ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 275–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕПЛОФИЗИКЕ

 Е. В. Панкратова

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина в предположении, что его ядра представляют собой ряды из экспонент. Для оператор-функции, являющейся его символом, найдена асимптотика невещественной части спектра.

DOI: 10.31857/S0374064122020133

Введение. Данная работа посвящена исследованию спектра оператор-функции, возникающей при изучении абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\int\limits_0^t Q(t-s)\frac{du(s)}{ds}\,ds+A^2u(t)-\int\limits_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+:=(0,+\infty),\quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(+0)=\varphi_0,\quad u'(+0)=\varphi_1. \quad (2)$$

Здесь A – линейный оператор, действующий в H; $A:\mathrm{Dom}\,(A)\to H$ – самосопряжённый положительно определённый оператор, обратный к которому компактен. При этом предполагается, что скалярные функции $Q(t)$ и $K(t)$ допускают представления

$$Q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}d_ke^{-\gamma_kt},\quad K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{-\gamma_kt},$$

где числа c_k, d_k, γ_k $(k\in\mathbb{N})$ положительны и последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает к $+\infty$.

Задача (1), (2) является операторной моделью известного уравнения Гуртина–Пипкина [1], возникающего в теории теплопроводности, изучению которого посвящено большое количество работ. Отметим, что уравнение вида (1), (2), где $Q\equiv 0$, подробно изучено в работах [2–7]. В работе [8] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. Подход к решению задачи (1), (2) с позиции теории полугрупп развит в [9] и [10].

В данной работе проводится спектральный анализ оператор-функции, возникающей в результате применения преобразования Лапласа к левой части уравнения (1). В частности, получена локализация спектра этой оператор-функции.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H оператор-функцию

$$L(\lambda):=\lambda^2I+\lambda\hat{Q}(\lambda)-\hat{K}(\lambda)A^2+A^2.$$

Функции $\hat{Q}(\lambda)$, $\hat{K}(\lambda)$ – преобразования Лапласа функций $Q(t)$, $K(t)$ соответственно, т.е.

$$\hat{Q}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{\lambda+\gamma_k},\quad \hat{K}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}. \quad (3)$$

В дальнейшем предполагаем, что выполняется

Условие А. Пусть коэффициенты c_k, d_k и числа γ_k $(k \in \mathbb{N})$ допускают следующие представления:

$$c_k = Ak^{-\alpha} + O(k^{-\alpha-1}), \quad d_k = Ek^{-\mu} + O(k^{-\mu-1}), \quad \gamma_k = Bk^{\beta} + O(k^{\beta-1}) \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

где $A > 0$, $B > 0$, $E > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\mu + \beta > 1$, и выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

2. Изучение спектра оператор-функции $L(\lambda)$. При сделанных предположениях относительно оператора A в пространстве H имеется ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, составленный из собственных векторов оператора A. Обозначим собственное значение оператора A, отвечающее вектору e_n, через a_n, т.е. $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Числа a_n вещественны, положительны, не ограничены в совокупности и не имеют конечных предельных точек; без нарушения общности считаем, что последовательность (a_n) не убывает. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим проекции на одномерное собственное подпространство $\operatorname{span} e_n$ вектора $L(\lambda)e_n$, т.е. функцию

$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + \lambda\hat{Q}(\lambda) - a_n^2\hat{K}(\lambda) + a_n^2. \tag{4}$$

Тогда спектр $\sigma(L(\lambda))$ оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с множеством $\{\overline{\bigcup \lambda} : l_n(\lambda) = 0\}$ [2, гл. 3, с. 196]. Обозначим $r := (\alpha + \beta - 1)/\beta$. Из приведённых выше неравенств для чисел α и β следует, что $r \in (0, 1]$. Введём последовательность $\{b_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ функций равенством

$$b_k(t) = -\frac{AB^{r-1}}{\beta t^r}\frac{\pi}{\sin(\pi r)}e^{i\pi(k-r+1)/2}\sum_{j=0}^{k}\biggl(\frac{1}{2^{j+1}(k-j)!}\prod_{s=0}^{k-j-1}(r+s)\biggr).$$

По построению $b_k(a_n) = O(1/a_n^r)$.

