

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.42

ГЛОБАЛЬНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2022 г. А. А. Гринь, К. Р. Шнайдер

Для системы Ван дер Поля аналитически построены две замкнутые алгебраические кривые, образующие кольцо Пуанкаре–Бендиксона для всех значений её параметра. Внутренняя граница кольца представляет собой замкнутую кривую нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, поэтому это кольцо содержит не более одного предельного цикла. Внешняя граница кольца строится с помощью специальной процедуры.

DOI: 10.31857/S0374064122030013, EDN: BWZAUU

Введение. В качественной теории автономных систем на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

фундаментальную роль играет специальный класс ω -предельных множеств, называемых предельными циклами. Общий подход к доказательству существования хотя бы одного предельного цикла в системе (1) состоит в построении на фазовой плоскости такого кольца (кольцеобразной области) \mathcal{A} , которое не содержит состояний равновесия и границы которого представляют собой простые замкнутые кривые (называемые далее *овалами*), обладающие тем свойством, что любая траектория системы (1) сразу после попадания в некоторый момент времени на границу кольца \mathcal{A} входит в него либо при увеличении, либо при уменьшении времени t (см., например, [1, с. 159]). Указанное кольцо называют *кольцом Пуанкаре–Бендиксона*, поскольку применение теоремы Пуанкаре–Бендиксона [2, с. 187; 3, с. 244] к этому кольцу гарантирует существование хотя бы одного лежащего в нём предельного цикла системы (1). Далее мы называем *трансверсальными овалами* системы (1) гладкие замкнутые кривые, которые не проходят через особые точки системы и такие, что в любой их точке касательный вектор и вектор поля системы не коллинеарны. Будем также предполагать, что границы кольца Пуанкаре–Бендиксона являются трансверсальными овалами.

Ключевая проблема в этом подходе заключается в построении трансверсальных векторному полю овалов. Общей процедуры их построения нет. Ранее кольца Пуанкаре–Бендиксона были найдены для систем типа Лъенара; в них границы состоят из кусочно гладких кривых, построенных довольно сложным образом (см., например, [4; 5, с. 249; 3, с. 253; 1, с. 303; 6]. В недавних работах [7, 8] для полиномиальных систем (1) построены гладкие трансверсальные овалы, являющиеся границами кольца Пуанкаре–Бендиксона. Для обеих работ характерно, что каждый трансверсальный овал строится с помощью аппроксимации траекторий системы (1). В статье [7] для построения внутренней и внешней границ кольца \mathcal{A} требуется аппроксимация двух разных траекторий, а в статье [8] – аппроксимация только одной траектории, но предполагается, что эта траектория является предельным циклом.

В данной работе для системы Ван дер Поля для построения её трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ системы и образующих кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{A}(\lambda)$, предлагается чисто аналитический подход, который не требует аппроксимации какой-либо траектории. Особенности этого подхода заключаются в следующем.

(а) Овалы представляют собой алгебраические кривые и образуют кольцо Пуанкаре–Бендиксона при всех значениях параметра λ , при этом никаких ограничений на расположение содержащегося в нём предельного цикла не предполагается (кольцо Пуанкаре–Бендиксона,

при построении которого не накладывается никаких ограничений на значения параметра и локализацию содержащегося в нём предельного цикла, будем называть *глобальным*, а поскольку его границы, как сказано, – алгебраические кривые, то *глобальным алгебраическим* кольцом Пуанкаре–Бендиксона).

(б) Внутренний трансверсальный овал состоит из овала, содержащегося в множестве нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для системы Ван дер Поля. Это свойство означает, что система Ван дер Поля имеет не более одного предельного цикла $\Gamma(\lambda)$ и, если цикл $\Gamma(\lambda)$ существует, он является грубым.

(в) Способ построения внешнего трансверсального овала состоит в нахождении многочлена $O(x, y, \lambda)$ от x и y вида $\sum_{i=0}^{2N} p_i(x, \lambda)y^i$, где $N \in \mathbb{N}$ – некоторое число, такого, что его множество \mathcal{O} нулевого уровня содержит овал, который можно использовать в качестве внешней границы. Полиномы $p_i(x, \lambda)$ от переменной x с коэффициентами, зависящими от λ , определяются с помощью решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

(г) Если $\mathcal{A}(\lambda)$ является кольцом Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля, то по нему можно построить кольцо Пуанкаре–Бендиксона для любой системы на плоскости, которая линейно топологически эквивалентна системе Ван дер Поля.

Структура работы следующая. В п. 1 содержатся нужные в дальнейшем сведения о функции Дюлака–Черкаса и доказывается инвариантность свойства трансверсальности для овала при линейном гомеоморфизме. В п. 2 вводятся три системы, которые линейно топологически эквивалентны уравнению Ван дер Поля при $\lambda > 0$. Построению кольца Пуанкаре–Бендиксона, внутренняя граница которого представляет собой множество нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, посвящён п. 3. В этом пункте подробно описывается новая процедура построения внешней границы в виде алгебраического овала. В п. 4 представлены глобальные алгебраические кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля и двух линейно топологически эквивалентных систем, включая сингулярно возмущённую систему.

