ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 270–274

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.32

ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИ КЛАССИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ БЕЙТМЕНА – РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ

© 2022 г. **А. С. Благовещенский, Е. А. Злобина, А. П. Киселев**

Показано, что естественные обобщения решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными, предложенного Г. Бейтменом, на случай двух пространственных переменных являются решениями задач с точечными источниками.

DOI: 10.31857/S0374064122020121

Введение. Г. Бейтмен [1] предложил в качестве решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = 0, \quad c = \mathrm{const} > 0, \tag{1}$$

сингулярное выражение – *волну Бейтмана*

$$U = \frac{1}{\beta} f\left(\alpha + \frac{x^2 + y^2}{\beta}\right). \tag{2}$$

Здесь *форма волны* f – произвольная функция одного переменного, а

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct. \tag{3}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что для гладкой функции f функция (2) удовлетворяет уравнению (1) при $z \neq -ct$. Не интересовавший Бейтмена вопрос о том, является ли функция (2) решением уравнения (1) во всём пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, решён положительно лишь недавно (см. [2, 3]) и только для гладких финитных функций f.

Выражение (2) принадлежит к классу *относительно неискажающихся волн.* Так в классических руководствах по математической физике (см., например, [4, с. 617]) названы функции вида

$$U = gf(\Theta), \tag{4}$$

где функции $g = g(x, y, z, t)$ и $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ фиксированы, а форма волны f произвольна. При этом не уточняется, допустимо ли локальное нарушение равенства (1) и какими свойствами должны обладать g, f и Θ. Чтобы это определение охватывало важные примеры, следует потребовать, чтобы уравнение (1) выполнялось всюду, кроме, быть может, многообразия меньшей размерности*). Функции, удовлетворяющие однородному волновому уравнению (1) в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ за исключением, быть может, многообразия меньшей размерности, будем называть *волнами* (независимо от того, имеют ли они вид (4) или нет).

С 90-х годов прошлого столетия внимание исследователей привлекают комплексифицированные версии волны Бейтмена, простейшая из которых получается сдвигом на мнимую постоянную:

$$\beta \mapsto \beta_* = \beta - ib = z + ct - ib, \tag{5}$$

*) Для классических сферических волн такое многообразие состоит из одной пространственной точки, а для привлекающих большое внимание с 70-х годов прошлого века комплексифицированных сферических волн оно представляет собой двумерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [5]).

$b > 0$, а от функции f требуется аналитичность в верхней полуплоскости. Такие волны имеют приложения в оптике, поскольку при удачно подобранных f описывают сильно локализованные волновые пучки и пакеты (см., например, [6–8]). И исходная (2), и комлексифицированные версии волны Бейтмена доставляют простые примеры [2, 3] решений уравнения (1) во всём $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, имеющих сингулярность в бегущей пространственной точке. Внимание к таким решениям привлечено открытиями Хёрмандера [9, с. 324].

Комплексифицированная волна Бейтмена (2), (5) удовлетворяет однородному волновому уравнению во всём пространстве-времени и легко обобщается с сохранением этого свойства на произвольную пространственную размерность, большую единицы [10]. Некомплексифицированные волны Бейтмена в произвольной размерности введены К. Шимомурой [11], который не интересовался вопросом о том, являются ли они решениями однородного волнового уравнения во всём пространстве-времени.

В настоящей заметке показано, что в случае двух пространственных переменных при исчезновении комплексифицирующей добавки волна Бейтмена перестаёт быть решением однородного волнового уравнения и становится решением задачи с бегущим точечным источником. Соответствующую функцию источника мы вычисляем явно.

1. Постановка задачи. Двумерная версия волны Бейтмена, предложенная в [11], имеет вид

$$u := \frac{1}{\sqrt{\beta}} f(\theta), \quad \theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta}, \tag{6}$$

где линейные функции α и β определены в (3). Квадратный корень понимается обычным образом: если $p \geqslant 0$, то $\sqrt{p} \geqslant 0$ и $\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$. Форма волны f предполагается достаточно гладкой.

Результат применения оператора Даламбера, отвечающего двум пространственным переменными (x, z), к функции (6) обозначим через F:

$$\Box\, u = u_{xx} + u_{zz} - c^{-2} u_{tt} = u_{xx} + 4u_{\alpha\beta} = F. \tag{7}$$

Наша цель состоит в вычислении обобщённой функции F, которую мы называем *функцией источника.* В отличие от случая трёх пространственных переменных, она оказывается отличной от нуля.

