ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 309–318

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОВПАДАЮЩИМИ СО СТЕПЕННОЙ ИЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

 Л. В. Гаргянц

Для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока построены обобщённые энтропийные решения задач Коши с начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности. В случае экспоненциально растущего начального условия установлена односторонняя периодичность по пространственной переменной найденного решения. Доказано несуществование положительных решений у рассматриваемых задач Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122030037, **EDN:** BXLRJB

1. Введение и постановка задачи. Для заданных $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $u_0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T = (0,T)\times\mathbb{R}, \quad 0 < T \leqslant \infty, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В работах [1, 2] (см. также [3, с. 39–40 и 65]) дано

Определение 1. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным решением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$|u-k|_t + (\operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T); \tag{3}$$

2) $\operatorname*{esslim}\limits_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0(\cdot)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0,T)$ полной меры Лебега такое, что $u(t,\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $t \in \mathcal{E}$, и $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ при $t \to 0+$, $t \in \mathcal{E}$.

Условие (3) означает, что для любой пробной функции $\varphi \in C^\infty_0(\Pi_T)$, $\varphi \geqslant 0$, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Pi_T} (|u-k|\varphi_t + \operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x)\,dx\,dt \geqslant 0.$$

При $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ существование и единственность ограниченного обобщённого энтропийного решения $u \in L^\infty(\Pi_T)$ задачи (1), (2) установлены в работах С.Н. Кружкова [1, 2] в общем случае многих пространственных переменных. В этих работах также доказано свойство *монотонной зависимости* решения от начальных данных:

если $u, v \in L^\infty(\Pi_T)$ – обобщённые энтропийные решения задачи (1), (2) с начальными условиями $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ соответственно, причём $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. на Π_T.

Из этого свойства вытекает *принцип максимума/минимума*: если $a \leqslant u_0 \leqslant b$ почти всюду на $\mathbb{R}$ и u – ограниченное обобщённое энтропийное решение задачи (1), (2), то $a \leqslant u \leqslant b$ почти всюду на Π_T. Из него, в частности, следует единственность постоянного решения при постоянных начальных условиях в классе ограниченных измеримых функций.

В работе Е.Ю. Панова [4] доказана теорема существования и единственности локально ограниченного обобщённого энтропийного решения задачи (1), (2) в общем случае многих пространственных переменных в классе функций, удовлетворяющих степенному ограничению на рост по пространственным переменным. Решения, рассматриваемые в данной статье, не входят в найденные Е.Ю. Пановым классы корректности.

Будем строить кусочно-гладкие обобщённые энтропийные решения задачи (1), (2), поэтому заменим определение 1 на свойство (см. [5, с. 74–77]), которое содержит

Предложение 1. *Пусть* $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ *– кусочно-гладкая в полосе* Π_T *функция с не более чем счётным числом линий разрыва* Γ_n, *являющихся графиками функций* $\gamma_n \in C^1(0,T)$, *где* $n \in \mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$; *пусть эти линии попарно не пересекаются и существуют односторонние пределы*

$$u_n^-(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)-0)} u(\tau,\xi), \quad u_n^+(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)+0)} u(\tau,\xi)$$

функции $u(\cdot)$ *при подходе к каждой линии разрыва* Γ_n. *Тогда* $u(\cdot)$ *является обобщённым энтропийным решением уравнения (1) в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

1) функция $u(\cdot)$ *в области своей гладкости удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле;*

2) на каждой линии разрыва Γ_n *при любом* $t \in (0,T)$ *имеет место условие Ранкина–Гюгонио:*

$$\dot\gamma_n(t) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}; \tag{4}$$

3) для любого $n \in \mathcal{N}$ *и всех* $t \in (0,T)$ *выполнено условие допустимости разрыва: при* $u_n^+(t) > u_n^-(t)$ $(u_n^+(t) < u_n^-(t))$ *график функции* f *лежит не ниже (соответственно, не выше) хорды, соединяющей точки этого графика с абсциссами* $u_n^-(t)$, $u_n^+(t)$.

Замечание 1. Первые два условия предложения 1 эквивалентны тому, что функция $u(\cdot)$ является обобщённым решением (в смысле распределений) уравнения (1), а последнее является условием возрастания энтропии для кусочно-гладких решений и эквивалентно E-условию О.А. Олейник [6].