Если $r \in (0, 1)$, то обозначим $M := \lceil 1/r \rceil - 1$. С помощью последовательности $\{b_k(a_n)\}_{k=0}^{\infty}$ рекуррентно определим последовательность $\{t_k(a_n)\}_{k=1}^{M}$, положив $t_1(a_n) = b_0(a_n)$, $t_2(a_n) = b_1(a_n)t_1(a_n)$, $t_3(a_n) = b_1(a_n)t_2(a_n) + b_2(a_n)t_1^2(a_n)$ и далее

$$t_k(a_n) = b_1(a_n)t_{k-1}(a_n) + b_2(a_n)(t_1(a_n)t_{k-2}(a_n) + t_2(a_n)t_{k-3}(a_n) + \ldots + t_{k-2}(a_n)t_1(a_n)) +$$

$$+ b_3(a_n)\{t_1(a_n)[t_1(a_n)t_{k-3}(a_n) + t_2(a_n)t_{k-4}(a_n) + \ldots + t_{k-3}(a_n)t_1(a_n)] + t_2(a_n)[t_1(a_n)t_{k-4}(a_n) + \ldots$$

$$\ldots + t_{k-4}(a_n)t_1(a_n)] + \ldots + t_{k-3}(a_n)t_1(a_n)t_1(a_n)\} + \ldots + b_{k-1}(a_n)t_1^{k-1}(a_n).$$

Здесь $t_k(a_n)$, $k \geqslant 2$, является суммой произведений $b_l(a_n)$, где $l = \overline{1, k-1}$, на сумму всевозможных произведений из l множителей, выбранных из набора $\{t_s(a_n)\}_{s=1}^{k-1}$, таких, что сумма индексов в каждом таком произведении из l множителей равна $k-1$.

Предложение. *При $n \to +\infty$ имеет место асимптотическое равенство*

$$t_k(a_n) = O(1/a_n^{rk}).$$

Основной результат работы содержит следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие А. Тогда функция $l_n(\lambda)$ имеет ровно два невещественных корня $\lambda_n^{\pm}$, эти корни комплексно сопряжены, т.е. $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, и асимптотически представимы в виде*

$$\lambda_n^+ = ia_n + a_n\sum_{k=1}^{M} t_k(a_n) + O(1), \quad \text{\textit{если}} \quad 0 < r < 1, \quad M = \lceil 1/r \rceil - 1, \tag{5}$$

$$\lambda_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{A}{\beta}\ln a_n + O(1), \quad \text{\textit{если}} \quad r = 1 \tag{6}$$

при $n \to +\infty$.

Отметим, что сформулированная теорема является обобщением соответствующих результатов из [2, гл. 3; 6]. В указанных работах рассматривался случай $Q(t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы разобьём на несколько этапов.

1. Сначала докажем, что все функции $l_n(\lambda)$ имеют не более двух невещественных нулей.

Обозначим: $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость. Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$ определено неевклидово расстояние [11, с. 30]

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\overline{z_1} - z_2| + |z_1 - z_2|}{|\overline{z_1} - z_2| - |z_1 - z_2|}.$$

В дальнейшем нам понадобится

Теорема Шварца–Пика [11, гл. 4, теорема 3]. *Пусть $f(z)$ – голоморфная функция, отличная от константы, отображающая верхнюю полуплоскость в себя. Тогда для любых двух внутренних точек z_1 и z_2 верхней полуплоскости выполнено неравенство $D(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \leqslant D(z_1, z_2)$, причём равенство достигается только в случае, если $f(z)$ – дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя.*

Лемма 1. *Функция $l_n(\lambda)$, определённая равенством (4), для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет не более двух невещественных корней, причём эти корни комплексно сопряжены.*

Доказательство леммы. Запишем уравнение $l_n(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\hat{Q}(\lambda) - a_n^2\hat{K}(\lambda) + a_n^2 = 0$ в виде равенства $\lambda = \psi(f_n(\lambda))$, где $f_n(\lambda) = -a_n^2 + a_n^2\hat{K}(\lambda) - \lambda\hat{Q}(\lambda)$ и $\psi(z) = |z|^{1/2}e^{(i\arg z)/2}$.

Несложно видеть, что $f_n(\lambda) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_-$. Поэтому $\psi(f_n(\lambda)) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$.

Если $z_1 = \psi(f_n(z_1))$, $z_2 = \psi(f_n(z_2))$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$, $z_1 \neq z_2$, то по теореме Шварца–Пика $D(z_1, z_2) = D(\psi(f_n(z_1)), \psi(f_n(z_2))) < D(z_1, z_2)$. Последнее неравенство верно, поскольку $\psi(f_n(z))$ не является дробно-линейным отображением. Единственность доказана.

