ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 2, с. 280–288

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2021 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2021. Т. 57. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064122020145

А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Перспективы использования нейрорегуляторов для стабилизации переключаемых систем” (13.09.2021).

Рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u, \quad \sigma \in S_\tau, \tag{1}$$

где $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to I = \{1,\ldots,m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество всех тех переключающих сигналов σ, для которых время между каждыми двумя соседними переключениями не меньше τ $(\tau > 0)$; I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $A_\sigma = A\circ\sigma$ – композиция отображения $A\colon I \to \{A_1,\ldots,A_m\}$ $(A_i \in \mathbb{R}^{n\times n})$ и переключающего сигнала σ, а $b_\sigma = b\circ\sigma$ – аналогичная композиция для отображения $b\colon I \to \{b_1,\ldots,b_m\}$ $(b_i \in \mathbb{R}^n)$; пары матриц (A_i, b_i), $i = \overline{1,m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий вход.

Требуется *стабилизировать* систему (1) в некоторой окрестности $D(0)$ нуля, т.е. построить обратную связь $u = u(x)$ такую, что для каждого $\sigma \in S_\tau$ и любого $x_0 \in D(0)$ норма решения $x(t)$ с начальным вектором $x(0) = x_0$ системы (1) стремится к нулю при $t \to \infty$. При этом вектор-функция $x(t)$ определяется как решение линейной дифференциальной системы с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u, \quad x(0) = x_0, \quad \sigma \in S_\tau.$$

Один из возможных подходов к решению поставленной задачи заключается в построении переключаемого регулятора

$$u = -k_\sigma x, \tag{2}$$

каждый режим которого является стабилизирующей обратной связью $u = -k_i x$ для, соответственно, i-го режима $\dot{x} = A_i x + b_i u$ переключаемой системы (1), т.е. обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы $\dot{x} = (A_i - b_i k_i)x$. Такую обратную связь всегда можно построить в предположении полной управляемости пары (A_i, b_i) [1, с. 249].

Основная проблема данного подхода состоит в том, что для реализации указанного регулятора необходимо знать моменты переключения режимов и номера активных режимов в каждый момент времени (т.е. функцию σ) – для того чтобы обеспечить синхронность переключений регулятора и отображения A_σ. Однако, как правило, такая информация о переключаемой системе в режиме реального времени не доступна.

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Возможное решение, позволяющее использовать данный регулятор, заключается в построении “наблюдателя”, который определял бы номер активного режима для текущего момента времени. В качестве такого “наблюдателя” предлагается использовать нейронную сеть [2, с. 55].

Пару – переключаемый регулятор и нейронная сеть – далее будем называть *нейрорегулятором*. Перенумеруем (от 1 до m^2) все возможные режимы $\dot{x} = (A_i - b_i k_j)x \quad (i, j = \overline{1, m})$ системы (1), замкнутой переключаемым регулятором (2). Основная работа нейронной сети состоит в следующем: выбирается дискретная последовательность моментов времени εl, $l = 0, 1, 2\ldots$, где ε – достаточно малая положительная константа $(\varepsilon < \tau)$, и далее по каждой паре измерений вектора состояния $(x(\varepsilon l), x(\varepsilon(l+1)))$ нейронная сеть должна определять номер текущего режима замкнутой переключаемой системы в момент $t = \varepsilon(l+1)$. Используя данную информацию, осуществляется переключение векторов k_i стабилизирующей обратной связи в переключаемом регуляторе.

Можно выделить несколько основных шагов настройки нейрорегулятора:

1) выбор структуры нейросети;

2) выбор величины ε с учётом времени задержки τ;

3) выбор регуляторов $u = -k_i x$, обеспечивающих нужное быстродействие с учётом параметра τ;

4) построение обучающей выборки для нейросети с учётом окрестности $D(0)$, в которой осуществляется стабилизация переключаемой системы;

5) обучение нейросети на парах $(x(0), x(\varepsilon))$;

6) проверка работоспособности нейросети по определению текущего активного режима;

7) моделирование переключаемой системы (1), замкнутой нейрорегулятором.

