_1 + L_2)h(\mu) = \\
= \alpha(x_0) - (L_1 + L_2)\frac{\mu\alpha(x_0)}{2(L_1 + L_2)} = \overline{\alpha}(\mu).
\end{gathered}$$

Таким образом, неравенство (12) доказано.

Заметим, что функция $h(\mu)$ является строго возрастающей, функция $\overline{\alpha}(\mu)$ – строго убывающей и имеют место двойные неравенства

$$0 \leqslant h(\mu) \leqslant \frac{\alpha(x_0)}{2(L_1 + L_2)} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(x_0)}{2} \leqslant \overline{\alpha}(\mu) \leqslant \alpha(x_0), \quad \mu \in [0, 1]. \tag{13}$$

$\mathbf{2^0}$. В этом пункте доказательства построим стратегию, переводящую траекторию системы в шар $D_\delta(0)$.

В силу определений (9), (11) и неравенств (13) справедлива оценка

$$h(\mu_0) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_0)\delta/D. \tag{14}$$

Определим фиксированный шаг разбиения $\Delta = h(\mu_0)/D$. Фиксированное управление преследователя $\overline{u}_j \in U$ на интервале $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = \overline{0, \eta}$, будем выбирать из условия (6).

Оценим квадрат нормы, используя неравенства (12), (14), (8). Для всех $t \in (0, \tau_1]$ имеем

$$\|x(t)\|^2 = \left\|x_0 + \int\limits_0^t (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\,ds\right\|^2 =$$

$$= \|x_0\|^2 + \left\|\int\limits_0^t (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\,ds\right\|^2 + 2\int\limits_0^t \langle f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)), x_0\rangle\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x_0\|^2 + D^2t^2 - 2t\overline{\alpha}(\mu_0)\|x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0\|^2 + D^2t\Delta - 2tDh(\mu_0) = \|x_0\|^2 + Dth(\mu_0) - 2tDh(\mu_0) < \|x_0\|^2. \tag{15}$$

Отметим, что при рассматриваемых условиях в силу выбора (6) управления преследователя траектория системы не покидает шар $D_{\|x_0\|}(0)$. Поэтому при выводе неравенств (15) корректно оценивать норму скорости системы величиной $D = D(\mathfrak{s}, \|x_0\|)$.

В силу (15) справедливо следующее неравенство:

$$\|x(\tau_1)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + D^2\Delta^2 - 2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta < \|x_0\|^2. \tag{16}$$

Пусть $x(\tau_1), \ldots, x(\tau_{\eta-1}) \notin D_\delta(0)$. Тогда аналогично (16) для всех $j = \overline{1,\eta}$ справедливы неравенства $\|x(\tau_j)\|^2 \leqslant \|x(\tau_{j-1})\|^2 + D^2\Delta^2 - 2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta < \|x(\tau_{j-1})\|^2$. Следовательно,

$$\|x(\tau_\eta)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + \eta D^2\Delta^2 - 2\eta\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta.$$

Отсюда, если $\|x_0\|^2 + \eta D^2\Delta^2 - 2\eta\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta \leqslant \delta^2$, то $x(\tau_\eta) \in D_\delta(0)$. Таким образом,

$$\eta \leqslant \left[\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2}\right] + 1. \tag{17}$$

Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. Если η строго больше правой части неравенства (17), то $x(\tau_{\eta-1}) \in D_\delta(0)$, что противоречит предположению $x(\tau_{\eta-1}) \notin D_\delta(0)$.

Оценим величину τ_η:

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leqslant \left(\left[\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2}\right] + 1\right)\Delta \leqslant \left(\frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\Delta\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta^2} + 1\right)\Delta = \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta} + \Delta.$$

Таким образом,

$$T_\delta \leqslant \frac{\|x_0\|^2 - \delta^2}{2\overline{\alpha}(\mu_0)\delta - D^2\Delta} + \Delta,$$

где $\mu_0 = \min\{1, (L_1 + L_2)\delta/D\}$, $\Delta = h(\mu_0)/D$. Теорема доказана.

Обозначим

$$T(\mathfrak{s}, x_0) = \|x_0\|/\alpha(\mathfrak{s}, x_0).$$

Теорема 3. *Для множества $\mathfrak{S}$ справедливы следующие свойства.*

1) Для любого $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ и любого $x_0 \in O(\mathfrak{s})$ в игре $\Gamma(\mathfrak{s}, x_0)$ происходит ε-поимка за время $T(\mathfrak{s}, x_0)$.

