ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 319–345

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.928.2

РАЗВИТИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛОМОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧИ КОШИ И КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С “ПРОСТОЙ” РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

© 2022 г. А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Метод регуляризации Ломова развит для задачи Коши и смешанной задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения в случае “простой” рациональной точки поворота у предельного оператора. Для доказательства асимптотической сходимости возникающих рядов используется принцип максимума.

DOI: 10.31857/S0374064122030049, **EDN:** BXTCBM

Светлой памяти нашего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993),
выдающегося математика и прекрасного человека,
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящается эта работа

Введение. Сингулярно возмущённые уравнения, начиная с работ академика А.Н. Тихонова [1, 2], привлекают внимание многих исследователей. Это объясняется большой прикладной значимостью таких уравнений. С помощью сингулярно возмущённых уравнений описываются задачи, возникающие в квантовой механике, гидродинамике, химической кинетике. Особое место в этом перечне занимают задачи с нестабильным спектром предельного оператора (т.е. задачи с точками поворота или задачи со спектральными особенностями). В качестве примеров таких задач можно указать на уравнение Шрёдингера для туннельного перехода, задачу с классическим осциллятором, задачи механики сплошной среды и др.

Методам решения задач со спектральными особенностями посвящены монографии [3–5] и работа [6]. Настоящая статья развивает и дополняет исследования школы С.А. Ломова по методу регуляризации, который разработан основателем этой школы в середине шестидесятых годов прошлого столетия и схема которого в общих чертах состоит в следующем. Введением регуляризирующих функций, содержащих в себе все нерегулярности решения, возникающие из-за малого параметра, сингулярная задача сводится к регулярной в пространстве большей размерности. Используя схему классической теории возмущений, строится теория разрешимости соответствующих итерационных задач в пространстве большей размерности, а затем после построения асимптотического ряда по степеням малого параметра производится сужение на регуляризирующие функции, которое и приводит к построению асимптотического решения исходной сингулярно возмущённой задачи.

Одним из достоинств метода регуляризации Ломова является то, что он даёт возможность строить регуляризованное асимптотическое решение во всей области интегрирования, а при определённых условиях на коэффициенты даёт и точное решение задачи.

В работах С.А. Ломова и его учеников разработана, в частности, общая теория асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор $A(t)$ дискретно необратим, т.е. одна из точек его спектра при отдельных значениях $t_j \in [0,T]$ обращается в нуль (другие точки спектра в нуль не обращаются на всём отрезке $[0,T]$), причём сам оператор $A(t)$ является диагонализируемым при всех значениях $t \in [0,T]$ (включая и точки необратимости $t=t_j$). В этом случае точки t_j называются *“простыми” точками поворота.*

Случай "простой" точки поворота с натуральным показателем типа $t^n a(t)$, $n \in \mathbb{N}$, изучался в работе [7], а случай негладкого спектра предельного оператора – в [8]. Случай аналитических решений по параметру сингулярно возмущённого уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора рассмотрен в работе [9].

В данной работе изучаются сингулярно возмущённые задача Коши и смешанная задача на полуоси для параболического уравнения в случае "простой" точки поворота с рациональным показателем типа $t^r a(t)$, $r \in \mathbb{Q}$.

Возникающие из-за наличия рациональной точки поворота трудности в процессе построения асимптотики решения сингулярно возмущённых задач ранее с точки зрения метода регуляризации не рассматривались. Исследование этих трудностей и разработка соответствующего алгоритма метода регуляризации существенно дополнят теорию сингулярных возмущений.

1. Задача Коши для сингулярно возмущённого параболического уравнения с простой рациональной точкой поворота. Рассматриваемая в работе задача возникла в результате выступления одного из авторов на научно-исследовательском семинаре "Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики", руководимом академиком РАН Е.И. Моисеевым и профессором И.С. Ломовым.

На этом семинаре докладывалось о задаче Коши, у которой перед второй производной стояла вторая степень ε^2 малого параметра (модельное уравнение Шрёдингера) [10]. Естественно возник вопрос, как изменились бы ответ и рассуждения в этой задаче, если бы в ней перед второй производной стояла первая степень ε малого параметра, поскольку такое изменение усложняет построение регуляризованного асимптотического решения. Ответ на этот вопрос и даёт данная статья.

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\right) + t^{m/n}a(t)u = h(x,t),$$
$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

и пусть для неё выполнены следующие предположения:

1) $h(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, функция $h(x,t)$ и все её производные ограничены на $\mathbb{R}\times[0,T]$;

2) $k(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, существуют положительные постоянные k_0, M такие, что $k_0 \leqslant k(x) < M(x^2+1)$, $|k'(x)| < M\sqrt{x^2+1}$ при всех $x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, функция $f(x)$ и все её производные ограничены на $\mathbb{R}$;

4) $a(t) \in C^\infty([0,T])$, для всех $t \in [0,T]$ справедливы соотношения $a(t) \neq 0$ и $\operatorname{Re} a(t) \geqslant 0$;

5) $m, n \in \mathbb{N}$, $m/n = r \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ (m/n – несократимая дробь, $n \geqslant 2$).

Эти условия обеспечивают существование и единственность ограниченного решения и возможность построения асимптотического ряда для решения задачи (1).

Сингулярно возмущённые задачи возникают в том случае, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε, при $\varepsilon \neq 0$ не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$.

При изучении задач с "простой" точкой поворота возникает ситуация, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Сингулярности задачи (1) имеют вид

$$e^{-\varphi(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_i(t,\varepsilon) = e^{-\varphi(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds,$$

где $\varphi(t) = \int_0^t s^{m/n}a(s)\,ds$, $i = \overline{0,(p-1)}$, $p = m+n-1$. Обозначим $\sigma := \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}\}$.

Введём, согласно методу регуляризации, расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma)$ такую, что её сужение

$$\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma)\Big|_{\substack{\tau=\varphi(t)/\varepsilon\\ \sigma_i=\sigma_i(t,\varepsilon)}} = u(x,t)$$

даёт решение задачи (1). Используя формулу сложного дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=\dot{\widetilde{u}}-\frac{q(t)}{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}(-q(t)\sigma_i+t^{-1+(i+1)/n})\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\sigma_i}, \tag{2}$$

где $q(t)=t^{m/n}a(t)$. Подставив выражение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\varepsilon\dot{\widetilde{u}}-q(t)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}(-q(t)\sigma_i+\varepsilon t^{-1+(i+1)/n})\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\sigma_i}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\right)-q(t)\widetilde{u}+h(x,t).$$

В результате приходим к задаче для расширенной функции $\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma,\varepsilon)$:

$$-q(t)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}-q(t)\left(\sigma_i\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\sigma_i}\right)+q(t)\widetilde{u}=-\varepsilon\left(\dot{\widetilde{u}}+\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\sigma_i}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}\right)\right)+h(x,t),$$

$$\widetilde{u}(x,0,0,0,\varepsilon)=f(x). \tag{3}$$

В дальнейшем знак тильды $\sim$ над u будем опускать.

Для решения задачи (3) введём пространство E безрезонансных решений, элементы которого имеют вид

$$u=X(x,t)e^{\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i+W(x,t),$$

где $X(x,t),Z^i(x,t),W(x,t)\in C^{\infty}(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Зададим операторы, порождённые задачей (3):

$$\mathcal{L}_0:=-q(t)\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}-q(t)\left(\sigma_i\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\right)+q(t)I,$$

$$\mathcal{L}_1:=-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}\frac{\partial}{\partial\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sigma_i\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\right),$$

$$\Gamma u:=u(x,0,0,0,\varepsilon) \tag{4}$$

(I – единичный оператор). Действия операторов системы (3) на элементы пространства E записываются в виде

$$\mathcal{L}_0u=-q(t)X(x,t)e^{\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}-q(t)Z^i(x,t)\sigma_i+q(t)X(x,t)e^{\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}q(t)Z^i(x,t)\sigma_i+q(t)W(x,t),$$

$$\mathcal{L}_1u=-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z^i(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial X}{\partial x}\right)e^{\tau}+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z^i}{\partial x}\right)\sigma_i. \tag{5}$$

Используя операторы (4), (5), запишем задачу (3) в виде

$$\mathcal{L}_0u=\varepsilon(-\dot{u}+\mathcal{L}_1u)+h(x,t),$$

$$\Gamma u=f(x). \tag{6}$$

Её решение будем искать в виде ряда по ε:

$$u=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,t,\tau,\sigma), \tag{7}$$

где
$$u_k(x,t,\tau,\sigma) = X_k(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + W_k(x,t).$$

Подставляя ряд (7) в уравнения задачи (6), получаем следующую серию задач:
$$\mathcal{L}_0 u_k = -\dot{u}_{k-1} + \mathcal{L}_1 u_{k-1} + \delta_0^k h(x,t),$$
$$\Gamma u_k = f(x)\delta_0^k, \quad k = \overline{-1,\infty}. \tag{8}$$
Примем соглашение: если $k-1 \leqslant -2$, $k-2 \leqslant -2$, то слагаемые с такими k опускаем. Далее через $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначаем целую и дробную части числа.