Данный алгоритм прошёл апробацию на примере переключаемой системы вида (1) второго порядка с двумя режимами. Результаты моделирования подтвердили работоспособность изложенного выше алгоритма стабилизации системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

Литература. 1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 2. Хайкин С. Нейронные сети. М., 2006.

Н.А. Магницкий (Россия, Москва, ФИЦ ИУ РАН). “Вывод дифференциальных уравнений Максвелла из уравнений классической механики” (27.09.2021).

Считается, что система линейных дифференциальных уравнений электромагнитного поля в вакууме – система уравнений Максвелла – “не вытекает из каких-либо более общих теоретических положений, но является обобщённой записью наблюдавшихся на опыте фактов” [1, с. 41]. Покажем, что это не так и что система уравнений Максвелла является следствием системы уравнений вакуума (эфира), предложенной автором в [2–4] и описывающей эфирную среду в трёхмерном евклидовом пространстве двумя нелинейными уравнениями, которые следуют из уравнений классической механики Ньютона

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{d\rho\,\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \rho\,\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

в них векторы $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{r}(t)$ являются соответственно скоростью и координатами распространения локальных возмущений плотности $\rho(t, \mathbf{r})$ среды (эфира) в каждый момент времени t.

Определения векторов напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ даны в работах автора [2–4] и выражаются формулами

$$\mathbf{B} = c\nabla \times (\rho\mathbf{u}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}), \tag{2}$$

где c – скорость распространения возмущений в эфире (скорость света).

Три уравнения Максвелла из четырёх получаются достаточно просто из системы уравнений эфира (1). Применим к выражениям (2) оператор дивергенции $\nabla\,\cdot$. Получим два уравнения из системы уравнений Максвелла:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\sigma, \tag{3}$$

здесь σ имеет смысл плотности заряда, определяемой возмущениями плотности эфира

$$4\pi\sigma = \nabla \cdot (|\mathbf{u}|\nabla(\rho|\mathbf{u}|) - \mathbf{u} \times (\nabla \times (\rho\mathbf{u}))).$$

Применим оператор ротора $c\nabla\times$ ко второму уравнению системы (1). Придём к первому уравнению из системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

являющемуся обобщением закона индукции Фарадея.

Наиболее сложным является вывод второго уравнения из системы уравнений Максвелла, содержащего плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность тока смещения. Применим ко второму уравнению системы (1) оператор производной вдоль кривой $(\mathbf{u}\cdot\nabla)$. Получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)((\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u})) - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot\nabla\right)(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Используя далее вытекающее из системы (1) уравнение $\partial\mathbf{u}/\partial t = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$ и известные правила действия с оператором набла ∇, придём к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{c}\mathbf{B}\right) + 4\pi\mathbf{j} = 0, \tag{5}$$

в котором $\mathbf{j}$ имеет смысл вектора плотности электрического тока и

$$4\pi\mathbf{j} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\mathbf{u}\times(\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{u}))) +$$
$$+ \nabla\times(\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}))) - (((\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u})\cdot\nabla)\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \rho\mathbf{u}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\mathbf{u}.$$

В случае $|\mathbf{u}| \approx c$ и экспериментально определяемых σ и $\mathbf{j}$ уравнения (3)–(5) переходят в классическую линейную систему уравнений Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\sigma. \tag{6}$$

Таким образом, систему уравнений (3)–(5) можно интерпретировать как систему обобщённых нелинейных уравнений Максвелла. Важно отметить, что исходные нелинейные уравнения эфира (1) инвариантны относительно преобразования Галилея. Одной из причин потери такой инвариантности в классических линейных уравнениях Максвелла является линеаризация обобщённых нелинейных уравнений Максвелла (3)–(5) при $|\mathbf{u}| \approx c$. Другой причиной является применение операторов дифференцирования при переходе к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Последнее приводит также к потере продольной компоненты в винтовой электромагнитной волне эфира (фотоне)

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = u_0\sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + c\mathbf{i}_y + u_0\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_z, \quad \omega = kc, \tag{7}$$

распространяющейся со скоростью света c в направлении y в эфире постоянной плотности, где u_0– амплитуда поперечной компоненты скорости, а $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ – единичные базисные векторы декартовой системы координат. Нетрудно проверить, что вектор (7) является решением системы уравнений (1), записанной в декартовой системе координат. Вычисляя теперь векторы индукции магнитного поля и напряжённости электрического поля по формулам (2), получаем

$$\mathbf{B} = c\nabla\times(\rho\mathbf{u}) = u_0\rho\omega(\sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + \cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_z), \tag{8}$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}) = u_0\rho\omega(-\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_x + \sin(\omega t - ky)\mathbf{i}_z). \tag{9}$$

Векторы (8) и (9) ортогональны между собой, имеют равные амплитуды $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| = u_0\rho\omega$ и лежат в плоскости (x,z), ортогональной направлению движения эфирной волны (фотона).