2) Существуют $\mathfrak{c} \in \mathfrak{S}$ и $x_0 \in O(\mathfrak{c})$, для которых за любое время $\overline{T} < T(\mathfrak{c}, x_0)$ в игре $\Gamma(\mathfrak{c}, x_0)$ ε-поимка не происходит.

Доказательство. Так как четвёрка $\mathfrak{s}$ фиксирована, то для упрощения записи обозначим: $D(\mathfrak{s}, \|x_0\|) = D$, $\alpha(\mathfrak{s}, x_0) = \alpha(x_0)$, $h(\mathfrak{s}, \mu) = h(\mu)$, $\overline{\alpha}(\mathfrak{s}, \mu) = \overline{\alpha}(\mu)$, $T(x_0) = T(\mathfrak{s}, x_0)$.

1^0. В этом пункте доказательства построим стратегию поимки, используя теорему 2.

Зафиксируем произвольно число $\omega \in (0, 1)$. Выберем μ_1 таким, что

$$0 < \mu_1 \leqslant \min\{1, (L_1 + L_2)\omega\|x_0\|/D\}. \tag{18}$$

Тогда аналогично (14) справедлива оценка

$$h(\mu_1) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\|/D. \tag{19}$$

Обозначим $\Delta_1 = h(\mu_1)/D$. Аналогично п. **2^0** доказательства теоремы 2, используя фиксированный шаг Δ_1 разбиения, показывается, что траектория системы переводится в шар $D_{\omega\|x_0\|}(0)$ за время T_1, где

$$T_1 \leqslant \frac{\|x_0\|^2(1 - \omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - D^2\Delta_1} + \Delta_1.$$

Далее, обозначим $\mu_2 = \omega\mu_1$. Тогда $h(\mu_2) = \omega h(\mu_1)$. Следовательно, так как $\overline{\alpha}(\cdot)$ является строго убывающей функцией, то в силу (19) справедлива оценка

$$h(\mu_2) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_1)\omega^2\|x_0\|/D \leqslant \overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\|/D. \tag{20}$$

Обозначим $\Delta_2 = h(\mu_2)/D$. Таким образом, используя фиксированный шаг Δ_2 разбиения, видим, что траектория системы переводится в шар $D_{\omega^2\|x_0\|}(0)$ из положения $x(T_1)$ за время T_2. Так как $\|x(T_1)\| \leqslant \omega\|x_0\|$, то

$$T_2 \leqslant \frac{\|x(T_1)\|^2 - \omega^4\|x_0\|^2}{2\overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\| - D^2\Delta_2} + \Delta_2 \leqslant \frac{\omega^2\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_2)\omega^2\|x_0\| - D^2\Delta_2} + \Delta_2. \tag{21}$$

Далее, повторяем процедуру. Обозначим $\mu_3 = \omega\mu_2$, тогда $h(\mu_3) = \omega h(\mu_2)$ и в силу (20) справедливо неравенство

$$h(\mu_3) \leqslant \overline{\alpha}(\mu_2)\omega^3\|x_0\|/D \leqslant \overline{\alpha}(\mu_3)\omega^3\|x_0\|/D.$$

Фиксированный шаг $\Delta_3 = h(\mu_3)/D$. Аналогично (21) оценим T_3:

$$T_3 \leqslant \frac{\omega^4\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_3)\omega^3\|x_0\| - D^2\Delta_3} + \Delta_3.$$

И так далее для каждого $q \in \mathbb{N}$. В результате получаем

$$\mu_q = \omega^{q-1}\mu_1, \quad h(\mu_q) = \omega^{q-1}h(\mu_1), \quad \Delta_q = \omega^{q-1}\Delta_1,$$

$$T_q \leqslant \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\Delta_q} + \Delta_q. \tag{22}$$

В силу построения данной процедуры верно неравенство

$$x(T_1 + \ldots + T_q) \leqslant \omega^q\|x_0\|.$$

Таким образом, можем перевести траекторию системы в любую наперёд заданную окрестность нуля. Следовательно, для того чтобы при использовании данной процедуры происходила ε-поимка, осталось показать, что величина $\sum_{q=1}^{\infty} T_q$ ограничена сверху.