1. Предварительные сведения. Начнём с определения линейной топологической эквивалентности планарных автономных систем. Далее предполагаем, что выполнено условие

(А). Множества \mathcal{G} и \mathcal{G}_1 – открытые подмножества плоскости \mathbb{R}^2 , Λ – открытый интервал прямой \mathbb{R} , функции P и Q принадлежат классу $C_{(x,y)\lambda}^1(\mathcal{G} \times \Lambda, \mathbb{R})$, а функции P_1 и Q_1 – классу $C_{(x,y)\lambda}^1(\mathcal{G}_1 \times \Lambda, \mathbb{R})$.

При $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим планарную автономную параметрическую систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda) \quad (2)$$

на множестве \mathcal{G} и планарную автономную параметрическую систему

$$\frac{du}{d\tau} = P_1(u, v, \lambda), \quad \frac{dv}{d\tau} = Q_1(u, v, \lambda) \quad (3)$$

на множестве \mathcal{G}_1 .

Определение 1. Пусть выполняется условие (А). Системы (2) и (3) называются *линейно топологически эквивалентными*, если для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует (линейный) гомеоморфизм $h(\lambda)$, отображающий \mathcal{G} на \mathcal{G}_1 и переводящий траектории системы (2) в траектории системы (3), а независимые переменные t и τ этих систем связаны равенством $\tau = g(\lambda)t$, где $g(\lambda)$ – возрастающий гомеоморфизм интервала Λ .

Согласно этому определению топологически эквивалентные планарные автономные системы имеют одинаковую топологическую структуру своих траекторий. Позже будет использована следующая

Лемма 1. Пусть выполняется условие (А) и системы (2) и (3) линейно топологически эквивалентны при $\lambda \in \Lambda$, где соответствующий линейный гомеоморфизм представляется 2×2 -матрицей $T(\lambda)$. Тогда если $\mathcal{O}(\lambda)$ – трансверсальный овал системы (2), то $T(\lambda)\mathcal{O}(\lambda)$ – трансверсальный овал системы (3).

Доказательство. Пусть $p(\lambda)$ – точка на $\mathcal{O}(\lambda)$ такая, что вектор $t_a(\lambda)$ поля системы (2) в точке $p(\lambda)$ не коллинеарен касательному вектору $t_o(\lambda)$ к овалу $\mathcal{O}(\lambda)$ в точке $p(\lambda)$.

Если предположить, что вектор $T(\lambda)t_a(\lambda)$ векторного поля системы (3) в точке $T(\lambda)p(\lambda)$ коллинеарен касательному вектору $T(\lambda)t_o(\lambda)$ к овалу $T(\lambda)\mathcal{O}(\lambda)$ в точке $T(\lambda)p(\lambda)$, то из обратимости матрицы $T(\lambda)$ при $\lambda \in \Lambda$ следует, что вектор $t_a(\lambda)$ векторного поля системы (2) в точке $p(\lambda)$ коллинеарен касательному вектору $t_o(\lambda)$ к овалу $\mathcal{O}(\lambda)$ в $p(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Важным инструментом качественного исследования топологической структуры траекторий системы (2) является функция Дюлака (см., например, [3, с. 264]). Для её определения обозначим через $X(\lambda)$ векторное поле, задаваемое системой (2).

Определение 2. Пусть выполняется условие (A). Функция $B \in C^1_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G} \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака* для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ в области \mathcal{G} , если выражение

$$\operatorname{div}(BX) \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \equiv (\operatorname{grad} B, X) + B \operatorname{div} X$$

не изменяет знак в \mathcal{G} и обращается в нуль только на множестве нулевой меры Лебега.

Из существования функции Дюлака вытекает следующая оценка числа предельных циклов системы (2) в области \mathcal{G} [2, с. 189].

Предложение. Пусть выполняется условие (A) и в p -связной ($p \geq 1$) области $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака B . Тогда система (2) имеет не более $p - 1$ предельных циклов, целиком расположенных в \mathcal{G} .

Метод функции Дюлака обобщён Л.А. Черкасом в 1997 г. (см. [9]). Соответствующая обобщённая функция Дюлака, называемая также функцией Дюлака–Черкаса (см. [10]), определяется следующим образом.

Определение 3. При выполнении условия (A) функция $\Psi \in C^1_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G} \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака–Черкаса* системы (2) в области \mathcal{G} , если существует действительное число $\kappa \neq 0$ такое, что

$$\Phi := (\operatorname{grad} \Psi, X) + \kappa \Psi \operatorname{div} X > 0 \quad (< 0) \quad \text{в } \mathcal{G}. \tag{4}$$

Замечание 1. В случае $\kappa = 1$ функция Ψ является функцией Дюлака.