Приведём основные результаты некоторых работ, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой в данной статье задаче.

В работах [4, 7, 8] рассматривалась задача Коши (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и степенным начальным условием $u_0(x) = |x|^\beta$, $\beta(\alpha-1) > 1$. Оказалось, что у такой задачи Коши существует кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение, которое определено во всей полуплоскости $t > 0$, имеет счётное число линий разрыва и меняет знак при переходе через каждую ударную волну. Кроме того, рассматриваемая задача не имеет положительных решений ни в какой полосе Π_T.

В работах [9, 10] изучалась задача Коши (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и экспоненциальным начальным условием $u_0(x) = \exp(-x/(\alpha-1))$. Оказалось, что у такой задачи Коши существует решение, обладающее теми же, что и выше, свойствами: оно определено во всей полуплоскости $t > 0$, имеет счётное число линий разрыва и меняет знак при переходе через каждую ударную волну (линию сильного разрыва). Однако более быстрый рост начального условия на бесконечности дал неожиданный эффект: построенное в этих работах решение оказалось ограниченным в области $t \geqslant \delta > 0$, в то время как в случае степенных начальных данных решение имеет рост порядка $|x|^{1/(\alpha-1)}$ при $x \to \pm\infty$ и не зависит от показателя степени β начального условия. Кроме того, решение является односторонне периодическим по пространственной переменной. Эта задача также не имеет положительного решения ни в какой полосе Π_T, что доказано в [11].

Решения, построенные в работах [4, 7–10], имеют одинаковую структуру. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими попарно непересекающимися кривыми Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, являющимися графиками гладких функций $\gamma_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, на счётное число областей $(\mathbb{R}^+ = (0,+\infty))$. Функциональная последовательность $\gamma_n(t)$ является неограниченно монотонно убывающей.

В областях $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, между этими кривыми и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение является классическим, а каждая из кривых Γ_n является линией сильного разрыва (ударной волной), причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. В работе [12] предложен единый способ описания таких решений, основанный на преобразовании Лежандра.

В настоящей работе в пп. 3 и 4 доказано, что у задач Коши для уравнения (1) с функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и положительными начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности, существуют знакочередующиеся энтропийные решения со счётным числом ударных волн. Причём в случае экспоненциального роста начального условия существует знакочередующееся односторонне периодическое по пространственной переменной энтропийное решение. Тем самым доказано, что для существования решений с теми же свойствами, что и у решений из работ [4, 7–10], достаточно наличия степенного или экспоненциального поведения начального условия на минус бесконечности. Все построенные в настоящей работе решения имеют структуру, описанную выше. Принципиальное отличие от ранее построенных примеров заключается в том, что ударная волна Γ_0 образована как огибающая семейства характеристик, идущих из начальной плоскости $t = 0$, лишь при $t \leqslant t_0 < +\infty$. Кроме того, в области D_0 решение является непрерывным, но, вообще говоря, не гладким. В п. 5 доказывается, что рассматриваемые задачи Коши не имеют положительных решений ни в какой полосе Π_T.

2. Вспомогательные утверждения. Предпошлём формулировке основных результатов ряд вспомогательных определений и утверждений.

Определение 2. *Преобразованием Лежандра* гладкой выпуклой вверх функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функция γ, задаваемая для каждого $t \in \mathbb{R}$ равенством

$$\gamma(t) = \mathcal{L}(g)(t) := \inf_{k\in\mathbb{R}} (kt - g(k)).$$

Преобразование Лежандра функции $g(k)$ легко записать параметрически, где роль параметра выполняет переменная k, а именно

$$t = g'(k), \quad \gamma(t) = kg'(k) - g(k). \tag{5}$$

Непосредственно из определения следует, что для всякого $C \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathcal{L}(g + C) = \mathcal{L}(g) - C$ и $\mathcal{L}(Cg)(t) = C\mathcal{L}(g)(t/C)$.

Отметим, что огибающая семейства прямых на плоскости определяется преобразованием Лежандра (см. [13, с. 33]).

В дальнейшем будем рассматривать уравнение (1) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$.