Нетрудно проверить, что векторы (8) и (9) являются также решениями классической линейной системы уравнений Максвелла (6) в случае отсутствия зарядов и токов. Следовательно, в этом частном случае линейная система уравнений Максвелла (6) даёт верный результат в виде плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны.

В другом частном случае, когда решением системы уравнений (1) является продольная волна возмущений плотности эфира

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = c\mathbf{i}_y, \quad \rho(t,\mathbf{r}) = \rho_0(1+\alpha\sin(\omega t - ky)), \quad \omega = kc, \quad \alpha \ll 1, \tag{10}$$

вычисленные по формулам (2) векторы индукции магнитного поля и напряжённости электрического поля имеют вид

$$\mathbf{B} = c\nabla\times(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\mathbf{u}) = -c\omega\rho_0\alpha\cos(\omega t - ky)\mathbf{i}_y.$$

Следовательно, этот случай не описывается линейной системой уравнений Максвелла. Вполне вероятно, что продольная волна возмущений плотности эфира (10) является волной радиантного электричества Николы Тесла. Вывод из системы (1) других известных физических законов и уравнений можно найти в работах автора [5, 6].

Литература. 1. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М., 1969. 2. Магницкий Н.А. Математическая теория физического вакуума. М., 2010. 3. Магницкий Н.А. К электродинамике физического вакуума // Сложные системы. 2011. Т. 1. № 1. С. 83–91. 4. Magnitskii N.A. Mathematical theory of physical vacuum // Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul. 2011. V. 16. P. 2438–2444. 5. Magnitskii N.A. Theory of compressible oscillating ether // Results in Phys. 2019. V. 12. P. 1436–1445. 6. Магницкий Н.А. Теория сжимаемого осциллирующего эфира. М., 2021.

Е.И. Атамась, А.И. Роговский (Москва, Россия, ВМК МГУ). “О свойствах обобщения относительного порядка для систем с запаздыванием” (11.10.2021).

Рассматриваем линейную стационарную управляемую систему с соизмеримыми запаздываниями. Такая система имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-i\tau) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-i\tau), \quad y(t) = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-i\tau). \tag{1}$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $y(t),u(t)\in\mathbb{R}^l$, матрицы A_i, B_i, C_i, $i=\overline{1,l}$, постоянны и имеют соответствующие размеры, $\tau>0$. Будем рассматривать квадратные системы, т.е. системы, размерности входа и выхода которых одинаковы. Далее введём оператор запаздывания и, заменив его символом Δ, получим систему в алгебраической форме [1]:

$$\dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u, \quad y = C(\Delta)x, \tag{2}$$

где $A(\Delta)$, $B(\Delta)$, $C(\Delta)$ – полиномиальные матрицы размеров $n\times n$, $n\times l$, $l\times n$ соответственно. Систему (2) будем называть также *системой* (A,B,C).

Определение 1. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{N}^l$ называется *вектором относительного порядка* системы (2), если выполнены следующие условия:

1) $C_{i*}(\Delta)A^{r_i-1}(\Delta)B(\Delta)\neq 0$ *) и если $r_i>1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta)=0$, где через $C_{i*}(\Delta)$ обозначена i-я строка матрицы $C(\Delta)$;

2) определитель матрицы

$$H(\Delta) = \begin{pmatrix} C_{1*}(\Delta)A^{r_1-1}(\Delta)B(\Delta) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{l*}(\Delta)A^{r_l-1}(\Delta)B(\Delta) \end{pmatrix}$$

является ненулевым полиномом.

*) т.е. указанная строка отлична от строки, целиком состоящей из нулевых полиномов.