Замечание 2. Условие (4) можно ослабить, допуская, что функция Φ может обращаться в нуль в \mathcal{G} на множестве меры нуль и что ни один овал этого множества не является предельным циклом системы (2).

Аналитический подход к построению функций Дюлака–Черкаса для класса систем Льена–Ра описан в [11].

Введём множество $\mathcal{W}(\lambda) := \{(x, y) \in \mathcal{G} : \Psi(x, y, \lambda) = 0\}$.

Из неравенства (4) и замечания 2 вытекает

Лемма 2. Если подмножество $\mathcal{W}(\lambda)$ содержит овал, то он является трансверсальным овалом системы (2).

Следующую теорему можно найти в [9].

Теорема 1. Пусть при выполнении условия (A) функция Ψ является функцией Дюлака–Черкаса для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ в области \mathcal{G} . Тогда любой предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ этой системы, расположенный целиком в \mathcal{G} , обладает следующими свойствами:

- (i) $\Gamma(\lambda)$ не пересекается с множеством $\mathcal{W}(\lambda)$;
- (ii) предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ является грубым;
- (iii) устойчивость цикла $\Gamma(\lambda)$ определяется знаком выражения $\kappa\Phi\Psi$ на $\Gamma(\lambda)$.

Следствие. Из свойства (ii) следует, что существование функции Дюлака–Черкаса означает отсутствие у системы (2) кратного предельного цикла.

Следующий результат о верхней границе числа предельных циклов доказан в [10].

Теорема 2. Пусть при выполнении условия (A) в p -связной области \mathcal{G} для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака–Черкаса Ψ такая, что множество $\mathcal{W}(\lambda)$ состоит из s овалов в \mathcal{G} . Тогда система (2) имеет для $\lambda \in \Lambda$ не более $p - 1 + s$ предельных циклов в \mathcal{G} и все предельные циклы гиперболические.

В случае $p = s = 1$ теорема 2 формулируется следующим образом.

Теорема 3. Пусть при выполнении условия (A) в односвязной области \mathcal{G} для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака–Черкаса Ψ такая, что множество $\mathcal{W}(\lambda)$

состоит из одного овала. Тогда система (2) имеет при $\lambda \in \Lambda$ не более одного предельного цикла $\Gamma(\lambda)$ в \mathcal{G} . Если цикл $\Gamma(\lambda)$ существует, то он окружает множество $\mathcal{W}(\lambda)$.

Отметим, что метод функций Дюлака–Черкаса использовался также в работах [12, 13].

2. Система Ван дер Поля и три линейно топологически эквивалентные ей системы. Скалярное автономное параметрическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (5)$$

где λ – вещественный параметр, введено Бальтазаром Ван дер Полем [14] в 1926 г. для описания автоколебаний в триодной схеме. Если заменить t на $-t$ и λ на $-\lambda$, то уравнение (5) не изменится. Таким образом, при изучении фазового портрета системы

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - \lambda(x^2 - 1)y, \quad (6)$$

которая соответствует уравнению (5), можно ограничиться случаем $\lambda > 0$.

Хорошо известно (см., например, [3, с. 254]), что система (6) имеет для любого $\lambda \neq 0$ единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$, который рождается из периодического решения, когда параметр λ переходит через нулевое значение.

С помощью линейного преобразования

$$u = x, \quad \lambda v = y, \quad \tau = \lambda t \quad (7)$$

получаем из системы (6) при $\lambda > 0$ линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\lambda^2}u - (u^2 - 1)v. \quad (8)$$

Для системы (8) при достаточно больших λ в работе [6] построено кольцо Пуанкаре–Бендиксона такое, что внутренняя его граница при любом λ представляет собой трансверсальный овал системы (8) и определяется множеством нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для этой системы, а для построения внешней границы кольца разработана специальная методика, основанная на теории поворота векторных полей.

Далее представлен новый подход к построению трансверсального алгебраического овала системы, который при любом $\lambda > 0$ можно использовать в качестве внешней границы $\mathcal{B}^o(\lambda)$ для глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{B}(\lambda)$ системы (8). Этот подход применён в работе к построению трансверсальных алгебраических овалов системы Ван дер Поля и получающихся из этой системы линейными преобразованиями вводимых ниже дифференциальных систем (10) и (12).

Используя линейное преобразование

$$u = \sqrt{\lambda}x, \quad v = \sqrt{\lambda}y, \quad (9)$$

получаем из системы (6) линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{dt} = -v, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v - u^2v. \quad (10)$$

Понятно, что системы (6) и (10) имеют при $\lambda > 0$ единственный предельный цикл, но в отличие от системы (6) предельный цикл системы (10) порождается бифуркацией Андронова–Хопфа, когда параметр λ переходит через нулевое значение.