Кроме того, аналогичный вопрос решается для двух других относительно неискажающихся волн, получающихся из комплексифицированного решения вида (6), в котором сделана замена (5), в результате перехода к пределу $b \to 0$:

$$u := \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} f(\theta) \tag{8}$$

и

$$u := \frac{\operatorname{sgn}\beta}{\sqrt{|\beta|}} f(\theta). \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть в выражении (6) функция f принадлежит классу $C_0^2(\mathbb{R})$. Тогда правая часть равенства (7) имеет вид*

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) + i\mathcal{F}_-(\alpha)), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{F}_+(\alpha) = 4\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{s-\alpha}}, \quad \mathcal{F}_-(\alpha) = 4\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{\alpha-s}}. \tag{11}$$

Функция источника (10) сосредоточена в пространственной точке $\{x = 0, \ z = -ct\}$, бегущей вдоль пространственной прямой $x = 0$ со скоростью c, и имеет амплитуду, зависящую от α.

2. Доказательство теоремы 1. Нетрудно показать, что функция (6) локально интегрируема на $\mathbb{R}^3$. В стандартных для теории обобщённых функций обозначениях (см., например, [9]) равенство (7) записывается следующим образом:

$$(\Box\, u, \varphi) = (u, \Box\, \varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} u\, \Box\, \varphi\, dx\, dy\, dt = (F, \Box\, \varphi), \tag{12}$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ – произвольная основная функция.

Пусть $\varepsilon > 0$. Очевидно, что $\Box\, u = 0$ в областях $\Omega_\varepsilon = \{(x,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3 : \beta \geqslant \varepsilon\}$ и $\Omega_{-\varepsilon} = \{(x,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3 : \beta \leqslant -\varepsilon\}$, а интеграл в (12) представим в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u\, \Box\, \varphi\, dx\, dy\, dt = \frac{1}{2c} \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} + \int\limits_{\Omega_{-\varepsilon}} \Bigg) u\, \Box\, \varphi\, dx\, d\alpha\, d\beta. \tag{13}$$

Рассмотрим в (13) интеграл по области Ω_ε. Интегрируя по частям по переменным x и β и пользуясь финитностью функции φ, получаем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u\, \Box\, \varphi\, dx\, d\alpha\, d\beta = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi\, \Box\, u\, dx\, d\alpha\, d\beta + 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_\alpha \varphi)(x,\alpha,\varepsilon)\, dx\, d\alpha. \tag{14}$$

Так как u удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_ε, то первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю.

Исследуем второе слагаемое в правой части (14). Заметим, что

$$u_\alpha(x,\alpha,\varepsilon)|_{\beta=\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f'\bigg(\alpha + \frac{x^2}{\varepsilon}\bigg),$$

где $f'(s) := df(s)/ds$. В интеграле перейдём от переменной x к переменной $\xi = x^2/\varepsilon$, тогда

$$4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_\alpha \varphi)(x,\alpha,\varepsilon)\, dx\, d\alpha = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{f'(\alpha+\xi)}{\sqrt{\xi}} (\varphi(\sqrt{\varepsilon\xi},\alpha,\varepsilon) + \varphi(-\sqrt{\varepsilon\xi},\alpha,\varepsilon))\, d\xi =$$

$$= 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s-\alpha}} (\varphi(\sqrt{\varepsilon(s-\alpha)},\alpha,\varepsilon) + \varphi(-\sqrt{\varepsilon(s-\alpha)},\alpha,\varepsilon))\, ds.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$. Воспользовавшись финитностью φ, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\epsilon} \varphi\, \Box\, u\, d\alpha\, d\beta\, dx = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s-\alpha}} \varphi(0,\alpha,0)\, ds.$$

Заметим, что

$$4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_\alpha^{+\infty} \frac{f'(s)}{\sqrt{s-\alpha}} \varphi(0,\alpha,0)\, ds = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\delta(\beta)\mathcal{F}_+(\alpha)\varphi(x,\alpha,\beta)\, dx\, d\alpha\, d\beta, \tag{15}$$

где функция $\mathcal{F}_+$ определена в (11).