Для того чтобы решить итерационные задачи (8), сформулируем и докажем теоремы 1 и 2 о разрешимости уравнения
$$\mathcal{L}_0 u = h(x,t) \tag{9}$$
в пространстве E. В теоремах 1 и 2 при выполнении разных исходных предположений (случаи I и II) получены необходимые и достаточные условия разрешимости этого уравнения.

Теорема 1 (разрешимость, случай I). *Пусть выполнены предположения 1)–5) задачи (1) и функция $h(x,t) \in E$ имеет вид*
$$h(x,t) = h_1(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(x,t)\sigma_i + h_3(x,t).$$

Тогда уравнение (9) разрешимо в пространстве E, если и только если имеют место тождества $h_1(x,t) \equiv h_2(x,t) \equiv 0$ и
$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(h_3(x,0)) = 0 \quad \textit{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнены предположения теоремы и уравнение (9) имеет решение в E, т.е. существует $u \in E$ такое, что $\mathcal{L}_0 u = h(x,t)$. Так как ядро оператора $\mathcal{L}_0$ имеет вид
$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0) = \left\{ u \in E : u = X(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i \right\},$$
то
$$\mathcal{L}_0 u = q(t)W(x,t) = h_1(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(x,t)\sigma_i + h_3(x,t). \tag{10}$$
Отсюда следует, что $h_1(x,t) \equiv 0$, $h_2^i(x,t) \equiv 0$, $i = \overline{0,p-1}$, и $q(x,t)W(x,t) = h_3(x,t)$.

Разложим функцию $h_3(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$:
$$h_3(x,t) = h_3(x,0) + t\frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t),$$
где $\overline{h}_3(x,0) \neq 0$. Тогда правая часть уравнения (10) принимает вид
$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = h_3(x,0) + t\frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t).$$
Так как уравнение имеет решение, то необходимо
$$h_3(x,0) = 0, \quad \frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{[m/n]}h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-\{m/n\}} \frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{h}_3(x,t)/a(t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в пространстве E записывается в виде

$$u = X(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + t^{1-\{m/n\}}\frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Достаточность. Если выполнены тождества из заключения теоремы, то функция $h(x,t)$ имеет вид $h(x,t) = t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t)$, а решение уравнения (9) в этом случае запишется в виде

$$u(x,t) = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (разрешимость, случай II). *Пусть выполнены условия 2) и 3) задачи (1) и* $h_3(x,t) = t^{-s/n}f(x,t)$, *где* $f(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, $1\leqslant s\leqslant n-1$.

Тогда уравнение (9) разрешимо в пространстве E, *если и только если имеют место тождества*

$$h_1(x,t)\equiv 0, \quad h_2^i(x,t)\equiv 0, \quad i=\overline{0,p-1},$$

$$f_t^{(k)}(x,0) = 0 \quad \textit{для любого} \quad k\in\overline{0,[m/n]}, \quad \textit{если} \quad 0<\frac{s}{n}+\left\{\frac{m}{n}\right\}\leqslant 1,$$

$$f_t^{(k)}(x,0) = 0 \quad \textit{для любого} \quad k\in\overline{0,[m/n]+1}, \quad \textit{если} \quad \frac{s}{n}+\left\{\frac{m}{n}\right\} > 1.$$

Доказательство. Необходимость. При решении уравнения (9) могут представиться только две возможности: а) или б).

а) Выполняется двойное неравенство $0 < s/n + \{m/n\} \leqslant 1$. Тогда возьмём $k=[m/n]$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$. Получим

$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = t^{-s/n}\left(f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{f}(x,t)\right),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u = X(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

б) Выполняется неравенство $s/n+\{m/n\}>1$. Тогда возьмём $k=[m/n]+1$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$. Получим

$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = t^{-s/n}\left(f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]+1}}{([m/n]+1)!}\frac{\partial^{[m/n]+1}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]+1}} + t^{[m/n]+2}\overline{f}(x,t)\right),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u=X(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i+t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Замечание 1. Представления для функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) условий теоремы 2 могут быть объединены, если записать их первый сомножитель в виде $t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}$. Действительно, если $s/n+\{m/n\}<1$, то $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}=1-(s/n+\{m/n\})$, а если $s/n+\{m/n\}>1$, то выражение $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}$ преобразовывать не будем. Если же $s/n+\{m/n\}=1$, то $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}=0$. Отсюда и представлений функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) вытекает, что

$$W(x,t)=t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u=X(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i+t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Достаточность. Если выполнены тождества из заключения теоремы, то функция $h(x,t)$ имеет вид $h(x,t)=t^{[m/n]+1-s/n}\overline{h}_3(x,t)$, если $s/n+\{m/n\}\leqslant 1$, и $h(x,t)=t^{[m/n]+2-s/n}\overline{h}_3(x,t)$, если $s/n+\{m/n\}>1$

Решение уравнения (9) в этом случае запишется в виде

$$u(x,t)=\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0)+t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 (единственность). *Пусть в пространстве E дана система уравнений*

$$\mathcal{L}_0u=0,\quad \Gamma u=0 \tag{11}$$

и выполнены условия теоремы 1 или теоремы 2. Если, кроме этого, оператор $\mathcal{L}_1-\partial/\partial t$ удовлетворяет теореме о разрешимости, то система (11) имеет только нулевое решение.

Доказательство. На основании теоремы 1 или теоремы 2 запишем решение уравнения (9) в виде

$$u=u_1(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}u_2^i(x,t)\sigma_i,$$

где $u_1(x,t)$, $u_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, – произвольные гладкие функции. Вычислим выражение

$$\mathcal{L}_1u-\frac{\partial u}{\partial t}=\left(-\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}\left(-\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right)\sigma_i-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}u_2^i.$$

Так как оператор $\mathcal{L}_1 - \partial/\partial t$ удовлетворяет теореме о разрешимости и решение $u(x,t)$ должно удовлетворять уравнению $Gu = 0,$ то отсюда следует, что

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\bigg), \quad u_1(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial u_2^i(x,t)}{\partial x}\bigg), \quad u_2^i(x,0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Как следствие решений задач Коши имеем тождества

$$u_1(x,t) \equiv 0, \quad u_2^i(x,t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $E.$ Теорема доказана.

1.2. Построение формального регуляризованного асимптотического ряда. Применим теоремы 1 и 2 для решения итерационных задач (8). Для удобства запишем эти задачи покомпонентно:

$$\frac{\partial X_k(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_k(x,t)}{\partial x}\bigg),$$

$$\frac{\partial Z_k^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_k^i(x,t)}{\partial x}\bigg), \quad i = \overline{0, (p-1)},$$

$$t^{m/n}a(t)W_k(x,t) = -\frac{\partial W_{k-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial W_{k-1}(x,t)}{\partial x}\bigg) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_{k-1}^i(x,t) + \delta_0^k h(x,t),$$

$$X_k(x,0) + W_k(x,0) = \delta_k^0 f(x), \quad k = \overline{-1, \infty};$$

$$\text{если индекс} \quad k-1 \leqslant -2, \quad \text{то слагаемые по определению равны нулю.} \tag{12}$$

Для решения итерационных задач используется теорема о разрешимости. Рассмотрим систему (12) при $k = -1$:

$$\varepsilon^{-1}: \begin{cases} \dfrac{\partial X_{-1}(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\dfrac{\partial X_{-1}(x,t)}{\partial x}\bigg), \\ \dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial x}\bigg), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n}a(t)W_{-1}(x,t) \equiv 0, \\ X_{-1}(x,0) + W_{-1}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Из начальных условий системы (13) следует, что

$$X_{-1}(x,t) \equiv 0,$$

$Z_{-1}^i(x,t)$ на данном шаге – произвольные решения уравнений теплопроводности, частное решение $W(x,t) \equiv 0.$