Наконец, применяя к системе (6) при $\lambda > 0$ линейное преобразование

$$u = x, \quad v = \lambda y, \quad \tau = t/\lambda, \quad \varepsilon = 1/\lambda^2, \quad (11)$$

получаем линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = u - (u^2 - 1)v, \quad (12)$$

представляющую собой при больших значениях λ сингулярно возмущённую систему.

В следующем пункте строится глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы (8).

3. Построение глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8). Система (8) имеет при всех λ в начале координат единственное состояние равновесия, являющееся фокусом или узлом. Таким образом, любой её предельный цикл должен окружать начало координат. Наша цель – построить два непересекающихся алгебраических трансверсальных овала $\mathcal{B}^i(\lambda)$ и $\mathcal{B}^o(\lambda)$ этой системы, окружающих начало координат, которые можно взять в качестве границ алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{B}(\lambda)$. Согласно лемме 2 одна из возможностей построения трансверсального овала автономной системы состоит в использовании множества нулевого уровня $\mathcal{W}(\lambda)$ функции Дюлака–Черкаса. В работе [6] доказан следующий результат.

Лемма 3. *Полином $\Psi(u, v, \lambda) := u^2 + \lambda^2 v^2 - 1$ представляет собой функцию Дюлака–Черкаса для системы (8) при $\lambda > 0$ в \mathbb{R}^2 , множество нулевого уровня $\mathcal{W}(\lambda)$ которой является эллипсом*

$$\mathcal{B}^i(\lambda) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \lambda^2 v^2 = 1\}.$$

Производная функции Ψ в силу системы (8) на $\mathcal{B}^i(\lambda)$ положительна за исключением точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, в которых эта производная принимает нулевое значение.

Согласно лемме 2 справедлива

Лемма 4. *Эллипс $\mathcal{B}^i(\lambda)$ может быть использован в качестве внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8) при любых $\lambda > 0$.*

Опишем новый подход, о котором говорилось выше, к построению трансверсального алгебраического овала системы (8). Этот овал можно использовать в качестве внешней границы $\mathcal{B}^o(\lambda)$ для глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона.

Наша дальнейшая цель заключается в построении многочлена $O(u, v, \lambda)$ от u и v в одном из следующих видов:

$$O(u, v, \lambda) := \sum_{i+j=0}^{2N} a_{ij}(\lambda) u^i v^j, \quad O(u, v, \lambda) := \sum_{j=0}^{2N} p_j(u, \lambda) v^j \quad \text{или} \quad O(u, v, \lambda) := \sum_{i=0}^{2N} q_i(v, \lambda) u^i,$$

где N – натуральное число, которое необходимо выбрать, p_j – многочлены от u с коэффициентами, зависящими от λ , а q_i – многочлены от v с коэффициентами, зависящими от λ , такого, что:

1) множество $\mathcal{N}(\lambda)$, на котором производная функции O в силу системы (8) принимает нулевые значения и изменяет знак, состоит из овала $\mathcal{C}(\lambda)$, окружающего внутреннюю границу $\mathcal{B}^i(\lambda)$;

2) множество нулевого уровня многочлена $O(u, v, \lambda)$ содержит при $\lambda > 0$ овал $\mathcal{O}(\lambda)$, окружающий $\mathcal{C}(\lambda)$.

Тогда овал $\mathcal{O}(\lambda)$ представляет собой глобальный трансверсальный алгебраический овал системы (8).

Далее полагаем $N = 1$ и используем представление

$$O(u, v, \lambda) := O_0(u, \lambda) + O_1(u, \lambda)v + O_2(u, \lambda)v^2,$$

где функции $O_i(u, \lambda)$, $i = 0, 1, 2$, являются полиномами по u , которые нужно определить.

Дифференцируя функцию O в силу системы (8), получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{dO(u, v, \lambda)}{d\tau} \right|_{(8)} &= O_1(u, \lambda) \frac{1}{\lambda^2} u + \left(-\frac{dO_0(u, \lambda)}{du} - O_1(u, \lambda)(u^2 - 1) + O_2(u, \lambda) \frac{2}{\lambda^2} u \right) v - \\ &- \left(\frac{dO_1(u, \lambda)}{du} + O_2(u, \lambda) 2(u^2 - 1) \right) v^2 - \frac{dO_2(u, \lambda)}{du} v^3. \end{aligned} \tag{13}$$

Для того чтобы множество

$$\mathcal{N}(\lambda) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \left. \frac{dO(u, v, \lambda)}{d\tau} \right|_{(8)} = 0 \right\}$$

в фазовой плоскости содержало овал $\mathcal{C}(\lambda)$, на котором производная $dO(u, v, \lambda)/d\tau|_{(8)}$ изменяет знак, потребуем выполнения тождеств

$$\frac{dO_2(u, \lambda)}{du} \equiv 0, \quad -\frac{dO_0(u, \lambda)}{du} - O_1(u, \lambda)(u^2 - 1) + O_2(u, \lambda)\frac{2}{\lambda^2}u \equiv 0 \quad (14)$$

и будем предполагать, что функция $O_1(u, \lambda)u$ является чётной по u .