Если, кроме этого, определитель $\det H(\Delta)$ обратим, т.е. является ненулевым числом, то относительный порядок называется *чистым*.

Понятие относительного порядка имеет фундаментальное значение в математической теории управления, в частности, при решении задач наблюдения и обращения [2]. К сожалению, не для всех систем относительный порядок определён, поэтому приходится рассматривать обобщения этого понятия. В докладе приводятся некоторые результаты о свойствах таких обобщений для систем с запаздыванием, близкие к результатам работы [3].

Определение 2. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется *вектором неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (2), если для него выполнено условие 1) определения 1.

Определение 3. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется *вектором главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*), если r – вектор НОП и для любых попарно различных индексов $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$, полином

$$G[C_{i_1*}A^{r_{i_1}-1}B,\, C_{i_2*}A^{r_{i_2}-1}B,\, \ldots,\, C_{i_q}A^{r_{i_q}-1}B]$$

ненулевой, где $G[v_1, v_2, \ldots, v_p] = \det(v_i v_j^{\mathrm{т}})_{i,j=1}^k$ – определитель матрицы Грама.

Определение 4. Систему $\{A, B, C\}$ назовём *слабо приводимой*, если при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП.

Утверждение 1. *Система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой тогда и только тогда, когда матрица*

$$V(\Delta) = [CB, CAB, \ldots, CA^{n-1}B]$$

имеет полный ранг l при всех Δ, за исключением, быть может, конечного числа значений.

Утверждение 2. *Пусть система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой. Тогда найдётся такая унимодулярная матрица T, что система $\{A, B, TC\}$ имеет вектор ГНОП.*

Утверждение 3. *Пусть r – вектор ГНОП слабо приводимой системы $\{A, B, C\}$. Тогда при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП $\tilde{r}$, причём выполнено покомпонентное неравенство $\mathrm{ord}\,(r) \geqslant \mathrm{ord}\,(\tilde{r})$, где $\mathrm{ord}\,(r)$ обозначает вектор с теми же компонентами, что и у r, но упорядоченными по невозрастанию.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных-кандидатов наук (проект МК-4905.2021.1.1).

Литература. 1. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems // IFAC Proc. Volumes. 1974. V. 7. № 1. P. 439–445. 2. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 11–15. 3. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. Обобщение понятия относительного порядка и его свойства // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1099–1108.

В.В. Фомичев, Н.И. Денисова (Москва, Россия, ВМК МГУ, ИПМ им. М.В. Келдыша).
"Наблюдатели для квазистационарных систем при внешних возмущениях" (15.11.2021).

Хорошо известны подходы к построению наблюдателей линейных стационарных систем [1]. Как правило, для построения таких наблюдателей требуется достаточная гладкость параметров системы. Большой интерес вызывает случай линейных нестационарных систем. С возникающими проблемами можно бороться с помощью, например, адаптивных наблюдателей [2]. Для некоторых линейных нестационарных систем можно построить даже экспоненциально устойчивый наблюдатель [3]. Значительно интереснее обстоит дело в задаче о синтезе наблюдателей для систем с возмущениями при непрерывности или однократной дифференцируемости параметров системы. Если для стационарного случая известны различные методы решения этой задачи (при различных предположениях о системе), то в нестационарном случае продвижений в её решении очень мало.

В докладе предпринята попытка перенести некоторые результаты, полученные для линейных стационарных систем с возмущением, на нестационарный случай.

Итак, рассматриваем систему

$$\dot{x} = A(t)x + D(t)f, \quad y = C(t)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, известные матрицы $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – гладкие по t и имеют соответствующий порядок, возмущение f мажорируется константой.