Функции $Z_{-1}^i(x)$ найдём из условия разрешимости системы (12) при $k = 0$:

$$\varepsilon^{0}: \begin{cases} \dfrac{\partial X_{0}(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\dfrac{\partial X_{0}(x,t)}{\partial x}\bigg), \\ \dfrac{\partial_t Z_{0}^i(x)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial x}\bigg), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n}a(t)W_{0}(x,t) = h(x,t) - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_{-1}^i(x,t), \\ X_{0}(x,0) + W_{0}(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{14}$$

Разложим функцию $h(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$:

$$h(x,t)=h(x,0)+t\frac{\partial h(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h(x,0)}{\partial t^{[m/n]}}+t^{[m/n]+1}h_0(x,t).$$

Из теоремы о разрешимости для $W_0(x,t)$ следует, что если $i=n(j+1)-1$, $j=\overline{0,[m/n]}$, то

$$Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,0)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j h(x,0)}{\partial t^j}.$$

Если $i\neq n(j+1)-1$, $i=\overline{0,(p-1)}$, то

$$Z_{-1}^i(x,0)=0.$$

Таким образом, функции $Z_{-1}(x,t)$ являются решениями задач Коши

$$\frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)}{\partial x}\bigg),\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,0)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j h(x,0)}{\partial t^j}.$$

Остальные функции $Z_{-1}^i(x,t)$ с индексами $i\neq n(j+1)-1$, $i=\overline{0,(p-1)}$ будут тождественно равны $Z_{-1}^i(x,t)\equiv 0$, так как $Z_{-1}^i(x,0)=0$.

В результате после сужения на регуляризирующие функции получим решение на "-1"-м шаге

$$u_{-1}(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{[m/n]}Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon).$$

Система (14) имеет решения:

a) $X_0(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial X_0(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_0(x,t)}{\partial x}\bigg);$$

$$X_0(x,0)=f(x);$$

b) $Z_0^i(x,t)$ – на данном этапе произвольное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial x}\bigg),\quad i=\overline{0,p-1};$$

c) $W_0(x,t)=\dfrac{1}{t^{m/n}a(t)}\bigg(h(x,t)-\displaystyle\sum_{j=0}^{[m/n]}t^jZ_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\bigg)=t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t),$

где $\overline{h}_0(x,t)$ – гладкая функция.

Для определения начальных условий $Z_0^i(x,0)$ рассмотрим итерационную систему (12) на шаге "1":

$$\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial x}\bigg),$$

$$\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial x}\bigg),\quad i=\overline{0,(p-1)},$$

$$t^{m/n}a(t)W_1(x,t) = -\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_0^i(x,t),$$

$$X_1(x,0) + W_1(x,0) = 0.$$

Чтобы найти $Z_0^i(x,0)$, подчиним уравнение относительно $W_1(x,t)$ условию разрешимости. Для этого разложим $-\dfrac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$. Предварительно вычислим выражение

$$\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) = (1-\{m/n\})t^{-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial \overline{h}_0(x,t)}{\partial t} -$$

$$- t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \overline{h}_0(x,t)}{\partial x}\right) = -t^{-\{m/n\}}h_1(x,t).$$

Тогда получим

$$-\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) = t^{-\{m/n\}}h_1(x,0) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial h_1(x,0)}{\partial t} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t^{k-\{m/n\}}}{k!}\frac{\partial^k h_1(x,0)}{\partial t^k} + t^{k+1-\{m/n\}}\overline{h}_1(x,t),$$

где $k = [m/n + \{m/n\}]$, $\{m/n\} = s/n$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Если $m/n + \{m/n\}$ – целое, то $k = m/n + \{m/n\} - 1$.

Чтобы удовлетворить условиям разрешимости, нужно рассмотреть два случая:

а) если $j - \{m/n\} = (i+1)/n - 1$, т.е. $i = n(j+1) - n\{m/n\} - 1$, $j = \overline{0,k}$, то положим

$$Z_0^i(x,0) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j h_1(x,0)}{\partial t^j}.$$

Поэтому функции $Z_0^i(x,t)$ являются решениями задач Коши

$$\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial x}\right),$$

$$Z_0^i(x,0) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j h_1(x,0)}{\partial t^j};$$

б) если $i \neq n(j+1) - n\{m/n\} - 1$, $j = \overline{0,k}$, то положим $Z_0^i(x,0) = 0$. Следовательно, в этом случае $Z_0^i(x,t) \equiv 0$.

На данном шаге определено слагаемое $u_0(x,t)$, а значит, после сужения на регуляризирующие функции главный член асимптотики примет вид

$$u_0(x,t) = f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \sum_{j=0}^{k} Z_0^{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{t^{m/n}a(t)}\left(h(x,t) - \sum_{j=0}^{[m/n]} t^j Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\right).$$

Главный член $u_{\text{гл}}$ асимптотики запишется в виде суммы

$$u_{\text{гл}}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]} Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k} Z_0^{n(j+1)-n\{m/n\}-1}\sigma_{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(t,\varepsilon)+f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon}+t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t).$$

Решение на “1”-м шаге примет вид

$$W_1(x,t)=\frac{1}{t^{m/n}a(t)}\bigg(t^{-\{m/n\}}h_1(x,t)-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_0^i(x,t)\bigg)=t^{\{1-\{2\{m/n\}\}\}}h_1(x,t),$$

$Z_1^i(x,t)$ – общее решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial x}\bigg),\quad i=\overline{0,(p-1)}.$$

Отсюда следует, что если:

1) $2\{m/n\}\neq 1$, то $W_1(x,0)=0$ и $X_1(x,0)=0$, следовательно, $X_1(x,t)\equiv 0$;

2) $2\{m/n\}=1$, то $W_1(x,0)=h_1(x,0)$ и $X_1(x,0)=-h_1(x,0)$, следовательно, $X_1(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial x}\bigg),$$

$$X_1(x,0)=-h_1(x,0).$$

Произвольные функции $Z_1^i(x,t)$ находятся из условия разрешимости системы (12) при $k=2$. Согласно приведённой схеме можно определить любой член асимптотического регуляризованного ряда.

1.3. Оценка остаточного члена асимптотического ряда. Пусть решены $N+1$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши после сужения на регуляризирующие функции представляется в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{N}u_k(x,t,\varepsilon)\varepsilon^k+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon),\tag{15}$$

где

$$u_k(x,t,\varepsilon)=X_k(x,t)e^{-\varphi(t)/\varepsilon}+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i(t,\varepsilon)+W_k(x,t).$$

Подставляя представление (15) в уравнение (1) и учитывая, что $u_k(x,t,\varepsilon)$ являются решениями итерационных задач, получаем задачу Коши для определения остатка $R_N(x,t,\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}(R)\equiv\varepsilon\bigg(\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial x}\bigg)\bigg)+t^{m/n}a(t)R_N(x,t)=H(x,t,\varepsilon),$$

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\quad -\infty<x<+\infty,\tag{16}$$

где $H(x,t,\varepsilon)=H_1(x,t)+\varepsilon H_2(x,t,\varepsilon)$, а

$$H_1(x,t)=-\frac{\partial W_N(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial W_N(x,t)}{\partial x}\bigg)-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_N^i(x,t)=-q(t)W_{N+1}(x,t).$$

$$H_2(x,t,\varepsilon)=-e^{-\varphi(t)/\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_n}{\partial x}\bigg)-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial W_n}{\partial x}\bigg)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_n^i}{\partial x}\bigg)\sigma_i(t,\varepsilon).$$

Оценка остаточного члена опирается на принцип максимума, распространённый на сингулярно возмущённые параболические задачи [11]. Этот принцип используется в той общности, которая нам понадобится для оценки остаточного члена. Классическим решением задачи (16) называется функция $R_N(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $\overline{Q}_T = \mathbb{R}\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные производные $\partial R_N/\partial t$, $\partial R_N/\partial x$, $\partial^2 R_N/\partial x^2$ в Q_T и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (16) и при $t=0$ начальным условиям.

Теорема 4 (оценка остаточного члена). *Пусть выполнены предположения 1)–5) задачи Коши (1) и существует постоянная M_0 такая, что при всех $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справедливо неравенство $|H(x,t,\varepsilon)|\leqslant M_0$.*

Тогда для некоторой постоянной C при всех $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ имеет место неравенство $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant C$.

Доказательство теоремы приведём в два этапа.