Функцию O_1 будем искать в виде

$$O_1(u, \lambda) \equiv c_1(\lambda)u + c_3(\lambda)u^3; \quad (15)$$

в силу (14) имеем

$$O_2(u, \lambda) \equiv c_2(\lambda). \quad (16)$$

С учётом тождеств (14)–(16) производная (13) принимает вид

$$\left. \frac{dO(u, v, \lambda)}{d\tau} \right|_{(8)} = \frac{1}{\lambda^2}(c_1(\lambda)u^2 + c_3(\lambda)u^4) + (-(c_1(\lambda) + 3c_3(\lambda)u^2) - 2c_2(\lambda)(u^2 - 1))v^2. \quad (17)$$

Далее мы хотим гарантировать, чтобы знак выражения в квадратных скобках из равенства (17) не зависел от u . Для этого полагаем

$$c_1(\lambda) = 2c_2(\lambda) \quad (18)$$

и, таким образом, имеем

$$\left. \frac{dO(u, v, \lambda)}{d\tau} \right|_{(8)} = u^2 \left(\frac{1}{\lambda^2}c_3(\lambda)u^2 + \frac{2}{\lambda^2}c_2(\lambda) - (3c_3(\lambda) + 2c_2(\lambda))v^2 \right).$$

Если потребовать выполнения неравенств $c_3(\lambda) < 0$, $c_2(\lambda) > 0$ и $3c_3(\lambda) + 2c_2(\lambda) > 0$, то множество $\mathcal{N}(\lambda)$ содержит эллипс

$$\mathcal{C}(\lambda) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\lambda^2}c_3(\lambda)u^2 + \frac{2}{\lambda^2}c_2(\lambda) - (3c_3(\lambda) + 2c_2(\lambda))v^2 = 0\},$$

на котором производная $dO(u, v, \lambda)/d\tau|_{(8)}$ изменяет знак. Затем, положив

$$c_2(\lambda) = -3c_3(\lambda), \quad (19)$$

получим

$$\left. \frac{dO(u, v, \lambda)}{d\tau} \right|_{(8)} = 6u^2c_3(\lambda) \left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (20)$$

В итоге пришли к следующему результату.

Лемма 5. Производная $dO(u, v, \lambda)/d\tau|_{(8)}$ при $\lambda > 0$ принимает нулевое значение при $u = 0$ и положительна (отрицательна) во всех остальных точках области, расположенных внутри (вне) эллипса

$$\mathcal{C}(\lambda) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{6} + \frac{\lambda^2 v^2}{2} = 1 \right\}.$$

Очевидна

Лемма 6. Эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ окружает эллипс $\mathcal{B}^i(\lambda)$ при любом $\lambda > 0$.

На последнем шаге мы должны убедиться, что внешняя граница $\mathcal{O}(\lambda)$ окружает эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$. Из тождеств (15), (18) и (19) следуют равенства

$$O_1(u, \lambda) = c_3(\lambda)(-6u + u^3), \quad O_2(u, \lambda) = -3c_3(\lambda).$$

Подставляя эти выражения для функций O_1 и O_2 во второе тождество в (14), получаем для функции $O_0(u, \lambda)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dO_0(u, \lambda)}{du} = -c_3(\lambda) \left((u^2 - 1)(-6u + u^3) + \frac{6}{\lambda^2}u \right),$$

которое имеет первый интеграл

$$O_0(u, \lambda) = -3c_3(\lambda) \left(\frac{1}{18}u^6 - \frac{7}{12}u^4 + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)u^2 + c_0(\lambda) \right);$$

здесь $c_0(\lambda)$ – произвольная непрерывная функция. Следовательно, имеем

$$O(u, v, \lambda) = -3c_3(\lambda)P(u, v, \lambda),$$

где

$$P(u, v, \lambda) := v^2 + vu \left(2 - \frac{u^2}{3} \right) + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) u^2 - \frac{7}{12}u^4 + \frac{1}{18}u^6 + c_0(\lambda). \tag{21}$$

Поэтому множество нулевого уровня полинома $O(u, v, \lambda)$ совпадает с множеством нулевого уровня $\mathcal{P}(\lambda)$ полинома $P(u, v, \lambda)$.

Далее докажем, что справедлива

Лемма 7. *Для непрерывной функции $c_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$, заданной равенством*

$$c_0(\lambda) := -18 - \frac{8}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda}, \tag{22}$$

множество $\mathcal{P}(\lambda)$ представляет собой овал, который является центрально симметричным и окружает эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что множество $\mathcal{P}(\lambda)$ инвариантно относительно преобразования $(u, v) \mapsto (-u, -v)$, т.е. центрально симметрично. Из равенств (21) и (22) следует, что $\mathcal{P}(\lambda)$ – овал, окружающий начало координат.