Лемма. *Пусть функция $u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям предложения 1, и для некоторого $n \in \mathcal{N}$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ справедливо равенство*

$$\dot{\gamma}_n(t) = f'(u_n^+(t)) \equiv |u_n^+(t)|^{\alpha-1}. \tag{6}$$

Тогда на линии разрыва Γ_n выполнено условие Ранкина–Гюгонио (4) в том и только том случае, когда для всех $t > 0$ справедливо соотношение $u_n^-(t) = -wu_n^+(t)$, где $-w$ – корень уравнения

$$|v|^{\alpha-1}v - \alpha v + \alpha - 1 = 0, \tag{7}$$

отличный от единицы.

Доказательство. В силу равенства (6) условие Ранкина–Гюгонио (4) на линии разрыва Γ_n имеет вид

$$f'(u_n^+(t)) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим это равенство при фиксированном t как уравнение относительно $u_n^-(t)$. Так как функция потока является степенной, это уравнение является однородным. Сделав замену

$u_n^-(t) = u_n^+(t)v,$ получим уравнение (7). Анализ функции $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(v) = |v|^{\alpha-1}v - \alpha v + \alpha - 1,$ показывает, что это уравнение имеет единственный корень, отличный от единицы, причём он отрицателен и меньше $-1.$ Лемма доказана.

В дальнейшем через $-w,$ как и в формулировке леммы, обозначаем отличный от единицы корень уравнения (7).

3. Энтропийное решение задачи Коши с начальным условием, совпадающим со степенной функцией на бесконечности. Будем решать задачу Коши (1), (2) в полуплоскости $t > 0$ с $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha,$ $\alpha > 1,$ и кусочно-гладким начальным условием, совпадающим со степенной функцией на минус бесконечности, т.е.

$$u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} |x|^\beta, & \text{если} \quad x \in (-\infty, m), \\ \tilde{u}_0(x), & \text{если} \quad x \in [m, +\infty), \end{cases} \tag{9}$$

где $\beta(\alpha-1) > 1,$ $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+,$ $\tilde{u}_0(x)$ – произвольная положительная нестрого возрастающая кусочно-гладкая функция, причём $\tilde{u}_0(m) \geqslant |m|^\beta.$

Теорема 1. *У задачи Коши (8), (9) существует кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение $u(\cdot),$ которое определено во всей полуплоскости $t > 0,$ обладает счётным числом ударных волн $\Gamma_n,$ $n \in \mathbb{N}_0,$ являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t) = -C_n t^\eta, \quad \eta = \frac{1}{1-\beta(\alpha-1)} < 0, \quad C_n = C_n(\alpha, \beta) > 0,$$

где C_n – строго возрастающая последовательность, при этом функция $u(\cdot)$ меняет знак при переходе через каждую ударную волну.

Доказательство. Построим в явном виде кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение задачи (8), (9), удовлетворяющее условиям теоремы. Это решение будет иметь следующую структуру: в областях гладкости $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\},$ $n \in \mathbb{N},$ и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение строится методом характеристик, причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области $D_n.$ В каждой из областей $D_n,$ $n \in \mathbb{N}_0,$ проекции этих характеристик на плоскость (t,x) образуют семейство прямых

$$x = kt - g_n(k), \tag{10}$$

параметризованных своим наклоном $k.$

В окрестности любой точки прямой $t = 0$ классическое решение задачи (8), (9) существует и единственно. Для его построения следует продолжить начальное условие u_0 константой вдоль характеристик. Характеристическая система для уравнения (8) имеет вид

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f'(u), \quad \dot{u} = 0. \tag{11}$$

Характеристикой, выходящей из точки $(t_0, x_0, u_0(x_0)) = (0, s, u_0(s)),$ где $s \in \mathbb{R}$ – параметр на графике начального условия $u_0,$ является прямая

$$\{(t,x,u) \in \mathbb{R}^3 : u \equiv u_0(s), \ \ x = |u|^{\alpha-1}t + s\}. \tag{12}$$

Проекция на плоскость (t,x) этой прямой имеет вид

$$x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s, \ \ \text{если} \ \ s \geqslant m, \quad \text{и} \quad x = (-s)^{\beta(\alpha-1)}t + s, \ \ \text{если} \ \ s < m.$$