Совершенно аналогично, учитывая, что

$$u_\alpha(x,\alpha,\beta)|_{\beta=-\varepsilon} = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} f'\bigg(\alpha - \frac{x^2}{\varepsilon}\bigg),$$

находим предел интеграла по $\Omega_{-\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_{-\varepsilon}} \varphi \,\Box\, u \, d\alpha\, d\beta\, dx = 4i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{f'(s)}{\sqrt{\alpha - s}} \varphi(0, \alpha, 0) =$$

$$= i \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\delta(\beta)\mathcal{F}_-(\alpha)\varphi(x,\alpha,\beta)\, dx\, d\alpha\, d\beta \qquad (16)$$

(функция $\mathcal{F}_-$ определена в (11)). Подставляя (15) и (16) в представление (13), получаем для функции F выражение (10). Теорема 1 доказана.

3. Функции источника для волн (8) и (9). Аналогично доказывается

Теорема 2. *При* $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ *в случае (8) правая часть равенства (7) имеет вид*

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) - \mathcal{F}_-(\alpha)),$$

а в случае (9) – вид

$$F = \delta(x)\delta(\beta)(\mathcal{F}_+(\alpha) + \mathcal{F}_-(\alpha)).$$

Функции $\mathcal{F}_\pm$ *определены в (11).*

Замечание 1. Условие финитности формы волны $f \in C^2(\mathbb{R})$ в условиях теорем 1 и 2 может быть ослаблено. Достаточно потребовать следующей скорости убывания $f'(s)$ при $|s| \to \infty$:

$$|f'(s)| \leqslant \mathrm{const}|s|^{-\gamma-1/2}, \quad \gamma > 0, \quad \mathrm{const} > 0.$$

Замечание 2. Результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для всех чётных пространственных размерностей.

Заключительные замечания. Мы показали, что введённая К. Шимомурой [11, 12] некомплексифицированная волна Бейтмена (6) не является для пространственной размерности 2 при гладких формах волны f решением однородного волнового уравнения $\Box u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Применение классического метода спуска [4, с. 682] к волне Бейтмена (2) даёт решение однородного волнового уравнения для пространственной размерности 2 (см. [13]). Это решение не является относительно неискажающейся волной.

Отметим, что одно из фундаментальных решений двумерного волнового уравнения можно трактовать как функцию вида (6) с сингулярной формой волны $f(\theta) = 1/\sqrt{-\theta}$ (для которой интегралы (11) расходятся, см. [14]). Выражение для соответствующей функции источника качественно отличается от найденного выше для гладких функций f.

Исследования Злобиной Е.А. выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение между МОН РФ и ПОМИ РАН о предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bateman H.* The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics // Proc. London Math. Soc. 1909. V. 7. P. 70–89.
2. *Благовещенский А.С.* Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 23–33.
3. *Blagoveshchensky A.S., Tagirdzhanov A.M., Kiselev A.P.* On the Bateman–Hörmander solution of the wave equation, having a singularity at a running point // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2018. Т. 471. С. 76–85.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964.
5. *Tagirdzhanov A.M., Blagoveshchensky A.S., Kiselev A.P.* “Complex source” wavefields: sources in real space // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. № 42. P. 425203.

6. *Hillion P.* Courant–Hilbert solutions of the wave equation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 8. P. 2749–2753.
7. *Kiselev A.P., Perel M.V.* Highly localized solutions of the wave equation // J. Math. Phys. 2000. V. 41. № 4. P. 1934–1955.
8. *Киселев А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения. Обзор // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 102. № 4. С. 697–717.
9. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986.
10. *Киселев А.П., Перель М.В.* Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1128–1129.
11. *Shimomura K.* Liouville type theorem associated with the wave equation // Math. J. Ibaraki Univ. 2011. V. 43. P. 51–64.
12. *Shimomura K.* Generalizations of Bateman's transformation for general indefinite metrics // Math. J. Ibaraki Univ. 2013. V. 45. P. 7–13.
13. *Благовещенский А.С., Киселев А.П.* Двумерные волны Бейтмена–Хёрмандера с сингулярностью в бегущей точке // Мат. заметки. 2019. Т. 106. Вып. 5. С. 793–796.
14. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Двумерные сингулярные сплэш моды // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2019. Т. 483. С. 79–84.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 22.02.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.