Очевидно, что эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ пересекает ось u в точках $(-\sqrt{6}, 0)$ и $(\sqrt{6}, 0)$. Так как обе кривые $\mathcal{P}(\lambda)$ и $\mathcal{C}(\lambda)$ центрально симметричны, то чтобы доказать, что $\mathcal{P}(\lambda)$ окружает $\mathcal{C}(\lambda)$, достаточно установить неравенство

$$P \left(u, \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}(6 - u^2)}, \lambda \right) < 0 \quad \text{при} \quad -\sqrt{6} \leq u \leq \sqrt{6}.$$

Имеем

$$P \left(u, \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}(6 - u^2)}, \lambda \right) = \frac{1}{3\lambda^2}(6 - u^2) + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}(6 - u^2)} \left(2u - \frac{u^3}{3} \right) + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) u^2 - \frac{7}{12}u^4 + \frac{1}{18}u^6 + c_0(\lambda).$$

Используя очевидную оценку

$$\max_{0 \leq u \leq \sqrt{6}} \left(2u - \frac{u^3}{3} \right) \sqrt{\frac{6 - u^2}{3}} < 3,$$

получаем

$$P \left(u, \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{3}(6 - u^2)}, \lambda \right) < \frac{2}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda} + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) 6 + 12 + c_0(\lambda) < 18 + \frac{8}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda} + c_0(\lambda) = 0.$$

Такое же неравенство справедливо и при $-\sqrt{6} \leq u < 0$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Овал*

$$\mathcal{B}^o(\lambda) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R} : v^2 + vu \left(2 - \frac{u^2}{3} \right) + \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) u^2 - \frac{7}{12} u^4 + \frac{1}{18} u^6 - 18 - \frac{8}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda} = 0 \right\}$$

может использоваться как внешняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8).

Доказательство. По лемме 7 овал $\mathcal{B}^o(\lambda)$ является алгебраической кривой, окружающей эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Из леммы 5 вытекает, что производная $dO(u, v, \lambda)/dt|_{(8)}$ принимает на $\mathcal{B}^o(\lambda)$ отрицательные значения, за исключением двух точек на оси $u = 0$, в которых производная обращается в нуль. Это означает, что любая траектория системы (8), попавшая на овал $\mathcal{B}^o(\lambda)$, пересекает его. Лемма доказана.

Из лемм 4 и 8 следует основной результат работы.

Теорема 4. *При всех $\lambda > 0$ кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$, ограниченное овалами $\mathcal{B}^i(\lambda)$ и $\mathcal{B}^o(\lambda)$, является глобальным алгебраическим кольцом Пуанкаре–Бендиксона, содержащим единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ системы (8).*

Кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (8) для случаев $\lambda^2 = 10$ и $\lambda^2 = 0.1$ представлено на рис. 1.

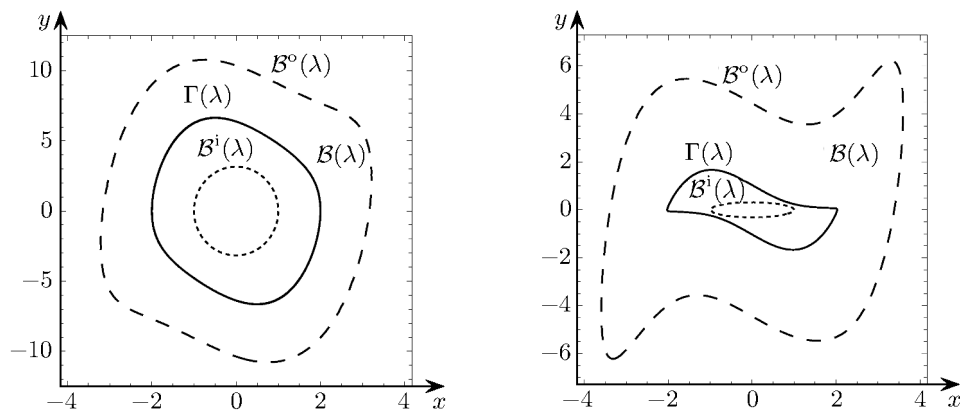


Рис. 1. Кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (8) при $\lambda^2 = 10$ (слева) и $\lambda^2 = 0.1$ (справа).

4. Глобальные алгебраические кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля и линейно топологически эквивалентных ей систем. В п. 3 построено глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы (8). Те же рассуждения, что и для системы (8), можно применить к системе Ван дер Поля (6) и системам (10) и (12) и получить соответствующие результаты. Однако нужные утверждения тривиально вытекают из теоремы 4 и того, что системы (6), (10), (12) и (8) попарно линейно топологически эквивалентны друг другу.