Используя неравенства (22), преобразуем оценку для T_q:

$$T_q \leqslant \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\Delta_q} + \Delta_q = \frac{\omega^{2(q-1)}\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega^q\|x_0\| - D^2\omega^{q-1}\Delta_1} + \omega^{q-1}\Delta_1 =$$

$$= \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_q)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \omega^{q-1}\Delta_1 \leqslant \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \omega^{q-1}\Delta_1. \tag{23}$$

Теперь, используя (23), оценим следующую сумму:

$$\sum_{q=1}^{\infty} T_q \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\omega^{q-1} + \sum_{q=1}^{\infty}\omega^{q-1}\Delta_1 =$$

$$= \frac{\|x_0\|^2(1-\omega^2)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)}\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega}\Delta_1 = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)}.$$

Таким образом, из начального положения x_0 ε-поимка происходит за конечное время $T(\omega, \mu_1)$, которое определяется равенством

$$T(\omega, \mu_1) = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)}. \tag{24}$$

2⁰. В этом пункте доказательства оценим время поимки, используя равенство (24). На основе построения данной оценки покажем выполнение свойств из условия теоремы.

Обозначим

$$\overline{\mu} = \min\{1, (L_1 + L_2)\omega\|x_0\|/D\}.$$

Отметим, что в силу (18) число $T(\omega, \mu_1)$ определено для каждого $\mu_1 \in (0, \overline{\mu}]$. Так как функция $h(\cdot)$ является строго возрастающей, а $\overline{\alpha}(\cdot)$ – строго убывающей, то

$$\inf_{\mu_1 \in (0,\overline{\mu}]} T(\omega, \mu_1) = \lim_{\mu_1 \to 0+} T(\omega, \mu_1).$$

Найдём, используя определения (9) и (10), значение последнего предела, которое обозначим через $T(\omega, 0)$, т.е.

$$\lim_{\mu_1 \to 0+} T(\omega, \mu_1) = \lim_{\mu_1 \to 0+} \left(\frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\overline{\alpha}(\mu_1)\omega\|x_0\| - Dh(\mu_1)} + \frac{h(\mu_1)}{D(1-\omega)} \right) = \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\alpha(x_0)\omega\|x_0\|}.$$

Таким образом, для любого $\omega \in (0,1)$ ε-поимка происходит за любое время $T > T(\omega, 0)$.

Функция $T(\omega, 0)$ является строго убывающей при $\omega \in (0,1)$. Поэтому

$$\inf_{\omega \in (0,1)} T(\omega, 0) = \lim_{\omega \to 1-} T(\omega, 0) = \lim_{\omega \to 1-} \frac{\|x_0\|^2(1+\omega)}{2\alpha(x_0)\omega\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|}{\alpha(x_0)} = T(x_0).$$

Покажем, что за время $T(x_0)$ происходит ε-поимка. В силу построения ε-поимка происходит за любое время $T > T(x_0)$. Пусть $\delta > 0$, $\overline{T} = T(x_0) + \delta/(2D)$. Тогда за время $\overline{T}$ происходит ε-поимка. Следовательно, существует кусочно-постоянная стратегия преследователя такая, что $\|x(\tau)\| < \delta/2$ для некоторого $\tau \in [0, \overline{T}]$. В силу определений (8) справедливо неравенство

$$|\|x(\tau)\| - \|x(\tau - \delta/(2D))\|| \leqslant D\delta/(2D) = \delta/2.$$

Поэтому $\|x(\tau - \delta/(2D))\| \leqslant \|x(\tau)\| + \delta/2 < \delta$. При этом $\tau - \delta/(2D) \leqslant T(x_0)$. Таким образом, доказано, что за время $T(x_0)$ происходит ε-поимка. Следовательно, свойство 1) из формулировки теоремы выполнено.

Приведём пример, для которого выполнено свойство 2) из формулировки теоремы. Рассмотрим в случае $k = s = 2$ систему

$$\dot{x}_1 = u_1 + v_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 + v_2,$$

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad g(x,v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-1,1] \times [-1,1], \quad v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Отметим, что здесь, согласно теореме 1, ε-поимка будет происходить из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Для данного примера $\alpha(x_0) = 0.5$, $T(x_0) = 2$.

Оценим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = 1 + \int\limits_0^t (u_2(s) + 1)\,ds \geqslant 1 + \int\limits_0^t (-1.5 + 1)\,ds = 1 - 0.5t.$$

Отсюда если $T \in [0,2)$, то $x(T) \notin O_{1-0.5T}(0)$. Следовательно, ε-поимка не происходит за время $T < 2 = T(x_0)$. Таким образом, справедливо и свойство 2) из формулировки теоремы. Теорема доказана.

4. Компьютерное моделирование. Рассмотрим дифференциальную игру в $\mathbb{R}^2$. Система (2) дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}_1 = u_1\cos(|x_1|+|x_2|) - u_2\sin(|x_1|+|x_2|) + v_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right) - v_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right),$$

$$\dot{x}_2 = u_1\sin(|x_1|+|x_2|) + u_2\cos(|x_1|+|x_2|) + v_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right) + v_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right),$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\},$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in V = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.5\\0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\-0.5\end{pmatrix} \right\},$$

с начальным условием

$$x_0 = \begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.2\\3\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f(x,u) = A(|x_1|+|x_2|)u, \quad g(x,v) = A\left(\frac{\pi}{2}-|x_1|-|x_2|\right)v,$$

где $A(\cdot)$ – матрица поворота, $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$, $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$.