Требуется по информации об известном входе $u(t)$ и известном выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Далее предполагаем, что (1) является *гипервыходной системой*, т.е. системой, для которой $l > m$ (число известных выходов больше числа неизвестных входов). Предполагаем также, что $\operatorname{rank}(CD) = m$, т.е. матрица CD имеет полный ранг. Кроме того, считаем, что последнее условие выполняется "равномерно по выходам", т.е. что выход можно разделить:

$$y = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \det\big(C'(t)D(t)\big) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t.$$

Применяя сначала стационарное преобразование координат с произвольной матрицей F такой, что

$$T = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix}, \quad \det T(t) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t, \quad Tx = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = T'x' + T''y',$$

а затем делая нестационарную замену $\tilde{x}' = x' - FD(C'D)^{-1}y'$, получаем систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \dot{y}' = A_{21}(t)\tilde{x}' + A_{22}(t)y' + A_{24}f.$$

Рассмотрим "запасные" выходы, которые после преобразований принимают вид

$$y'' = C''T'\tilde{x}' + C''(T'FD(C'D)^{-1} + T'')y',$$

откуда получаем итоговую систему без явного влияния возмущения с известным выходом, для которой можно пробовать строить наблюдатель:

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}', \tag{2}$$

где $\tilde{C} = C''T'$.

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим квазистационарный случай системы третьего порядка, когда $n = 3$, C и D – постоянные матрицы. Тогда

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Система (1), (3) наблюдаема тогда и только тогда, когда* $a_{13}^2(t) + a_{23}^2(t) \neq 0$.

В силу вида исходной матрицы C можно выполнить невырожденное стационарное преобразование

$$Tx = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

В итоге получим систему (2) с матрицами

$$A_{11}(t) = \begin{pmatrix} -d_2a_{12}(t) + a_{22}(t) & -d_2a_{13}(t) + a_{23}(t) \\ -d_3a_{12}(t) + a_{32}(t) & -d_3a_{13}(t) + a_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$$A_{12}(t) = \begin{pmatrix} a_{21}(t) - d_2a_{11}(t) - d_2^2a_{12}(t) + d_2a_{22}(t) - d_2d_3a_{13}(t) + d_3a_{23}(t) \\ a_{31}(t) - d_3a_{11}(t) - d_2d_3a_{12}(t) + d_2a_{32}(t) - d_3^2a_{13}(t) + d_3a_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = (1,\ 0).$$

Для построения наблюдателя необходима наблюдаемость пары $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$.

Лемма 2. *Пара* $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$ *наблюдаема, когда* $a_{23}(t) \not\equiv d_2 a_{13}(t)$.

Замечание. В случае ненаблюдаемости исходной системы (3) пара $\{A_{11}(t), \tilde{C}\}$ также не будет наблюдаемой.

Итак, имеем наблюдаемую систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}'.$$

Строим наблюдатель

$$\dot{\bar{x}} = A_{11}(t)\bar{x} + A_{12}(t)y' - L(\tilde{C}\tilde{x}' - y), \quad \text{где } L = (l_1, l_2)^{\mathrm{т}}.$$

Для матрицы

$$A_L(t) = A_{11}(t) - L\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) - l_1(t) & \tilde{a}_{12}(t) \\ \tilde{a}_{21}(t) - l_2(t) & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix}$$

рассмотрим функцию Ляпунова $V = e^{\mathrm{т}}Pe$, $\dot{e} = A_L e$ с матрицей $P = \operatorname{diag}[h_1, h_2]$, $h_1, h_2 > 0$.

Теорема. *Задача наблюдения может быть решена при* $\tilde{a}_{22}(t) = a_{33}(t) - d_3 a_{13}(t) > 0$.

В этом случае $l_1 = l_1(t) = \tilde{a}_{11}(t) + \delta$, $\delta > 0$, а функция l_2 выбирается достаточно малой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

Литература. 1. Fomichev V.V., Vysotskii A.O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differ. Equat. 2019. V. 67. № 3. P. 553–560. 2. Куок Дат Во, Бобцов А.А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 100–110. 3. Зубер И.Е. Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для линейных нестационарных систем с одним выходом // Автоматика и телемеханика. 1995. № 5. С. 42–49.

Д.В. Злобин (Москва, Россия, ВМК МГУ). “Анализ эффективности автоматически сгенерированного кода для вычисления матриц Якоби и Гессе в задачах нелинейного программирования” (13.12.2021).

Пусть нелинейный динамический объект задан в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$
$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

а на его фазовый вектор наложены нелинейные ограничения

$$G_L \leqslant G(x(t), u(t), T) \leqslant G_U,$$

где $f(x,u), x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$; $u(t) \in \mathbb{R}^m$; $G(x,u,T), G_L, G_U \in \mathbb{R}^r$; $T \in \mathbb{R}_+$.