Сделав в последнем уравнении замену $k = (-s)^{\beta(\alpha-1)},$ $k > |m|^{1/(\beta(\alpha-1))},$ и обозначив $g_0(k) = k^{1/(\beta(\alpha-1))},$ получим семейство прямых

$$x = kt - g_0(k), \tag{13}$$

зависящих от параметра $k > |m|^{1/(\beta(\alpha-1))}.$

Доопределим функцию $g_0(k)$ той же формулой при всех $k > 0$. Тогда семейство прямых (13) будет иметь огибающую $\gamma_0(t) = \mathcal{L}(g_0)(t)$, определённую при всех $t \in \mathbb{R}^+$. После перехода от параметрического представления (5) к явному получим, что

$$\gamma_0(t) = -C_0 t^{\eta}, \quad \text{где} \quad C_0 = C_0(\alpha,\beta) > 0, \quad \eta = \frac{1}{1-\beta(\alpha-1)} < 0. \tag{14}$$

Определим решение в области D_0 следующим образом (рис. 1).

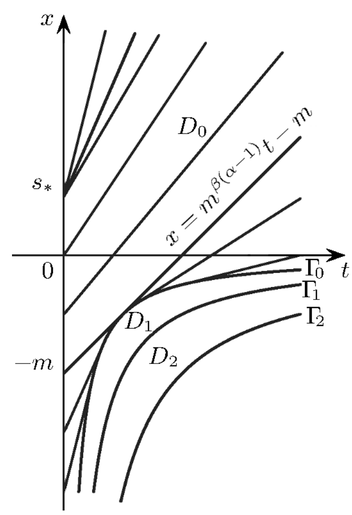

Рис. 1. Характеристики и линии разрыва для начального условия степенного вида.

1) Если $s \geqslant m$, то характеристики $x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s$ имеют наклон, равный $|\tilde{u}_0(s)|^{\beta(\alpha-1)}$. Так как функция $f'(\tilde{u}_0(s)) = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$ не убывает, соответствующие характеристики не пересекаются. На каждой характеристике решение определяется соотношением $u \equiv \tilde{u}_0(s)$.

Если монотонная функция $\tilde{u}_0$ имеет разрыв (первого рода) в точке s_*, то внутри угла $f'(\tilde{u}_0(s_*-0)) < (x-s_*)/t < f'(\tilde{u}_0(s_*+0))$ решение представляет собой волну разрежения (см. [5, с. 83–87]), определяемую соотношением $f'(u(t,x)) = (x-s_*)/t$. Если $\tilde{u}_0(m) \neq |m|^{\beta}$, то такой же волной разрежения $f'(u(t,x)) = (x-m)/t$ заполняется и угол $|m|^{\beta(\alpha-1)} < (x-m)/t < f'(\tilde{u}_0(m))$. Построенное так решение $u(t,x)$ является непрерывным в области $s \geqslant m$ (см. [5, с. 83–87]).

2) Если $s < m$, то характеристики в соответствующей области $x < |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m$ начинают пересекаться, образовывая огибающую $\gamma_0(t) = -C_0 t^{\eta}$, $0 < t \leqslant t_0$ (точка $t_0 = (|m|^{\beta(\alpha-1)} \times (-C_0\eta)^{-1})^{1/(\eta-1)}$ – это абсцисса точки касания графика функции γ_0 с характеристикой $x = |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m$). До этой огибающей решение определяется стандартным образом. Определим предел решения $u_0^+(t)$ на огибающей из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$.

3) В область $\{(t,x) : t > t_0,\ \gamma_0(t) < x < |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m\}$ характеристики не привносят никакой информации из начального условия. В точках кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, определим предел решения $u_0^+(t)$ из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$. Выпустим из каждой точки кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, касательную вправо. Продолжим решение с кривой $\gamma_0(t)$ вдоль всех таких касательных соответствующей константой.

Опишем рекуррентную процедуру построения классического решения в областях D_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Итак, пусть решение в области D_n уже построено, причём кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. Решение в области D_{n+1} строится следующим образом. В качестве "начального условия" выбирается условие

$$u|_{x=\gamma_n(t)} = u_n^-(t),$$

которое находится из соотношения $u_n^-(t) = -w u_n^+(t)$ (см. лемму). Далее решение продолжается константой вдоль характеристик, которые снова образуют огибающую.