2. Покажем, что для достаточно больших натуральных n невещественные нули функции $l_n(\lambda)$ асимптотически представимы в виде $\lambda_n^+ = ia_n + \tau_n a_n$, $\lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+}$, где $\{\tau_n\}$ – некоторая числовая последовательность. Для этого достаточно показать, что асимптотическое представление λ_n^+ удовлетворяет уравнению $l_n(\lambda_n^+) = 0$, т.е. $\tau_n = g_n(\tau_n)$, где

$$g_n(\tau) = \frac{1}{\tau + 2i}\left(\hat{K}(ia_n + \tau a_n) - \frac{ia_n + \tau a_n}{a_n^2}\hat{Q}(ia_n + \tau a_n)\right), \quad z_n = ia_n + \tau a_n. \tag{7}$$

Таким образом, для достаточно больших n число τ_n является неподвижной точкой отображения $\tau \mapsto g_n(\tau)$. Следовательно, достаточно показать, что для всех n, начиная с некоторого, отображение $\tau \mapsto g_n(\tau)$ является сжимающим. Тогда искомое решение $\tau_n \in \mathbb{R}$ может быть найдено как предел последовательности $\tau_n^{[k]}$, $k \to \infty$, где $\tau_n^{[k]} = g_n(\tau_n^{[k-1]})$, $\tau_n^{[0]} = 0$.

В дальнейшем в доказательстве мы будем заменять суммы рядов интегралами и проводить оценки полученных интегралов. Для этого нужны леммы 2–5, носящие технический характер.

Лемма 2. *Пусть $z \in \mathbb{C}$, а функции $\hat{K}(z)$, $\hat{Q}(z)$ определены равенством (3). Если $|\arg z| < < \pi - \delta$, где $\delta > 0$ и $|z| > 1$, то справедливы следующие утверждения:*

$$|\hat{K}^{(k)}(z) - h_k(z)| \lesssim \frac{1}{|z|^{k+1}}, \quad \text{где} \quad h_k(z) = (-1)^k k! \int_1^\infty \frac{A\,dx}{x^\alpha(z + Bx^\beta)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}; \tag{8}$$

$$\hat{K}^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k! AB^{r-1}}{\beta|z|^{r+k}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^r(e^{i\varphi} + t)^{k+1}} + O(1/|z|^{k+1}) \quad \text{при} \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\};$$

$$\hat{K}^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k! A}{\beta z^{k+1}} \ln\left|\frac{z}{B} + 1\right| + O(1/|z|^{k+1}) \quad \text{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\};$$

$$|z^k\hat{K}^{(k)}(z)| \to 0, \quad |z^k\hat{Q}^{(k)}(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to +\infty, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Отношение $\lesssim$ в (8) означает, что если $a_k \lesssim b_k$ при $k \in \mathbb{N}$, то найдётся постоянная $c > 0$ такая, что $a_k \leqslant cb_k$ при $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *Отображение $\tau \mapsto g_n(\tau)$, определённое равенством (7), является сжимающим. При этом функция $g_n(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < 1/2$.*

Лемма 4. *Пусть отображение $\hat{K}(\lambda)$ определено равенством (3). Тогда*

$$\hat{K}^{(k)}(ia_n) = \frac{AB^{r-1}}{\beta a_n^{r+k}} \frac{\pi}{\sin(\pi r)} \prod_{j=0}^{k-1} (r+j) e^{i\pi(k-r)/2} + O(1/a_n^{k+1}) \quad \text{при} \quad 0 < r < 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

$$\hat{K}^{(k)}(ia_n) = \frac{(-1)^k k! A}{i^{k+1} \beta a_n^{k+1}} \ln a_n + O(1/a_n^{k+1}) \quad \text{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Лемма 5. *Пусть отображение $g_n(\tau)$ определено равенством (7). Тогда верны следующие соотношения:*

$$g_n^{(k)}(0) = -k! \frac{AB^{r-1}}{\beta a_n^r} \frac{\pi}{\sin(\pi r)} e^{i\pi(k-r+1)/2} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{2^{j+1}(k-j)!} \prod_{s=0}^{k-j-1} (r+s) \right) + O(1/a_n) =$$