Согласно лемме 1, применив преобразование (7) к трансверсальным овалам $\mathcal{B}^i(\lambda)$ и $\mathcal{B}^o(\lambda)$ системы (8), получим трансверсальные овалы $\mathcal{A}^i(\lambda)$ и $\mathcal{A}^o(\lambda)$ системы Ван дер Поля (6), образующие кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$. Далее, применяя преобразование (9) к трансверсальным овалам системы Ван дер Поля, получаем трансверсальные овалы для системы (10). Наконец, применяем преобразование (11) к трансверсальным овалам системы Ван дер Поля для получения трансверсальных овалов системы (12). В итоге приходим к следующим результатам.

Теорема 5. *При $\lambda > 0$ овалы $\mathcal{A}^i(\lambda) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ и*

$$\mathcal{A}^o(\lambda) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + \lambda yx \left(2 - \frac{x^2}{3} \right) + (1 + \lambda^2)x^2 - \frac{7\lambda^2}{12}x^4 + \frac{\lambda^2}{18}x^6 - 8 - 3\lambda - 18\lambda^2 = 0 \right\}$$

являются трансверсальными овалами системы Ван дер Поля (6) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{A}(\lambda)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ этой системы.

На рис. 2 показано кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ при значениях параметра $\lambda = 0.001$ и $\lambda = 3$.

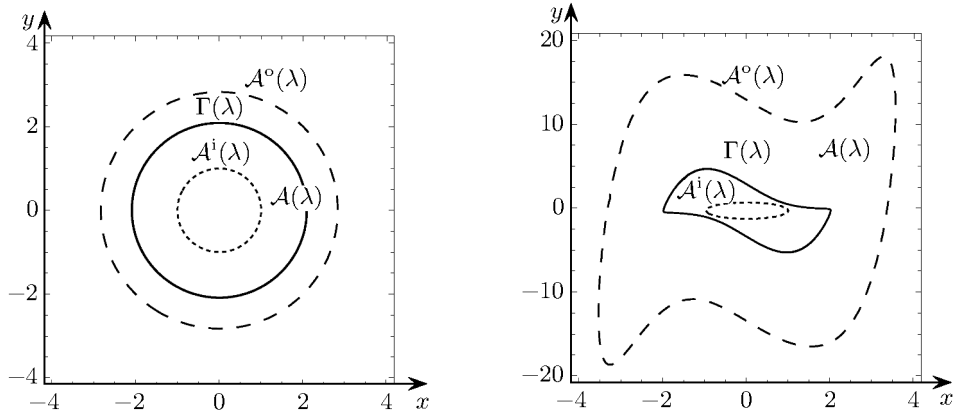


Рис. 2. Кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (6) при $\lambda = 0.001$ (слева) и $\lambda = 3$ (справа).

Теорема 6. При $\lambda > 0$ овалы $\mathcal{H}^i(\lambda) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = \lambda\}$ и

$$\mathcal{H}^o(\lambda) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 + vu \left(2\lambda - \frac{u^2}{3} \right) + (1 + \lambda^2)u^2 - \frac{7\lambda}{12}u^4 + \frac{u^6}{18} - 8\lambda - 3\lambda^2 - 18\lambda^3 = 0 \right\}$$

являются трансверсальными овалами системы (10) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{H}(\lambda)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ этой системы.

Замечание 3. Так как оба овала стягиваются к началу координат при стремлении λ к нулю, то кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{H}(\lambda)$ отражает бифуркацию предельного цикла $\Gamma(\lambda)$ из начала координат (бифуркация Андронова–Хопфа) при переходе параметра λ через нулевое значение.

На рис. 3 показано кольцо $\mathcal{H}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ при значениях параметра $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 1$.

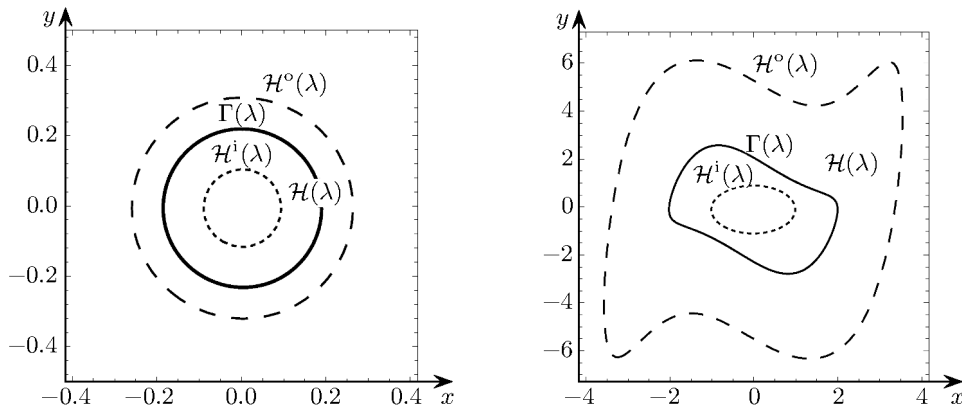


Рис. 3. Кольцо $\mathcal{H}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (10) при $\lambda = 0.01$ (слева) и $\lambda = 1$ (справа).