Этап 1. Пусть для функции $u(x,t,\varepsilon)$ в области $D_L=[-L,L]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$ выполнены неравенства

$$\mathcal{L}(u)\equiv\varepsilon\bigg(\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\bigg)\bigg)+q(t)u(x,t,\varepsilon)\geqslant 0,$$

$$u(x,0,\varepsilon)\geqslant 0,\quad u(x,t,\varepsilon)>-m,\quad \text{где}\quad m>0.$$

Напомним, что $q(t):=t^{m/n}a(t)$. Введём функцию $w=u+e^{\alpha t/\varepsilon}mL^{-2}(x^2+pt)$. Тогда

$$\mathcal{L}(w)=\mathcal{L}(u)+\mathcal{L}\bigg(e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(x^2+pt)\bigg)=$$

$$=[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-2\varepsilon xk'(x)-2\varepsilon k(x)]e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}\geqslant$$

$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-2\varepsilon Mx\sqrt{x^2+1}-2\varepsilon M(x^2+1)].$$

1) При $|x|\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(w)\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-\varepsilon 8Mx^2]\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[\alpha-\varepsilon 8M]x^2.$$

Возьмём $\alpha>\varepsilon_0 8M$, тогда $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$.

2) При $|x|<1$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(w)\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-\varepsilon 8M]\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[p-8M]\varepsilon.$$

Возьмём $p>8M$, тогда $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$.

Кроме того,

$$w|_{t=0}=u|_{t=0}+\frac{m}{L^2}x^2\geqslant 0,$$

$$w|_{\pm L}=u|_{\pm L}+e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(L^2+pt)\geqslant -m+m=0.$$

Отсюда по принципу максимума в ограниченной области имеем $w\geqslant 0$ в D_L, т.е.

$$u+e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(x^2+pt)\geqslant 0.$$

Устремляя L к $+\infty$, получаем, что $u\geqslant 0$ в $D=\mathbb{R}\times[0,T]$.

Этап 2. Рассмотрим неоднородную задачу Коши

$$\mathcal{L}(R_N)=H(x,t,\varepsilon),\quad R_N(x,0,\varepsilon)=0.$$

Введём функцию $w_1=\pm R_N+M_0t/\varepsilon+m$. Тогда

$$\mathcal{L}(w_1)=\pm H+M_0+q(t)\bigg(\frac{M_0t}{\varepsilon}+m\bigg)\geqslant 0,\quad w|_{t=0}=m\geqslant 0.$$

Из результата этапа 1 следует, что $w_1 \geqslant 0$ в $D = \mathbb{R} \times [0, T]$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, т.е. $\pm R_N + \varepsilon^{-1} M_0 t + m \geqslant 0$. Следовательно, $|R_N| \leqslant \varepsilon^{-1} M_0 t + m \leqslant \varepsilon^{-1} M_1$, $M_1 = \mathrm{const} > 0$.

Запишем остаточный член в виде $R_N = u_N + \varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N| \leqslant |u_N| + \varepsilon M_2$, где $\varepsilon \leqslant M_3$, $M_2, M_3 = \mathrm{const} > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Как показывает сравнение изложенных выше рассуждений с рассуждениями работы [10], задача Коши, у которой перед второй производной стоит вторая степень ε^2 малого параметра (модельное уравнение Шрёдингера), технически оказалась сложнее рассматриваемой в работе задачи.

2. Построение регуляризованной асимптотики решения смешанной задачи 1-го рода для параболического уравнения с “простой” рациональной точкой поворота на полуоси.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t) u = f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$u(0,t) = \psi(t), \tag{17}$$

и пусть для неё выполнены следующие предположения (ниже $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$):

1°) $f(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,T])$, $\psi(t) \in C^\infty([0,T])$, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$;

2°) $p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и существует постоянная $p_0 > 0$ такая, что $p(x) \geqslant p_0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$;

3°) $q(t) = t^{m/n} b(t)$, где $b(t) \in C^\infty([0,T])$ и $b(t) \neq 0$, $\operatorname{Re} b(t) \geqslant 0$ при любом $t \in [0,T]$, а $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь m/n несократима, $m \geqslant 2$;

4°) $\varphi(0) = \psi(0)$;

5°) существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при всех $x \in \mathbb{R}_+$ и любом $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ выполняются неравенства $|\varphi^{(k)}(x)| < C_1$ и $|\psi^{(k)}(x)| < C_2$;

6°) при всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T]$ и любом $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ верно неравенство $|f_x^{(k)}(x,t)| < C$, где $C > 0$ – некоторая постоянная;

7°) при всех $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо неравенство $p(x) < M_2(x^2 + 1)$, где $M_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Для регуляризации задачи (17) введём дополнительную переменную Лиувилля

$$\tau(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}$$

и расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\tau)$, для сужения на τ которой выполняется тождество

$$\widetilde{u}(x,t,\tau) \Big|_{\tau = \varepsilon^{-1/2} \int_0^x (p(s))^{-1/2} \, ds} \equiv u(x,t),$$

где функция $u(x,t)$ является решением задачи (17).

Вычислим производные для расширенной функции $\widetilde{u}(x,t,\tau(x))$:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \widetilde{u}_t, \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = \widetilde{u}_x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon p(x)}} \widetilde{u}_\tau,$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \widetilde{u}_{xx} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon p(x)}} \widetilde{u}_{x\tau} + \frac{1}{\varepsilon p(x)} \widetilde{u}_{\tau\tau} - \frac{p'(x)}{2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{p(x)})^3} \widetilde{u}_\tau.$$

В дальнейшем знак тильды $\sim$ над u будем опускать. Тогда задача (17) примет вид

$$\varepsilon(u_t - u_{\tau\tau}) = -q(t)u + \sqrt{\varepsilon}^3 \left(2\sqrt{p(x)} u_{x\tau} - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} u_\tau \right) + \varepsilon^2 p(x) u_{xx} + f(x,t),$$

$$\begin{gathered} u(x,0,\tau)|_{\tau(x,\varepsilon)} = \varphi(x), \\ u(0,t,0) = \psi(t). \end{gathered} \qquad (18)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по x, а точка – дифференцирование по t.

2.2. Формализм метода регуляризации в случае "простой" рациональной точки поворота. Для решения задачи (18), согласно методу регуляризации, кроме переменной $\tau(x,\varepsilon)$ введём регуляризирующие функции

$$\sigma(t,\varepsilon) = e^{Q_0^t/\varepsilon}, \quad \sigma_i(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t e^{-Q_s^t/\varepsilon} s^{-1+(i+1)/n}\, ds, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad p = m+n-1,$$

где $Q_s^t = \int_s^t q(s_1)\, ds_1$. Дополнительные регуляризирующие функции $\sigma_i(t,\varepsilon)$ учитывают тот факт, что образ оператора $A(t)$, $u(x,t) \mapsto q(t)u(x,t)$, не совпадает со всем пространством $C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, а лежит в его подподпространстве, образованном функциями, обращающимися в нуль с порядком m/n при $t=0$.

Кроме того, параболический пограничный слой вблизи границы $x=0$ для краевой задачи на полуоси порождает дополнительный сингулярный по ε регуляризирующий оператор G, $a(x,t) \mapsto G(a(x,t))$, действующий по правилу

$$G(a(x,t)) = e^{-Q_0^t/\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} a\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2}\, d\xi \equiv e^{-Q_0^t/\varepsilon} F(a(x,t)) \equiv \sigma F(a(x,t)).$$

Ранее в методе регуляризации такой оператор для описания пограничного слоя не встречался. Только с помощью этого оператора удалось адекватно описать параболический пограничный слой вблизи границы $x=0$. Отметим, что хотя указанный сингулярный оператор и каждая из введённых ранее регуляризирующих функций призваны выделять нерегулярную зависимость решения задачи (17) от малого параметра ε, главной в этом подходе остаётся идея метода регуляризации – описание нерегулярной зависимости от ε через спектр предельного оператора в виде функции $e^{-Q_0^t/\varepsilon}$.

Свойства оператора $F(a(x,t))$ описаны в приложении (см. п. 2.5). Оператор $F(\cdot)$ переводит любую гладкую функцию $a(x,t)$ в решение следующей задачи:

$$F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0,$$

$$F(a(x,t))|_{t=0} = 0, \quad F(a(x,t))|_{\tau=0} = a(x,t).$$

Заметим, что точка $\varepsilon=0$ для функции $F(a(x,t))$ после сужения на её $\tau(x,\varepsilon)$ является существенно особой.

Решение задачи (18) будем искать в пространстве E безрезонансных решений. Элементы из E имеют вид

$$u(x,t,\sigma,\sigma_i) = X(x,t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + \sigma F(a(x,t)) + W(x,t),$$

где функции $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$, $a(x,t)$, $W(x,t)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T]) \bigcap C(\mathbb{R} \times$ $\times\, [0,T])$.