Действительно, пусть $x = k_n^+ t - g_n(k_n^+)$, $(t,x) \in D_n$, и $x = k_n^- t - g_{n+1}(k_n^-)$, $(t,x) \in D_{n+1}$, – два семейства характеристик, параметризованные своим наклоном. В точке $(t, \gamma_n(t))$ кривой разрыва Γ_n имеем равенства

$$t = g_n'(k_n^+), \quad k_n^+ t - g_n(k_n^+) = k_n^- t - g_{n+1}(k_n^-), \quad k_n^- = w^{\alpha-1}k_n^+,$$

из которых следует, что

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k_n^+) = g_n(k_n^+) + g_n'(k_n^+)(w^{\alpha-1}k_n^+ - k_n^+).$$

Переобозначив $k_n^+ = k$, получим следующую связь между соседними семействами характеристик:

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k) = g_n(k) + g_n'(k)(w^{\alpha-1}k - k). \tag{15}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $g_{n+1}(k) = A_{n+1}g_0(k) = A_{n+1}k^{1/(\beta(\alpha-1))}$, где $A_{n+1} = A_{n+1}(\alpha,\beta)$, причём $A_{n+1} > A_n \geqslant 1$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Учитывая свойства преобразования Лежандра, а также формулу (14), получаем огибающую соответствующего семейства характеристик $\gamma_{n+1}(t) = \mathcal{L}(g_{n+1})(t) = -C_{n+1}t^{\eta}$, где $C_{n+1} = C_0(A_{n+1})^{1-\eta} > C_n$.

Вследствие доказанной леммы построенное решение удовлетворяет условию Ранкина–Гюгонио. Энтропийность решения следует из того, что функция потока является выпуклой вниз на положительной полуоси и выпуклой вверх на отрицательной полуоси. Теорема доказана.

4. Энтропийное решение задачи Коши с начальным условием, совпадающим с экспоненциальной функцией на бесконечности. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (8) с начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-x/(\alpha-1)\right), & \text{если} \quad x \in (-\infty, m), \\ \tilde{u}_0(x), & \text{если} \quad x \in [m, +\infty), \end{cases} \tag{16}$$

где $\tilde{u}_0(x)$ – произвольная положительная нестрого возрастающая кусочно-гладкая функция, причём $\tilde{u}_0(m) \geqslant \exp(-m/(\alpha-1))$, $m \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *У задачи Коши (8), (16) существует обобщённое энтропийное решение* $u(\cdot)$, *которое определено во всей полуплоскости* $t > 0$, *обладает счётным числом ударных волн* Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t) = \ln t + 1 - nC, \quad C = C(\alpha) > 0;$$

при этом функция $u(\cdot)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$u(t,x) = (-1)^{n-1}U(t, x + (n-1)C), \quad (t,x) \in D_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$ *и* $U = u|_{D_1}$.

Доказательство. Построим в явном виде кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение задачи (8), (16), удовлетворяющее условиям теоремы. Это решение будет иметь следующую структуру: в областях гладкости D_n, $n \in \mathbb{N}$, и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение строится методом характеристик, причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. В каждой из областей D_n, $n \in \mathbb{N}_0$, проекции этих характеристик на плоскость (t,x) образуют семейство прямых (10), параметризованных своим наклоном.

В окрестности любой точки прямой $t = 0$ классическое решение задачи (8), (16) существует и единственно. Для его построения следует продолжить начальное условие u_0 константой вдоль характеристик. Характеристическая система для уравнения (8) имеет вид (11). Характеристикой, выходящей из точки $(t_0, x_0, u_0(x_0)) = (0, s, u_0(s))$, где $s \in \mathbb{R}$ – параметр на графике начального условия u_0, является прямая (12). Проекция на плоскость (t,x) этой прямой имеет вид

$$x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s, \quad \text{если} \quad s \geqslant m, \quad \text{и} \quad x = e^{-s}t + s, \quad \text{если} \quad s < m.$$

Сделав в последнем уравнении замену $k = e^{-s}$, $k > e^{-m}$, и обозначив $g_0(k) = \ln k$, получим семейство прямых (13), зависящих от параметра $k > e^{-m}$.