Для этого объекта требуется решить задачу оптимального управления (ОУ) с нелинейным функционалом качества:

$$\min_{u(t)\in\mathcal{U}} F(x(t), u(t), T),$$

где $F(x,u,T) \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{U}$ – множество допустимых управлений.

Один из способов решения такой задачи состоит в переходе от неё к задаче нелинейного программирования (НЛП) при помощи дискретизации по времени фазового вектора, управления, уравнений динамики, ограничений и функционала качества [1, с. 91–216]. Полученная задача НЛП решается одним из численных методов. Если ограничения и функционал качества задачи НЛП дважды непрерывно дифференцируемы, то можно использовать решатель IpOpt [2], являющийся открытой эффективной реализацией метода внутренней точки.

Для применения решателя IpOpt пользователь должен предоставить реализацию на языке C++ функций для вычисления функционала качества, ограничений, градиента функционала качества, ненулевых элементов матрицы Якоби для ограничений и ненулевых элементов матрицы Гессе для лагранжиана задачи. Эти функции могут быть написаны вручную или сгенерированы при помощи специального программного обеспечения на основе высокоуровневого описания задачи НЛП.

В данном докладе сравниваются быстродействия автоматически сгенерированных кодов, полученных при помощи пакетов sympy2ipopt [3, 4] и CasADi [5]. Пакет CasADi, основанный на идеях автоматического дифференцирования, ориентирован на общий случай задач НЛП. В отличие от него разработанный автором доклада пакет sympy2ipopt явно использует особенности структуры задач НЛП, полученных при дискретизации задач ОУ. Это делает результирующий код более компактным и потенциально более быстрым.

Для проведения тестирования были выбраны четыре тестовые задачи ОУ из набора COPS3 [6]: “robot”, “rocket”, “steering”, “glider”. Применялся компилятор gcc 9.3.0, вычисления проводились на компьютере с процессором Intel® Core$^{\mathrm{TM}}$ i7-9750H.

Результаты экспериментов приведены в табл. 1 и 2. В первом случае сборка осуществлялась с использованием флага оптимизации “-O3”, а во втором – флага “-Ofast”.

Таблица 1. Время (в мкс), затраченное на вычисление автоматически сгенерированных функций, сборка осуществлялась с флагом “-O3”

Функции	sympy2ipopt				CasADi			
	robot	rocket	steering	glider	robot	rocket	steering	glider
Функционал качества	1	1	1	1	3	3	3	3
Ограничения	118	18	32	47	144	34	41	146
Градиент	3	2	2	2	11	7	7	6
Матрица Якоби	430	81	50	364	370	144	140	385
Матрица Гессе	1050	223	24	2359	404	183	85	770

Таблица 2. Время (в мкс), затраченное на вычисление автоматически сгенерированных функций, сборка осуществлялась с флагом “-Ofast”

Функции	sympy2ipopt				CasADi			
	robot	rocket	steering	glider	robot	rocket	steering	glider
Функционал качества	2	1	1	1	3	3	3	3
Ограничения	22	13	22	13	50	30	33	117
Градиент	3	2	2	2	10	7	7	6
Матрица Якоби	75	40	37	56	265	136	127	344
Матрица Гессе	78	39	24	54	297	177	76	711

По сравнению с фагом “-O3” флаг “-Ofast” включает дополнительные оптимизации, которые не соответствуют спецификациям IEEE и ISO для математических функций. В частности, не устанавливается переменная “errno” после выполнения математических операций, которые занимают одну инструкцию, предполагается, что в процессе выполнения не будет ошибок деления на нуль, переполнения и т.п.

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, использование пакета sympy2ipopt даёт выигрыш в скорости, за исключением вычисления элементов матриц Якоби и Гессе при сборке с флагом “-O3” для задач “robot” и “glider”. Во-вторых, использование флага компилятора “-Ofast” существенно увеличивает скорость выполнения кода для вычисления элементов матриц Якоби и Гессе, сгенерированного при помощи пакета sympy2ipopt.