Учитывая распределение параметра ε в задаче (18), её решение будем искать в виде ряда по ε:

$$u(x,t,\sigma,\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \left(X_k(x,t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z_k^i(x,t)\sigma_i + W_k(x,t) \right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{(k-1)/2} G(a_{(k-1)/2}(x,t)).$$

Подставив это представление в задачу (18) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях и степенях ε, получим серию итерационных задач относительно функций $X_k(x,t)$, $Z_k^i(x,t,)$, $a_k(x,t)$, $W_k(x,t)$ в виде систем:

$$\dot{X}_k = p(x)X''_{k-1}, \quad \dot{Z}_k^i = p(x)Z_{k-1}^{i''}, \quad i=\overline{0,p-1},$$

$$q(t)W_k = f(x,t)\delta_k^0 - \dot{W}_{k-1} - \sum_{i=0}^{p-1} Z_{k-1}^i t^{-1+(i+1)/n} + p(x)W''_{k-2},$$

$$F_t(a_{(k-1)/2}(x,t)) - F_{\tau\tau}(a_{(k-1)/2}(x,t)) =$$

$$= 2\sqrt{p(x)}F_\tau(a'_{(k-2)/2}(x,t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a_{(k-2)/2}(x,t)) + p(x)F(a''_{(k-3)/2}(x,t)),$$

$$u_k(x,0,\tau)|_{\tau=\tau(x,\varepsilon)} = \varphi(x)\delta_k^0, \quad u_k(0,t,0) = \psi(t)\delta_k^0, \quad k=-1,0,1,\ldots \tag{19}$$

Если $k-1<-1$, $(k-i)/2<-1$, $i=2,3$, то член с этим индексом равен нулю.

Чтобы решить итерационные задачи (19), докажем теоремы 5 и 6 о нормальной разрешимости системы

$$X_t(x,t) = h_1(x,t),$$

$$Z_t^i = h_2^i(x,t), \quad i=\overline{0,p-1},$$

$$F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = F(h_3(x,t)),$$

$$q(t)W = h_4(x,t) \tag{20}$$

в пространстве E. В теоремах 5 и 6 при выполнении разных исходных предположений (случаи 1 и 2) получены необходимые и достаточные условия разрешимости системы (20).

Теорема 5 (разрешимость, случай 1). *Пусть у системы (20) функции* $h_1(x,t)$, $h_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, *и* $h_3(x,t)$ *принадлежат классу* $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$, *а функция* $h_4(x,t)$ *принадлежит классу* $C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Тогда система (20) разрешима в пространстве E, *если и только если имеют место тождества* $h_3(x,t)\equiv 0$ *и*

$$\frac{\partial^k h_4(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \text{при всех} \quad k=\overline{0,[m/n]}. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Решения первых двух уравнений системы (20) запишутся в виде

$$X(x,t) = \int_0^t h_1(x,s)\,ds + X(x,0),$$

$$Z^i(x,t) = \int_0^t h_2^i(x,s)\,ds + Z^i(x,0), \quad i=\overline{0,p-1}.$$

Так как $TF(a(x,t)) = F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) \equiv 0$ для любой гладкой функции $a(x,t)$, то

$$F(h_3(x,t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} h_3\biggl(x, t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\biggr)e^{-\xi^2}\,ds \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad \tau\in\mathbb{R}_+. \tag{22}$$

Положив $\tau=0$, по свойству оператора F получим, что $h_3(x,t)\equiv 0$.

Рассмотрим последнее уравнение

$$q(t)W(x,t) = h_4(x,t) \tag{23}$$

системы (20). Разложим функцию $h_4(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$:

$$h_4(x,t) = h_4(x,0) + t\frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t),$$

где $\overline{h}_4(x,0) \neq 0$. Тогда уравнение (23) принимает вид

$$q(t)W(x,t) = h_4(x,0) + t\frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t).$$

Так как оно имеет решение, то необходимо

$$h_4(x,0) = 0, \quad \frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-\{m/n\}}\frac{\overline{h}_4(x,t)}{b(t)},$$

здесь $\overline{h}_4(x,t)/b(t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Достаточность. Пусть выполнены тождества из заключения теоремы.

В силу первого из них уравнение $F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0$ имеет решение при любой гладкой функции $a(x,t)$ вследствие свойств оператора $F(\cdot)$.

Уравнение $q(t)W(x,t) = h_4(x,t)$ в силу тождеств (21) принимает вид

$$q(t)W(x,t) = t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t).$$

Отсюда $W(x,t) = t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_4(x,t)/b(t)$.

Решение системы (20) в пространстве E запишется в виде

$$u(x,t) = \biggl(\int_0^t h_1(x,s)\,ds + X(x,0)\biggr)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1}\biggl(\int_0^t h_2^i(x,s)\,ds + Z^i(x,0)\biggr)\sigma_i +$$

$$+ G(a(x,t)) + t^{1-\{m/n\}}h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t) = \overline{h}_4(x,t)/b(t)$, а $a(x,t)$ – произвольная гладкая функция. Теорема доказана.

Теорема 6 (разрешимость, случай 2). *Пусть у системы (20) функции* $h_1(x,t)$, $h_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, *и* $h_3(x,t)$ *принадлежат классу* $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$ *и выполняется равенство* $h_4(x,t) = t^{-s/n}f(x,t)$, *где* $f(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, $1\leqslant s\leqslant n-1$.

Тогда система (20) разрешима в пространстве E, *если и только если имеют место тождества* $h_3(x,t)\equiv 0$ *и*

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]}, \quad \textit{если} \quad 0\leqslant \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\}\leqslant 1,$$

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]+1}, \quad \textit{если} \quad \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} > 1.$$

Доказательство. Необходимость. Решения первых двух уравнений системы (20) запишутся в виде

$$X(x,t)=\int\limits_0^t h_1(x,s)\,ds+X(x,0),$$

$$Z^i(x,t)=\int\limits_0^t h_2^i(x,s)\,ds+Z^i(x,0),\quad i=\overline{0,p-1}.$$

По той же причине, что и в доказательстве теоремы 5, имеет место тождество (22). Положив в нём $\tau=0$, по свойству оператора F получим $h_3(x,t)\equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (23). При решении этого уравнения могут представиться только две возможности: а) и б).

а) Выполняется двойное неравенство $0<s/n+\{m/n\}\leqslant 1$. Тогда возьмём $k=[m/n]$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$. Получим

$$t^{m/n}b(t)W(x,t)=t^{-s/n}\bigg(f(x,0)+t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}}+t^{[m/n]+1}\overline{f}(x,t)\bigg),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{b(t)},$$

где $\overline{f}(x,t)/b(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

б) Выполняется неравенство $s/n+\{m/n\}>1$. Тогда возьмём $k=[m/n]+1$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$. Получим

$$t^{m/n}b(t)W(x,t)=t^{-s/n}\bigg(f(x,0)+t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{t^{[m/n]+1}}{([m/n]+1)!}\frac{\partial^{[m/n]+1}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]+1}}+t^{[m/n]+2}\overline{f}(x,t)\bigg),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{b(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/b(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Достаточность. Решение системы (20) в пространстве E запишется в виде

$$u(x,t)=\bigg(\int\limits_0^t h_1(x,s)\,ds+X(x,0)\bigg)\sigma+\sum_{i=0}^{p-1}\bigg(\int\limits_0^t h_2^i(x,s)\,ds+Z^i(x,0)\bigg)\sigma_i+$$

$$+G(a(x,t))+t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)=\overline{h}_4(x,t)/b(t)$, а $a(x,t)$ – произвольная гладкая функция. Теорема доказана.

Согласно приведённому выше замечанию представления для функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) можно записать одной формулой, если воспользоваться приведённым там выражением для их первого сомножителя.