Доопределим функцию $g_0(k)$ той же формулой при всех $k > 0$. Тогда семейство прямых (13) будет иметь огибающую $\gamma_0(t) = \mathcal{L}(g_0)(t)$, определённую при всех $t \in \mathbb{R}^+$. После перехода от параметрического представления (5) к явному получим, что

$$\gamma_0(t) = 1 + \ln t. \tag{18}$$

Решение в области D_0 определяется аналогично тому, как это сделано в пп. 1)–3) доказательства теоремы 1. Именно, определим его следующим образом (рис. 2).

1′) Если $s \geqslant m$, то характеристики в соответствующей области имеют наклон, равный $|\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$. Так как функция $f'(\tilde{u}_0(s)) = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$ не убывает, соответствующие характеристики не пересекаются. На каждой характеристике решение определяется соотношением $u \equiv \tilde{u}_0(s)$.

Если монотонная функция $\tilde{u}_0$ имеет разрыв (первого рода) в точке s_*, то внутри угла $f'(\tilde{u}_0(s_* - 0)) < (x - s_*)/t < f'(\tilde{u}_0(s_* + +0))$ решение представляет собой волну разрежения (см. [5, с. 83–87]), определяемую соотношением $f'(u(t,x)) = (x - s_*)/t$. Если $\tilde{u}_0(m) \neq e^{-m/(\alpha-1)}$, то такой же волной разрежения $f'(u(t,x)) = = (x-m)/t$ заполняется и угол $e^{-m} < (x-m)/t < f'(\tilde{u}_0(m))$. Построенное так решение $u(t,x)$ является непрерывным в области $s \geqslant m$ (см. [5, с. 83–87]).

2′) Если $s < m$, то характеристики в соответствующей области $x < e^{-m}t + m$ начинают пересекаться, образовывая огибающую $\gamma_0(t) = 1 + \ln t$, $0 < t \leqslant t_0$ (точка $t_0 = e^m$ – это абсцисса точки касания графика функции γ_0 с характеристикой $x = e^{-m}t + m$). До этой огибающей решение определяется стандартным образом. Определим предел решения $u_0^+(t)$ на огибающей из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$.

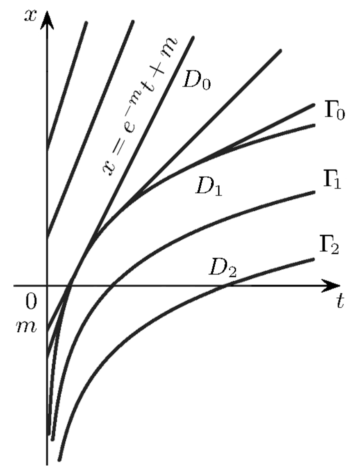

Рис. 2. Характеристики и линии разрыва для начального условия экспоненциального вида.

3′) В область $\{(t,x) : t > t_0,\ \gamma_0(t) < x < e^{-m}t + m\}$ характеристики не привносят никакой информации из начального условия. В точках кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, определим предел решения $u_0^+(t)$ из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$. Выпустим из каждой точки кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, касательную вправо. Продолжим решение с кривой $\gamma_0(t)$ вдоль всех таких касательных соответствующей константой.

Итак, построено решение задачи (8), (16) в области D_0. Процедура построения решения в областях D_n, $n \in \mathbb{N}$, такая же, как и в теореме 1. Связь между функциями g_n и g_{n+1}, которые задают семейства характеристик в областях D_n и D_{n+1}, описывается соотношением (15).

Непосредственные вычисления показывают, что $g_{n+1}(k) = g_n(k) + C = g_0(k) + (n+1)C$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$, где $C = C(\alpha) > 0$. Учитывая свойства преобразования Лежандра, а также представление (18), получаем огибающую соответствующего семейства характеристик $\gamma_{n+1}(t) = \mathcal{L}(g_{n+1})(t) = \ln t - (n+1)C$.

Докажем, что построенное решение удовлетворяет соотношению (17). Действительно, согласно доказанному выше, характеристики уравнения (8) имеют вид

$$x = kt - g_1(k), \quad (t,x) \in D_1,$$

$$x = kt - (g_1(k) + (n-1)C), \quad (t,x) \in D_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\dot{x} = f'(u) = |u|^{\alpha-1}$, то в точках области D_n имеем $u(t,x) = |U(t, x + (n-1)C)|$. Поэтому, поскольку при переходе через линию разрыва решение меняет знак, получаем соотношение (17).