$$= k! b_k + O(1/a_n) \quad \text{при} \quad r \in (0,1), \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

$$g_n^{(k)}(0) = -k! e^{i\pi k/2} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \frac{A}{\beta a_n} \ln(a_n) + O(1/a_n) \quad \text{при} \quad r = 1, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Представим функцию $g_n(\tau)$ в круге $|\tau| < 1/2$ степенным рядом $g_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (g_n^{(k)}(0) \tau^k / k!)$ и будем искать для каждого n предел последовательности $\tau_n^{[k]}$, $k \to \infty$, где, как и выше, $\tau_n^{[k]} = g_n(\tau_n^{[k-1]})$, $\tau_n^{[0]} = 0$. Рассмотрим сначала случай $r \in (0,1)$. Для каждого n имеем равенство $g_n^{(k)}(0)/k! = b_k + \theta_n^{[k]}$, где $\theta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. Группируя члены по степеням a_n до степени $1/a_n$, получаем

$$\tau_n^{[0]} = 0,$$

$$\tau_n^{[1]} = g_n(\tau_n^{[0]}) = b_0(a_n) + \theta_n^{[0]} = t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]},$$

$$\tau_n^{[2]} = g_n(\tau_n^{[1]}) = (b_0(a_n) + \theta_n^{[0]}) + (b_1(a_n) + \theta_n^{[1]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]}) + (b_2(a_n) + \theta_n^{[2]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]})^2 + \ldots$$

$$\ldots + (b_{M-1}(a_n) + \theta_n^{[M-1]})(t_1(a_n) + \varphi_n^{[1]})^{M-1} + \psi_n^{[2]} = b_0(a_n) + b_1(a_n) t_1(a_n) + b_2(a_n) t_1^2(a_n) + \ldots + \varphi_n^{[2]} =$$

$$= t_1(a_n) + t_2(a_n) + b_2(a_n) t_1^2(a_n) + \ldots + b_{M-1}(a_n) t_1^{M-1}(a_n) + \varphi_n^{[2]},$$

$$\ldots,$$

$$\tau_n^{[k]} = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + \varphi_n^{[k]} \quad \text{для} \quad k \geqslant M.$$

Отметим, что для каждого k справедливы равенства $\theta_n^{[k]} = O(1/a_n)$, $\psi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ и $\varphi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_n^{[k]} = \tau_n$, поэтому для $\varepsilon = 1/a_n$ существует $\tilde{k}$ такое, что для любого $k > \tilde{k}$ выполняется неравенство $|\tau_n - \tau_n^{[k]}| < 1/a_n$, т.е.

$$\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}, \quad \text{где} \quad \delta_n^{[k]} = O(1/a_n), \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, выбрав k бóльшим, чем $\max(M, \tilde{k})$, будем иметь $\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + \varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}$. Следовательно, $\tau_n = t_1(a_n) + \ldots + t_M(a_n) + O(1/a_n)$.

Рассмотрим теперь случай $r = 1$. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получаем, что $\tau_n^{[k]} = g_n(0) + \varphi_n^{[k]}$ при $k \geqslant 1$, где $\varphi_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_n^{[k]} = \tau_n$. Поэтому для $\varepsilon = 1/a_n$ существует $\tilde{k}$ такое, что для любого $k > \tilde{k}$ выполняется неравенство $|\tau_n - \tau_n^{[k]}| < 1/a_n$, т.е. $\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]}$, где $\delta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$. Фиксируя $k > \tilde{k}$ и учитывая, что $\varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = O(1/a_n)$ при $n \to +\infty$, получаем

$$\tau_n = \tau_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = g_n(0) + \varphi_n^{[k]} + \delta_n^{[k]} = -\frac{1}{2}\frac{A}{\beta a_n}\ln a_n + O(1/a_n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, при $r \in (0, 1)$ справедливо асимптотическое равенство (5), а при $r = 1$ – равенство (6). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. В.В. Власову за постановку задачи и внимание к работе, а также всем участникам семинара под его руководством за полезные указания и обсуждения полученных результатов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ “Математические методы анализа сложных систем”, а также Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds"// Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
3. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
4. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 62. С. 53–71.
5. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 75–113.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
8. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
9. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
10. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. М., 2016. С. 41–66.
11. *Каратеодори К.* Конформное отображение. М., 1934.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.
После доработки 02.02.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2022 г.