Теорема 7 (единственность). *Пусть выполнены условия теоремы 5 или теоремы 6. Тогда задача*

$$X_t(x,t)=0,$$

$$Z_t^i(x,t)=0,\quad i=\overline{0,p-1},$$

$$TF(a(x,t)) \equiv F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0,$$
$$q(t)W(x,t) = 0,$$
$$u(x,0,\tau)|_{\tau=\tau(x,\varepsilon)} = 0, \quad u(0,t,0) = 0 \tag{24}$$

имеет только нулевое решение, если выполнены условия

$$2\sqrt{p(x)}F_\tau(a_x(x,t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a(x,t)) = 0 \quad \text{и} \quad Z^i(0,t) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Доказательство. Согласно теоремам 5 или 6 решение задачи (24) имеет вид

$$u(x,t) = X(x)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x)\sigma_i + G(a(x,t)).$$

Подчиним его краевому и начальному условиям, предварительно произведя сужение на регуляризирующие функции

$$u(x,0) = X(x) \equiv 0,$$
$$u(0,t,0) = \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\sigma_i(t,\varepsilon) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}a(0,t) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$a(0,t) = -\sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\int_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds. \tag{25}$$

Используя представление оператора $F(\cdot)$ из условия теоремы, получаем уравнение относительно функции $a(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left[2\sqrt{p(x)}a_x\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)\right]e^{-\xi^2}\,d\xi = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left[2\sqrt{p(x)}a_x\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)\right]e^{-\xi^2}\,d\xi = C(x,t)$$

для любых τ. Устремив τ к ∞, видим, что $C(x,t) \equiv 0$. Положив $\tau = 0$, получим уравнение

$$2\sqrt{p(x)}a_x(x,t) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a(x,t) = 0,$$

из которого найдём

$$a(x,t) = a(0,t)\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}.$$

Учитывая равенство (25), будем иметь

$$a(x,t) = -\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\int_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

Так как $Z^i(0) = 0$, $i = \overline{0, p-1}$, то $a(0,t) = 0$, а значит, $a(x,t) \equiv 0$. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

2.3. Решение итерационных задач. Используя теоремы 5–7, решим итерационные задачи (19). Напомним, что функции $X(x,t,\varepsilon)$, $Z^i(x,t,\varepsilon)$, $W(x,t,\varepsilon)$ разлагаются по целым степеням ε^k, а $a(x,t,\varepsilon)$ – по степеням $(\sqrt{\varepsilon})^k$. Так как функция $f(x,t)$ не удовлетворяет теореме о точечной разрешимости уравнения $q(t)W(x,t) = f(x,t)$, то разложение решения начинается с ε^{-1}.

Система (19) в этом случае принимает вид

$$(\varepsilon^{-1}): \quad \begin{cases} \dot{X}_{-1} = 0, \quad \dot{Z}^i_{-1} = 0, \quad i = \overline{0, p-1}, \\ q(t)W_{-1} = 0, \\ \dot{F}(a_{-1}(x,t)) - F_{\tau\tau}(a_{-1}(x,t)) = 0, \\ u_{-1}(x,0,\tau) = 0, \quad u_{-1}(0,t,0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $X_{-1}(x,t) = X_{-1}(x)$, $W_{-1}(x,t) \equiv 0$, $Z^i_{-1}(x,t) = Z^i_{-1}(x)$, $a_{-1}(x,t)$ – произвольные функции.

В силу начальных и краевых условий находим

$$u_{-1}(x,0,\tau) \equiv X_{-1}(x) \equiv 0,$$

$$u_{-1}(0,t,0) = \sum_{i=0}^{p-1} Z^i_{-1}(0)\sigma_i(t,\varepsilon) + e^{-Q_0^t/\varepsilon} a_{-1}(0,t) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_{-1}(0,t) = -\sum_{i=0}^{p-1} Z^i_{-1}(0) \int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon} s^{-1+(i+1)/n}\, ds.$$

Чтобы определить неизвестные функции $Z^i_{-1}(x)$ и $a_{-1}(x,t)$, рассмотрим следующую итерационную задачу на шаге $k = -1/2$.

Система (19) в этом случае имеет вид

$$(\sqrt{\varepsilon}^{-1}): \quad T(F(a_{-1/2}(x,t))) = 2\sqrt{p(x)} F_\tau(a'_{-1}(x,t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} F_\tau(a_{-1}(x,t)),$$

где $T = \partial/\partial t - \partial^2/\partial\tau^2$. Отсюда, так как $T(F(a_{-1/2}(x,t))) \equiv 0$, получаем уравнение относительно $a_{-1}(x,t)$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\tau} F\bigg(2\sqrt{p(x)} a'_{-1}(x,t) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} a_{-1}(x,t)\bigg) = 0,$$

а значит,

$$F\bigg(2\sqrt{p(x)} a'_{-1}(x,t) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} a_{-1}(x,t)\bigg) = C(x,t),$$

где $C(x,t)$ – произвольная функция.

Из свойств оператора $F(\cdot)$ следует, что $F(\cdot) \to 0$ при $\tau \to \infty$. Поэтому $C(x,t) \equiv 0$. Положив $\tau = 0$, получим уравнение

$$2\sqrt{p(x)} a'_{-1}(x,t) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} a_{-1}(x,t) = 0,$$

из которого найдём, что

$$a_{-1}(x,t) = \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\, a_{-1}(0,t).$$

Таким образом,

$$a_{-1}(x,t) = -\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(0)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

Функция $a_{-1/2}(x,t)$ на данном итерационном шаге произвольная. Для определения $Z_{-1}^i(0)$ рассмотрим систему (19) на нулевом шаге (ε^0). В этом случае система (19) имеет вид

$$(\varepsilon^0):\quad \begin{cases} \dot X_0 = 0, \quad \dot Z_0^i = p(x)(Z_{-1}^i)'', \quad i=\overline{0,p-1}, \\ q(t)W_0 = f(x,t) - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(x)t^{-1+(i+1)/n}, \\ T(F(a_0(x,t))) = F_\tau\Big(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}(x,t) - \dfrac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}(x,t)\Big) + \\ +\, p(x)F(a''_{-1}(x,t)), \\ u_0(x,0,\tau) = X_0(x) + W_0(x,0) = \varphi(x), \\ u_0(0,t,0) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}X_0(0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(0,t)\sigma_i(t,\varepsilon) + \\ +\, W_0(0,t) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(0,t) = \psi(t). \end{cases} \tag{26}$$

Подчиним правую часть уравнения для $W_0(x,t)$ условиям теоремы о точечной разрешимости. Для этого разложим функцию $f(x,t)$ из его правой части по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$:

$$q(t)W_0(x,t) = f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} +$$

$$+\, t^{[m/n]+1}f_0(x,t) - \sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(x)t^{-1+(i+1)/n},$$

где $f_0(x,0)\ne 0$. Положим

$$Z_{-1}^i(x) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}, \quad \text{если} \quad i = n(j+1)-1, \quad j=\overline{0,[m/n]};$$

$$Z_{-1}^i(x)\equiv 0, \quad \text{если} \quad i\ne n(j+1)-1, \quad i=\overline{0,p-1}.$$

Тогда

$$W_0(x,t) = \frac{1}{q(t)}\bigg(f(x,t) - \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}t^j\bigg) = t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

После определения функций $Z_{-1}^i(x)$ решение $u_{-1}(x,t,\tau)$ находится на “-1”-м итерационном шаге и после сужения имеет вид

$$u_{-1}(x,t) = \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) + G(a_{-1}(x,t)),$$

или

$$u_{-1}(x,t) = \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\bigg[\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) - \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F\bigg(\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{n(j+1)-1}\,ds\bigg)\frac{\partial^j f(0,0)}{\partial t^j}\bigg].$$

Используя свойство оператора $F(\cdot)$, представим решение $u_{-1}(x,t)$ в виде

$$u_{-1}(x,t)=\sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}-\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\frac{\partial^j f(0,0)}{\partial t^j}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)\right]\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)+\underline{O}(\varepsilon^\infty),$$

где $\underline{O}(\varepsilon^\infty)$ – асимптотический нуль (функция, которая при $\varepsilon\to+0$ убывает быстрее, чем любая натуральная степень ε).

Решения уравнений системы (26) имеют вид

$$X_0(x,t)=X_0(x),$$

$$Z_0^i(x,t)=p(x)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t+Z_0^i(x,0),\quad i=n(j+1)-1,\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$Z_0^i(x,t)=Z_0^i(x),\quad i\neq n(j+1)-1,\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$W_0(x,t)=t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Функции $Z_0^i(x,0)$, $i=n(j+1)-1$, $j=\overline{0,[m/n]}$, на данный момент не известны.