Данная система удовлетворяет условиям теоремы 1, причём ε-поимка происходит при любом $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Система имеет следующие параметры:

$$\alpha(x_0) = 1 - 0.5\sqrt{2}, \quad L_1 = 2\sqrt{2}, \quad L_2 = \sqrt{2}, \quad D = 1.5\sqrt{2}.$$

Выберем $\delta = 0.1$. Тогда согласно теореме 2 для перевода траектории системы в шар $D_\delta(0)$ достаточно использовать фиксированный шаг разбиения $\Delta \leqslant (1-0.5\sqrt{2})/18$. Выберем $\Delta = 0.0162$.

Приближённое решение данной системы находим методом Рунге–Кутты третьего порядка с шагом 10^{-4}. Управление убегающего на каждом шаге метода постоянное, его выбор осуществляется из следующего максимума: $\max_{v\in V}\langle g(\hat{x}, v), \hat{x}/\|\hat{x}\|\rangle = \langle g(\hat{x}, \hat{v}), \hat{x}/\|\hat{x}\|\rangle$, где $\hat{x}$ – положение на начало шага метода.

Результат моделирования: время достижения шара $D_\delta(0)$ равно $T_\delta = 6.9187$; траектория системы и полученное решение представлены на рис. 2 и 3. Отметим, что $T_\delta < T((1-\delta/\|x_0\|)x_0) \approx 9.9239$.

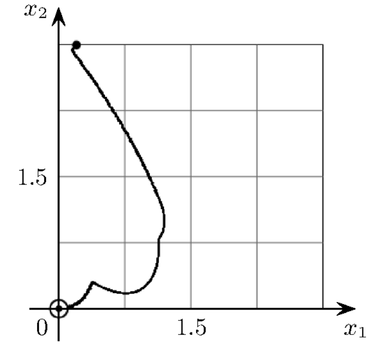

Рис. 2. Полученная траектория $(x_1(t), x_2(t))$.

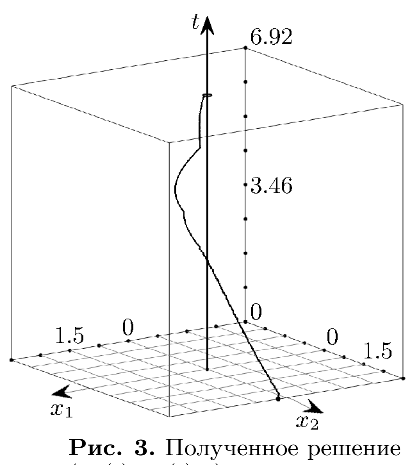

Рис. 3. Полученное решение $(x_1(t), x_2(t), t)$.

Заключение. Для одного класса нелинейных дифференциальных игр преследования показано, что можно использовать стратегию преследователя с постоянным шагом разбиения временнóго интервала. Получена оценка времени поимки из заданного начального положения, которая в определённом смысле является неулучшаемой.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00293). При выполнении исследований использовались вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН “Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaacs R.* Differential Games. New York, 1965.
2. *Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G.* Quantitative and Qualitative Differential Games. New York, 1969.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
4. *Friedman A.* Differential Games. New York, 1971.
5. *Hajek O.* Pursuit Games. New York, 1975.
6. *Leitmann G.* Cooperative and Noncooperative Many-Player Differential Games. Vienna, 1974.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. *Никольский М.С.* Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
9. *Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б.* Достаточные условия конечности времени преследования // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 517–523.
10. *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255.
11. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564.
12. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
13. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.
14. *Нарманов А.Я., Петров Н.Н.* Нелокальные проблемы теории оптимальных процессов. I // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 4. С. 605–614.
15. *Нарманов А.Я.* О стабильности вполне управляемых систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1336–1344.
16. *Нарманов А.Я.* О стабильности вполне управляемых систем // Мат. тр. 2001. Т. 4. № 1. С. 94–110.
17. *Банников А.С., Петров Н.Н.* К нестационарной задаче группового преследования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
18. *Петров Н.Н.* Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
19. *Петров Н.Н.* Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 1. С. 54–59.
20. *Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 178–186.
21. *Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.* Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
22. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 111–118.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 03.06.2021 г.
После доработки 14.01.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.