Степень влияния флага “-Ofast” объясняется способом представления математических выражений, который использует программный пакет. Пакет CasADi основан на представлении выражений в виде направленного графа, а пакет sympy2ipopt использует средства библиотеки SymPy [7] (символьные вычисления на языке Python), в которой выражения представляются в виде дерева. Из-за этого многократно вычисляются одни и те же подвыражения, что приводит к большим накладным расходам на проверки, если не указан флаг компилятора “-Ofast”.

Полученные результаты показывают, что изменение представления математических выражений в пакете sympy2ipopt позволит добиться высокой скорости выполнения сгенерированного кода без использования “агрессивной” оптимизации “-Ofast”.

Литература. 1. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. Philadelphia, 2010. 2. Wächter A., Biegler A. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming // Math. Programming. 2006. V. 106. P. 25–57. 3. Злобин Д.В. Использование разреженной структуры матриц Якоби и Гессе для ускорения численного решения задач оптимального планирования траекторий // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. Т. 25. № 4. С. 285–288. 4. GitHub. symp2ipopt. 2021. Режим доступа: https://github.com/zlobin-d/sympy2ipopt (Дата обращения: 13.12.2021). 5. Andersson J.A.E., Gillis J., Horn G., Rawlings J.B., Diehl M. CasADi – a software framework for nonlinear optimization and optimal control // Math. Progr. Comput. 2019. V. 11. P. 1–36. 6. Dolan E.D., Moré J.J., Munson T.S. Benchmarking Optimization Software with COPS 3.0 // Technical Memorandum. ANL/MCS-TM-273. Argonne National Laboratory, 2004. 7. Meurer A., Smith Ch.P., Paprocki M., Čertík O. SymPy: symbolic computing in Python // Peer J. Comp. Sci. 2017. V. 3. P. e103.

Р.Р. Бегишев, А.В. Ильин, А.И. Роговский (Москва, Россия, ВМК МГУ). "Достаточные условия существования периодических решений у нелинейной системы третьего порядка" (20.12.2021).

Рассматривается нелинейная система третьего порядка

$$\dot{z_1} = z_2, \quad \dot{z_2} = -z_1 + \mu(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) f(z_3)), \quad \dot{z_3} = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(z_1)) + 1), \tag{1}$$

где числа α, β, γ, Δ, ζ положительны, а $f(z)$ – возрастающая, непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция. Требуется найти параметры системы, при которых у неё существует нестационарное периодическое решение.

Отметим, что вопрос о существовании периодических решений у системы (1) с конкретной функцией $f(z_3)$ исследовался в работах [1–4]. В настоящем докладе результаты работы [4] обобщаются на случай произвольной функции $f(z_3)$.

Используя результаты, приведённые в монографии [5, гл. XIV], доказана следующая

Теорема. *Пусть функция* $H(p)$, $p \in \mathbb{R}$, *задана равенством*

$$H(p) = \gamma \pi p + \int\limits_0^{2\pi} (\Delta - p\cos(s)) f(\omega(s,p)) \sin(s)\, ds,$$

где

$$\omega(s,p) = e^{-\beta s}\left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta}-1}\int\limits_0^{2\pi} e^{\beta q}\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p\cos(q)))\, dq + \alpha\int\limits_0^{s} e^{\beta q}\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p\cos(q)))\, dq\right) + \frac{\alpha}{\beta},$$

и числа α, β, γ, Δ, ζ *таковы, что найдётся положительное* $\overline{p}$, *для которого выполняются соотношения* $H(\overline{p}) = 0$ *и* $dH(\overline{p})/dp \neq 0$. *Тогда найдётся такое* $\overline{\mu} > 0$, *что система (1) имеет отличное от константы периодическое решение при всех* $\mu \in [0, \overline{\mu}]$.

Литература. 1. Fomichev V.V., Iline A.V., Rogovskii A.I., Todorov G.D., Sofronov Ya.P. Search for periodic regimes in an energy-harvester model by simulation // Comput. Math. and Model. 2020. V. 31. № 1. P. 293–307. 2. Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115. 3. Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С. О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121. 4. Фомичев В.В., Ильин А.В., Роговский А.И., Бегишев Р.Р., Митрев Р.П., Тодоров Т.С. О существовании периодических решений у нелинейной системы третьего порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 10. С. 1367–1383. 5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.