Решим уравнение относительно $a_{-1/2}(x,t)$. Так как $T(F(a_0(x,t)))\equiv 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}\right)\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi=$$

$$=-p(x)\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}a''_{-1}\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}\right)\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi=$$

$$=2\sqrt{t}p(x)\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\xi^2}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\xi}a''_{-1}\left(x,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi.$$

Положив $\tau=0$, получим уравнение

$$2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}(x,t)-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}(x,t)=2\sqrt{t}p(x)\int\limits_0^{\infty}e^{-\xi^2}\int\limits_0^{\xi}a''_{-1}\left(x,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi,$$

решение которого имеет вид

$$a_{-1/2}(x,t)=\sqrt{t}\sqrt[4]{p(x)}\int\limits_0^{x}\sqrt[4]{p(s_1)}^3\int\limits_0^{\infty}e^{-\xi^2}\int\limits_0^{\xi}a''_{-1}\left(s_1,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi\,ds_1,$$

так как $G(a_{-1/2}(x,t))\Big|_{\substack{\tau=0\\x=0}}=e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(0,t)=0.$

Из начальных условий для $u_0(x,t,\tau)$ вытекают равенства

$$u_0(x,0,\tau)=X_0(x)=\varphi(x).$$

Таким образом, на шаге $k=0$ функция $u_{-1/2}(x,t,\tau)$ определена. С учётом свойств оператора $F(\cdot)$ решение $u_{-1/2}(x,t,\tau)$ после сужения может быть представлено в виде

$$u_{-1/2}(x,t,\tau(x,\varepsilon))=e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_{-1/2}(x,t))=e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)+\underline{O}(\varepsilon^\infty).$$

Функция $a_0(x,t)$ на данном итерационном шаге произвольная.

Для определения функций $Z_0^i(x,t)$ необходимо рассмотреть систему на итерационном шаге "$k=1$", а для определения функций $a_0(x,t)$ – систему на шаге "$k=1/2$".

На нулевом итерационном шаге решение $u_0(x,t,\tau)$ после сужения имеет вид

$$u_0(x,t,\tau(x,\varepsilon))=e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x)+\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(x,t)\sigma_i(t,\varepsilon)+G(a_0(x,t))+t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Подчиним $u_0(x,t,\tau)$ краевому условию

$$u_0(0,t,0)=e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(0)+\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(0,t)\sigma_i(t,\varepsilon)+t^{1-\{m/n\}}f_0(0,t)+e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(0,t)=\psi(t).$$

Отсюда следует, что

$$a_0(0,t)=e^{Q_0^t/\varepsilon}(\psi(t)-t^{1-\{m/n\}}f_0(0,t))-\varphi(0)-\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(0,t)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

На шаге "$k=1/2$", так как $T(F(a_{1/2}(x,t)))\equiv 0,$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a_0'-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_0\right)\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi+p(x)\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}a''_{-1/2}\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi=0,$$

решение которого имеет вид

$$a_0(x,t)=\sqrt{t}\sqrt[4]{p(x)}\int\limits_0^x\sqrt[4]{p(s_1)}\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\int\limits_0^\xi a''_{-1/2}\left(s_1,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi\,ds_1+\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}a_0(0,t).$$

Чтобы найти функции $Z_0^i(x,t),$ рассмотрим уравнение для $W_1(x,t)$ на шаге "$k=1$":

$$q(t)W_1(x,t)=-t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t)-\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n},\tag{27}$$

где $\overline{f}_0(x,t)$ определяется из соотношения

$$\frac{\partial(t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t))}{\partial t}=t^{-\{m/n\}}f_0(x,t)+t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial f_0(x,t)}{\partial t}=t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t).$$

Регуляризируем правую часть уравнения (27). Для этого разложим функцию $\overline{f}_0(x,t)$ в точке $t=0$ по формуле Маклорена до порядка $k.$ Значение k зависит от того, какое из неравенств выполняется: $2\{m/n\} \leqslant 1$ или $2\{m/n\} > 1$. Величину k можно выразить одной формулой $k = [m/n + \{m/n\}] = [[m/n] + 2\{m/n\}]$. Тогда уравнение примет вид

$$q(t)W_1(x,t) = -t^{-\{m/n\}}\left(\overline{f}_0(x,0) + t\frac{\partial\overline{f}_0(x,0)}{\partial t} + \dots + \frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^k} + t^{k+1}f_1(x,t)\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n}.$$

Положим

$$Z_0^i(x,0) = -\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}, \quad i = n(j+1) - 1 - n\{m/n\}, \quad j = \overline{1, [m/n + \{m/n\}]};$$

$$Z_0^i(x,0) = 0, \quad i \neq n(j+1) - 1 - n\{m/n\}, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Поэтому

$$W_1(x,t) = -\frac{1}{q(t)}\left(t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t) + \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n}\right) = t^{\{1-\{2\{m/n\}\}\}}\overline{f}_1(x,t).$$

Таким образом, окончательно найдены слагаемые для решения на нулевом итерационном шаге:

$$Z_0^i(x,t) = p(x)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t, \quad i = (j+1)n - 1, \quad j = \overline{0, [m/n]};$$

$$Z_0^i(x) = -\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}, \quad i = n(j+1) - 1 - n\{m/n\}, \quad j = \overline{1, [m/n + \{m/n\}]};$$

$$Z_0^i(x) = 0 \quad \text{в остальных случаях.}$$

На этом шаге итерации после ограничения решения на $\tau(x,\varepsilon)$ получаем главный член регуляризованной асимптотики решения краевой задачи на полуоси для параболического уравнения

$$u_{\text{гл}} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]}\left[\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F\left(\int_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{n(j+1)-1}\,ds\right)\frac{\partial^j f_{xx}(0,0)}{\partial t^j}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_{-1/2}(x,t)) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\left(p(x)\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t\right)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) -$$

$$-\sum_{j=0}^{[m/n+\{m/n\}]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1-n\{m/n\}}(t,\varepsilon) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_0(x,t)) + t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Используя свойства оператора $F(\cdot)$ (см. лемму 3), главный член $u_{\text{гл}}$ регуляризованной асимптотики представим в виде

$$u_{\text{гл}} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]}\left[\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j} - \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\frac{\partial^j f_{xx}(0,0)}{\partial t^j}\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)\right)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)\right] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)+e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\left(p(x)\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t\right)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)-\sum_{j=0}^{[m/n+\{m/n\}]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1-n\{m/n\}}(t,\varepsilon)+$$

$$+e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)+t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t)+\underline{O}(\varepsilon^\infty).$$

Здесь

$$\operatorname{erfc}(\tau(x,\varepsilon)/(2\sqrt{t}))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\tau(x,\varepsilon)/(2\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

По данной схеме можно определить любой член асимптотического регуляризованного ряда.

2.4. Оценка остаточного члена. Пусть

$$u(x,t,\varepsilon)=e^{-Q_0^t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^kX_k(x,t)+\sum_{i=0}^{p-1}\sigma_i(t,\varepsilon)\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^kZ_k^i(x,t)+$$

$$+\sum_{k=-1}^{2N+1}\sqrt{\varepsilon}^{k-1}G(a_{(k-1)/2}(x,t))+\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^kW_k(x,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon). \tag{28}$$

Подставив представление (28) в задачу (18), получим задачу для остаточного члена:

$$\varepsilon\frac{\partial R_n(x,t)}{\partial t}-\varepsilon^2p(x)\frac{\partial^2R_N(x,t)}{\partial x^2}+q(t)R_N=H(x,t,\varepsilon),$$

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\quad R_N(0,t,\varepsilon)=0, \tag{29}$$

здесь $H(x,t,\varepsilon)=-H_1(x,t)+\varepsilon H_2(x,t,\varepsilon)$, где

$$H_1(x,t,\varepsilon)=\dot W_N-p(x)W''_{N-1}+\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_N^i=-q(t)W_{N+1}(x,t),$$

$$H_2(x,t,\varepsilon)=e^{-Q_0^t/\varepsilon}p(x)X''_N+p(x)\sum_{i=0}^{p-1}Z_N^{i\,\prime\prime}\sigma_i(t,\varepsilon)+p(x)W''_N+p(x)G(a''_N).$$

В силу оценок сингулярных интегралов и условий задачи (17) для правой части уравнения (29) имеет место оценка

$$|H(x,t,\varepsilon)|=|-H_2(x,t)+\varepsilon H_1(x,t,\varepsilon)|<C=\mathrm{const}.$$

Оценка остатка основана на принципе максимума для параболических задач [11]. Этот принцип используется в той форме общности, которой нам будет достаточно для оценки остаточного члена. Классическое решение задачи (29) – это функция $R_N(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $Q_T=\mathbb{R}_+\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные производные $\partial R_N/\partial t$, $\partial R_N/\partial x$, $\partial^2R_n/\partial x^2$ во внутренних точках Q_T и удовлетворяющая уравнению (29) всюду в Q_T и при $t=0$ начальным условиям в $\mathbb{R}_+\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорема 8. *Пусть для задачи (29) выполнены предположения 1°)–3°) и 7°) задачи (17), тождество $R_N(x,0,\varepsilon)=0$ и неравенство $|H(x,t,\varepsilon)|<C$ с некоторой постоянной C.*

Тогда существует постоянная M такая, что $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant M$ при всех $(x,t,\varepsilon)\in\mathbb{R}_+\times\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$.