Вследствие доказанной леммы построенное решение удовлетворяет условию Ранкина–Гюгонио. Энтропийность решения следует из того, что функция потока является выпуклой вниз на положительной полуоси и выпуклой вверх на отрицательной полуоси. Теорема доказана.

5. Несуществование положительного энтропийного решения. Покажем, что задачи Коши для уравнения (8) с начальными условиями (9) и (16) не имеют положительных решений ни в какой полосе. Для доказательства этого утверждения нам потребуются понятия обобщённых энтропийных суб- и суперрешений этой задачи.

Обозначим $f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = \max(-f, 0)$; $\operatorname{sign}^+(f) = \operatorname{sign}(f^+)$; $\operatorname{sign}^-(f) = -\operatorname{sign}^+(-f)$. Приводимые ниже определения даны в работах [14, 15] (см. также [3, с. 328–329]).

Определение 3. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным субрешением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$((u-k)^+)_t + (\operatorname{sign}^+(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^+ = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Определение 4. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным суперрешением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$((u-k)^-)_t + (\operatorname{sign}^-(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^- = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Замечание 2. Несложно видеть, что функция $u(\cdot)$ является обобщённым энтропийным решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда она является обобщённым энтропийным суб- и суперрешением одновременно.

В работах [14, 15] установлен следующий принцип сравнения для ограниченных обобщённых энтропийных суб- и суперрешений.

Предложение 2. *Если $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ и $v\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u,v \in L^\infty(\Pi_T)$, – обобщённое энтропийное субрешение и обобщённое энтропийное суперрешение задачи (1), (2) с начальными условиями u_0 и v_0 соответственно, $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, и $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. на Π_T.*

В работе [16] доказано, что максимум (минимум) конечного множества обобщённых энтропийных субрешений (суперрешений) задачи (1), (2) также является обобщённым энтропийным субрешением (суперрешением) этой задачи, откуда вытекает доказанное в работе [8]

Предложение 3. *1. Пусть u – обобщённое энтропийное субрешение задачи (1), (2) и $c \in \mathbb{R}$. Тогда функция $v\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = \max(u(t,x),c)$ также является обобщённым энтропийным субрешением этой задачи с начальной функцией $v_0\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $v_0(x) = \max(u_0(x),c)$.*

2. Пусть u – обобщённое энтропийное суперрешение задачи (1), (2) и $c \in \mathbb{R}$. Тогда функция $w\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $w(t,x) = \min(u(t,x),c)$ также является обобщённым энтропийным суперрешением этой задачи с начальной функцией $w_0\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $w_0(x) = \min(u_0(x),c)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, функция $h(x) = (f(x)-f(0))/x$ возрастает при $x>0$ и для некоторого $m \in \mathbb{R}$ кусочно-гладкая функция $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ убывает при $x<m$, причём $\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = +\infty$. Пусть также выполнено соотношение*) $-u_0^{-1}(x) = o(h(x))$ при $x \to +\infty$. Тогда не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи (1), (2) ни в какой полосе Π_T.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием (2), а также задачи Коши для этого же уравнения со следующими начальными условиями:

$$(u_N)_t + f(u_N)_x = 0, \quad u_N|_{t=0} = \begin{cases} N, & x < u_0^{-1}(N), \\ 0, & x \geqslant u_0^{-1}(N), \end{cases} \tag{19}$$

$$(U_N)_t + f(U_N)_x = 0, \quad U_N|_{t=0} = \min(N, u_0(x)) \tag{20}$$

при фиксированном $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant u_0(m)$.

Заметим, что справедливы неравенства $u_N|_{t=0} \leqslant U_N|_{t=0} \leqslant u|_{t=0}$.

Задача (19) представляет собой задачу Римана о распаде разрыва. Её единственным ограниченным обобщённым энтропийным (энтропийность следует из определения функции h) решением $u_N \in L^\infty(\Pi_T)$ является [5] функция

$$u_N(t,x) = \begin{cases} N, & x < u_0^{-1}(N) + h(N)t, \\ 0, & x \geqslant u_0^{-1}(N) + h(N)t. \end{cases}$$

*) Здесь и ниже в доказательстве под u_0^{-1} подразумевается обратная функция к ограничению функции u_0 на промежуток $(-\infty, m)$. На этом промежутке функция u_0 монотонна, а значит, имеет обратную.