Теорема 7. При $\varepsilon > 0$ овалы $\mathcal{S}^i(\varepsilon) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \varepsilon v^2 = 1\}$ и

$$\mathcal{S}^o(\varepsilon) := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 v^2 + \varepsilon vu \left(2 - \frac{u^2}{3} \right) + (1 + \varepsilon)u^2 - \frac{7}{12}u^4 + \frac{u^6}{18} - 8\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon} - 18 = 0 \right\}$$

являются трансверсальными овалами системы (12) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{S}(\varepsilon)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\varepsilon)$ этой системы.

Замечание 4. При малых ε предельный цикл $\Gamma(\varepsilon)$ представляет собой релаксационные колебания.

На рис. 4 показано кольцо $\mathcal{S}(\varepsilon)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\varepsilon)$ при значениях параметра $\varepsilon = 0.15$ и $\varepsilon = 10$.

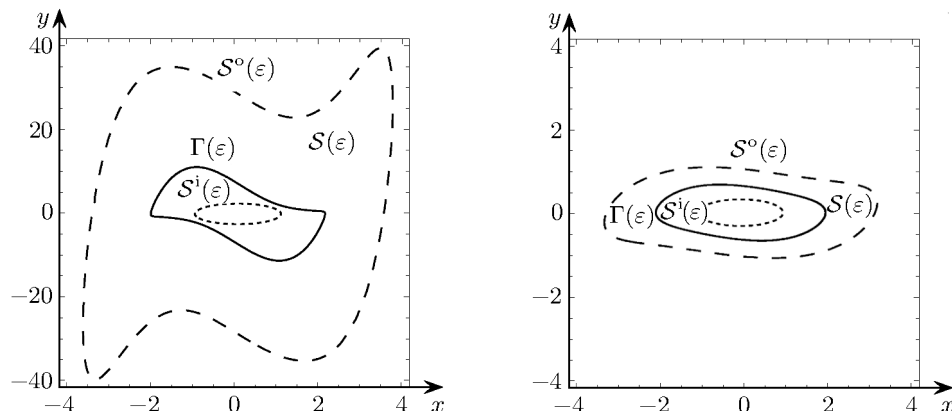


Рис. 4. Кольцо $\mathcal{S}(\varepsilon)$ с предельным циклом $\Gamma(\varepsilon)$ системы (12) при $\varepsilon = 0.15$ (слева) и $\varepsilon = 10$ (справа).

Гринь А.А. признателен Немецкой службе академических обменов (DAAD) за финансовую поддержку, а также за гостеприимство сотрудникам Берлинского технического университета и Института прикладного анализа и стохастики им. К. Вейерштрасса в Берлине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sansone G., Conti R. Non-linear Differential Equations. V. 67. New York, 1964.
2. Dumortier F., Llibre L., Artes J.C. Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Berlin, 2006.
3. Perko L. Differential equations and dynamical systems. Texts Appl. Math. V. 7. New York, 2001.
4. Flanders D.A., Stoker J.J. The limit case of relaxation oscillations // Studies in Nonlin. Vibration Theory, Inst. Math. Mech. New York University, 1946. P. 51–64.
5. Lynch S. Dynamical Systems with Applications Using Mathematica. Birkhäuser, 2007.
6. Schneider K.R. New approach to study the van der Pol equation for large damping // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2018. № 8. P. 1–10.
7. Giacomini H., Grau M. Transversal conics and the existence of limit cycles // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 428. P. 563–586.
8. Gasull A., Giacomini H., Grau M. Effective construction of Poincaré–Bendixson regions // J. Appl. Anal. Comp. 2017. V. 7. P. 1549–1569.
9. Черкас Л.А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.
10. Grin A.A., Schneider K.R. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 2007. V. 14. P. 641–656.
11. Cherkas L.A., Grin A.A., Schneider K.R. Dulac–Cherkas functions for generalized Liénard systems // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2011. № 35. P. 1–23.
12. Gasull A., Giacomini H. Upper bounds for the number of limit cycles through linear differential equations // Pacific J. Math. 2006. V. 226. № 2. P. 277–296.
13. Gasull A., Giacomini H. Some applications of the extended Bendixson–Dulac theorem // In Progress and challenges in dynamical systems. V. 54. Heidelberg, 2013. P. 233–252.
14. Van der Pol B. On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci. 1926. V. 14. P. 978–992.

Гродненский государственный университет
им. Янки Купалы, Беларусь
Институт прикладного анализа и стохастики
им. К. Вейерштрасса, г. Берлин, Германия

Поступила в редакцию 03.01.2022 г.
После доработки 03.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.