Доказательство проведём в два этапа.

Этап 1. Пусть для функции $u(x,t,\varepsilon)$ в области $D_L = [0,L]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$ выполнены неравенства

$$\mathcal{L}(u) \equiv \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(t)u \geqslant 0,$$
$$u(0,t,\varepsilon)\geqslant 0, \quad u(x,0,\varepsilon)\geqslant 0,$$
$$u(x,t,\varepsilon) > -\mu(x^r+1), \quad \mu>0.$$

Рассмотрим функцию $w = u + e^{\alpha t/\varepsilon}2\mu L^{r-2\beta}(x^2+kt)^\beta$, $2\beta > r$. Тогда

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(u) + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta) = \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta).$$

Вычислим и оценим $\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta)$. Имеем

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta) = e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-2}[(\alpha+q(t))(x^2+kt)^2 +$$
$$+\varepsilon\beta k(x^2+kt) - \varepsilon^2 p(x)(2\beta(x^2+kt)+4x^2\beta(\beta-1))] \geqslant$$
$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-2}[(\alpha+q(t))(x^2+kt)^2 + \varepsilon\beta k(x^2+kt) -$$
$$-\varepsilon^2 M_2(x^2+1)(2\beta(x^2+kt)+4x^2\beta(\beta-1))] \geqslant$$
$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt) + \varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)],$$

где M_2 – постоянная из предположения $7^\circ)$ в постановке задачи (17).

i) При $|x|\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(w) \geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt)+\varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta}[\alpha - \varepsilon^2 8M_2\beta^2] \geqslant 0,$$

если $\alpha > \varepsilon_0^2 8M_2\beta^2$.

ii) При $0<|x|<1$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(w) \geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt)+\varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}(\varepsilon\beta k - 8\varepsilon^2 M_2\beta^2) \geqslant 0,$$

если $k > \varepsilon_0 8M_2\beta$.

Оценим функцию $w(x,t,\varepsilon)$ на границе области D_L:

$$w(x,0,\varepsilon) = 2\mu\frac{x^{2\beta}}{L^{2\beta-r}} \geqslant 0,$$

$$w(0,t,\varepsilon) = \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(kt)^\beta \geqslant 0,$$

$$w(L,t,\varepsilon) = u + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(L^2+kt)^\beta \geqslant -\mu(L^r+1) + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(L^2+kt)^\beta \geqslant$$
$$\geqslant -\mu(L^r+1) + 2\mu L^r = \mu(L^r-1) \geqslant 0.$$

Следовательно, если $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$, то $w\geqslant 0$ в D_L. Другими словами,

$$w = u + e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}(x^2+kt)^\beta \geqslant 0.$$

Устремляя L к бесконечности, получаем, что $u\geqslant 0$ для всех $x\in\mathbb{R}_+$.

Этап 2. Рассмотрим функцию $u = \pm R_N + Ct/\varepsilon$:

$$\mathcal{L}(u) = \pm H + C + \frac{q(t)Ct}{\varepsilon} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем $u = \pm R_N + Ct/\varepsilon \geqslant 0$, а значит,

$$|R_N| \leqslant \frac{Ct}{\varepsilon}.$$

Запишем остаток в виде $R_N = u_{N+1} + \varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N| \leqslant |u_{N+1}| + \varepsilon Ct/\varepsilon \leqslant M$. Следовательно,

$$\left|u - \sum_{k=-1}^{N} u_k\right| \leqslant \varepsilon^{N+1} M.$$

Теорема доказана.

2.5. Приложение.

Лемма 1. *Для всех* $z > 0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi < \sqrt{2} e^{-z^2/2}.$$

Действительно,

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2/2-\xi^2/2}\, d\xi \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2} \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2/2}\, d\xi \leqslant e^{-z^2/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-s^2/2}\, ds = \sqrt{2} e^{-z^2/2}.$$

Лемма 2. *Для любой функции* $\psi(t) \in C[0,T]$ *верна оценка*

$$|F(\psi(t))| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left|\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right)\right| e^{-\xi^2}\, d\xi \leqslant M,$$

где $M = \|\psi\|_C$.

Если $x/(2\varepsilon\sqrt{t}) \leqslant \xi < +\infty$, то $t - x^2/(4\varepsilon^2\xi^2) \in [0,t] \subseteq [0,T]$. Так как функция $\psi(t)$ непрерывна по условию, то $|\psi(t)| \leqslant M = \|\psi\|_C$ при всех $t \in [0,T]$. Поэтому

$$|F(\psi(t))| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left|\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right)\right| e^{-\xi^2}\, d\xi \leqslant M \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = M.$$

Лемма 3. *Для любой функции* $\psi(t) \in C[0,T]$ *верна оценка*

$$F(\psi(t)) = \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi + \underline{O}(\varepsilon^\infty)$$

при $\varepsilon \to 0$ *для всех* $x \in [\delta, +\infty)$, *где* $\delta > 0$.

Примем во внимание результаты лемм 1 и 2 и представление

$$F(\psi(t)) = \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left(\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right) - \psi(t)\right) e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Оценим модуль второго слагаемого в правой части этого равенства:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\bigg|\int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^{\infty}\bigg(\psi\Big(t-\frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\Big)-\psi(t)\bigg)e^{-\xi^2}\,d\xi\bigg|\leqslant 2M\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\xi^2/2}\,d\xi\leqslant 2\sqrt{2}Me^{-x^2/(8\varepsilon^2t)},$$

где $M=\|\psi\|_C$. Отсюда при $\varepsilon\to 0$ следует нужная оценка для всех $x\in[\delta,+\infty)$, где $\delta>0$.

Лемма 4. *Пусть оператор* $A(t)$ *имеет собственное значение* $\lambda(t)=t^ra(t)$, $\operatorname{Re}a(t)<0$. *Тогда имеют место оценки*

$$\sigma_k(t,\varepsilon)=\underline{O}(\varepsilon)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad t\in[\delta,T],\quad\delta>0.$$

Так как $\operatorname{Re}a(t)<0$, то найдётся $\alpha>0$ такое, что $\operatorname{Re}a(t)\leqslant-\alpha<0$. Поэтому

$$\bigg|\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\lambda(s_1)\,ds_1\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds\bigg|\leqslant\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\alpha s_1^r\,ds_1\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1}-s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^{t/\varepsilon^{1/(r+1)}}\exp\bigg(\frac{\alpha(\xi^{r+1})}{r+1}\bigg)\xi^{-1+(i+1)/n}\,d\xi.$$

Для асимптотической оценки получившегося выражения обозначим $\tau=t/\varepsilon^{1/(r+1)}$, и пусть $\tau\to\infty$. Для двух последних сомножителей оцениваемого выражения имеем

$$\exp\bigg(-\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^\tau\exp\bigg(\frac{\alpha(\xi^{r+1})}{r+1}\bigg)\xi^{-1+(i+1)/n}\,d\xi\sim$$

$$\sim\frac{1}{\alpha\tau^r}\exp\bigg(-\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\exp\bigg(\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\tau^{-1+(i+1)/n}=\frac{\tau^{-1+(i+1)/n}}{\alpha\tau^r}=\frac{1}{\alpha\tau^{(p-i)/n}}=\frac{\varepsilon^{(p-i)/(n(r+1))}}{\alpha t^{(p-i)/n}}.$$

Учитывая первый сомножитель $\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}$, получаем $\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}\varepsilon^{(p-i)/(n(r+1))}=\varepsilon$.

Отсюда следует, что

$$\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=O(\varepsilon)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad t\in[\delta,T],\quad\delta>0.$$

Теоремы 1 и 2 получены Ратниковой Т.А. в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. 1948. Т. 22 (64). № 2. С. 193–204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
3. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
5. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
6. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities // J. of Math. Sci. 2004. V. 121. № 1. P. 1973–2079.
7. *Елисеев А.Г., Ломов С.А.* Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. 1986. Т. 131. № 4. С. 544–557.
8. *Елисеев А.Г.* Теория сингулярных возмущений в случае негладкого спектра предельного оператора // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 7. С. 25–40.
9. *Елисеев А.Г.* Об аналитических решениях по параметру сингулярно возмущенного уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора // Вестн. Моск. энерг. ин-та. 1995. № 6. С. 41–47.
10. *Ratnikova T.* Singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation with a rational “simple” turning point // Axioms. 2020. V. 9. № 4. Art. 138.
11. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–116.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.