Отметим, что для любой фиксированной точки $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ имеет место сходимость $u_N(t,x) \to +\infty$ при $N \to +\infty$, поскольку $-u_0^{-1}(x) = o(h(x))$ при $x \to +\infty$.

Пусть $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$ – неотрицательное обобщённое энтропийное решение (а значит, и обобщённое энтропийное суперрешение) задачи (1), (2). Тогда в силу предложения 3 функция $U_N\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $U_N(t,x) = \min(u(t,x), N)$, также является обобщённым энтропийным суперрешением задачи (20), причём для всех $(t,x) \in \Pi_T$ выполнено неравенство $0 \leqslant U_N(t,x) \leqslant N$ в силу неотрицательности функции u.

Таким образом, вследствие предложения 2 и определения функции U_N почти всюду в полосе Π_T справедливы неравенства $u_N(t,x) \leqslant U_N(t,x) \leqslant u(t,x)$, но это противоречит тому, что $u_N(t,x) \to +\infty$ при $N \to +\infty$.

Следствие 1. *Не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи Коши (8), (9) ни в какой полосе* Π_T.

Доказательство. Заметим, что функции $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $h(x) = |x|^{\alpha-1}/\alpha$, $\alpha > 1$, и начальное условие u_0, определённое равенством (9), удовлетворяют всем условиям теоремы 3. Действительно, $f \in C^1(\mathbb{R})$, причём h – возрастающая при $x > 0$ функция, а неотрицательная кусочно-гладкая функция u_0 убывает на интервале $(-\infty, m)$, причём $\lim\limits_{x\to-\infty} u_0(x) = +\infty$. Кроме того, $x^{1/\beta} = o(|x|^{\alpha-1}/\alpha)$ при $x \to +\infty$, поскольку $\beta(\alpha-1) > 1$. Следовательно, $-u_0^{-1}(x) = o(h(x))$ при $x \to +\infty$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи Коши (8), (16) ни в какой полосе* Π_T.

Доказательство. Согласно доказательству следствия 1 определённые в нём функции f и h удовлетворяют условиям теоремы 3. Условиям этой теоремы удовлетворяет и начальное условие u_0, определённое равенством (16). Действительно, неотрицательная кусочно-гладкая функция u_0 убывает на интервале $(-\infty, m)$, причём $\lim\limits_{x\to-\infty} u_0(x) = +\infty$. Кроме того, имеет место соотношение $(\alpha-1)\ln x = o(|x|^{\alpha-1}/\alpha)$ при $x \to +\infty$, поэтому $-u_0^{-1}(x) = o(h(x))$ при $x \to +\infty$. Следствие доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1204.2020.1), а также при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С.Н.* Обобщённые решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
2. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. Труды С.Н. Кружкова: сб. ст. / Под ред. С.Н. Бахвалова. М., 2000.
4. *Панов Е.Ю.* О классах корректности локально ограниченных обобщённых энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 5. С. 175–188.
5. *Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения с частными производными первого порядка. М., 1999.
6. *Олейник О.А.* О единственности и устойчивости обобщённого решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 165–170.
7. *Горицкий А.Ю.* Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счётнымм числом ударных волн // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 2. С. 3–6.
8. *Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю.* О локально ограниченных обобщённых энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. № 5. С. 120–133.
9. *Гаргянц Л.В.* Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 481–489.
10. *Гаргянц Л.В.* О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 2. С. 191–199.

11. *Gargyants L.V.* Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data // Russian J. of Math. Phys. 2017. V. 24. № 3. P. 412–414.
12. *Гаргянц Л.В., Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю.* Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра // Мат. сб. 2021. Т. 212. № 4. С. 29–44.
13. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 2012.
14. *Бенилан Ф., Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.
15. *Benilan Ph., Kruzhkov S.N.* Conservation laws with continuous flux functions // Nonlin. Differ. Equat. and Appl. 1996. V. 3. P. 395–419.
16. *Панов Е.Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и суперрешений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 252–259.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 24.11.2020 г.
После доработки 24.11.2020 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.