ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 346–360

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956:533.2

О СВОЙСТВАХ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ С ОБЩЕЙ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

© 2022 г. А. А. Злотник, А. С. Федченко

Изучается квазигидродинамическая система уравнений гомогенной (с общими скоростью и температурой) многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций с общей регуляризующей скоростью. Для неё выводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии компонент смеси. В отсутствие потоков диффузии новым способом строится линеаризованная на постоянном решении система уравнений, выполняется её приведение к симметричному виду и доказывается L^2-диссипативность её решений, а также устанавливается вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной системы. Фактически изучаемая система имеет составной тип. Полученные свойства математически строго отражают её физическую корректность и диссипативный характер квазигидродинамической регуляризации.

DOI: 10.31857/S0374064122030050, **EDN:** BXWSAS

Введение. Уравнения движения многокомпонентных смесей газов (или жидкостей) представляют большой теоретический и прикладной интерес (см., в частности, [1–4]). В однокомпонентном случае давно используются квазигазодинамическая (КГД) и более простая квазигидродинамическая (КГидД) системы уравнений как регуляризованные системы уравнений Эйлера и Навье–Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа [5–7]. Для них справедливо уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Дополнительными важными математическими свойствами этих систем являются их равномерная по Петровскому параболичность и устойчивость решений линеаризованных систем, доказанные в [8–11].

Обобщения КГД и КГидД систем на случай бинарных смесей газов с различными плотностями, скоростями и температурами в отсутствие потоков диффузии и химических реакций даны в [6, 12]. Недавно построены соответствующие обобщения на практически важный случай гомогенных (с общими скоростью и температурой) смесей с одной общей или несколькими регуляризующими скоростями, в том числе с учётом межфазного взаимодействия между собой компонент смеси [13, 14]. Применение разностных методов, основанных на КГидД и КГД системах для бинарных смесей с общей регуляризующей скоростью, хорошо зарекомендовало себя в ряде задач компьютерного моделирования (см. в том числе [14–18]).

В данной работе изучается КГидД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью при наличии потоков диффузии заданного типа и в отсутствие химических реакций. Для неё выводится уравнение баланса суммарной энтропии с неотрицательным производством энтропии (для КГидД систем при наличии потоков диффузии это реализуется впервые). В случае бинарной (двухкомпонентной) смеси потоки диффузии эквивалентны указанным в [1, гл. VI], но записаны изначально несколько иначе и полностью; вывод уравнения баланса энтропии также реализован более наглядно и подробно. Кроме того, новая форма записи потоков диффузии позволила дать обобщение на многокомпонентный случай.

В отсутствие потоков диффузии сначала указывается на то, что можно записать замкнутую систему уравнений относительно суммарных плотности, газовой "постоянной" и удельной теплоёмкости при постоянном объёме (для смесей две последние величины являются функциями), а также общих скорости и температуре. Это может быть полезно как при анализе свойств КГидД системы, так и при построении методов её численного решения.

Затем, и это главное, выводится линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений, выполняется её приведение к симметричному виду и доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей задачи Коши и их оценки. Строится также упрощённая симметричная система уравнений для меньшего количества искомых функций с лучшими свойствами и для неё доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей начально-краевой задачи и их оценки. Устанавливается также вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной КГидД системы. Оба свойства тесно связаны и анализируются иным более компактным образом, чем это сделано в [8–10]. В этом анализе существенную роль играет использование редуцированной КГидД системы, уравнения которой разложены с точностью до квадрата модуля градиента решения, и новый способ нормировки плотностей компонент. Оба свойства строго математически выражают физическую диссипативность КГидД регуляризации, играющую принципиальную роль в успехе её применения.

Указанное вырождение свойства параболичности связано именно с использованием общей регуляризующей скорости (точнее, суммарного давления) в уравнениях баланса плотности компонент смеси. Более того, показывается, что фактически КГидД система уравнений в отсутствие потоков диффузии, подобно системе уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа, имеет составной тип (а не параболический тип, как в однокомпонентном случае). Это обстоятельство существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент в начально-краевых задачах, а также для выбора способа дискретизации уравнений баланса плотности компонент смеси.

1. Квазигидродинамическая система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью и её следствия. Квазигидродинамическая система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью состоит из уравнений баланса массы компоненты, суммарного импульса и суммарной полной энергии:

$$\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}\left[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) \bigotimes \mathbf{u}\right] + \nabla p = \operatorname{div}\Pi + \rho\mathbf{f}, \tag{2}$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}\left[(E+p)(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\right] = \operatorname{div}\left(-\mathbf{q} + \Pi\mathbf{u}\right) + \rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\mathbf{f} + Q. \tag{3}$$

Здесь основные искомые функции $\rho_\alpha > 0$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\theta > 0$ – соответственно плотность компоненты α, общие скорость и абсолютная температура смеси; число компонент $K \geqslant 2$. Можно считать, что они зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$, и $t \geqslant 0$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t := \partial/\partial t$, $\partial_i := \partial/\partial x_i$. Символы $\bigotimes$ и $\cdot$ обозначают соответственно тензорное и скалярное произведения векторов, а дивергенция тензора берётся по его первому индексу.

Компоненты смеси предполагаются совершенными политропными газами с уравнениями состояния $p_\alpha = R_\alpha\rho_\alpha\theta$ и $\varepsilon_\alpha = c_{V\alpha}\theta$, где p_α и ε_α – давление и удельная внутренняя энергия компоненты α, с постоянными $R_\alpha > 0$ и $c_{V\alpha} > 0$, $\alpha = \overline{1,K}$. Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются соответственно формулами

$$\rho = \langle\rho_\alpha\rangle := \sum_{\alpha=1}^{K}\rho_\alpha, \quad p = \langle p_\alpha\rangle = R\rho\theta, \quad \varepsilon = \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}\varepsilon_\alpha\right\rangle = c_V\theta, \quad E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon \tag{4}$$

с коэффициентами

$$R := \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}R_\alpha\right\rangle, \quad c_V := \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}c_{V\alpha}\right\rangle. \tag{5}$$

Здесь введена часто используемая в дальнейшем операция $\langle\,\cdot\,\rangle$ суммирования по индексу $\alpha = \overline{1,K}$. Вторая из формул (4) – это закон Дальтона для смесей. Подчеркнём, что R и c_V являются функциями, а не постоянными, в отличие от однокомпонентного случая $(K = 1)$. Отметим, что здесь функции $C_\alpha := \rho_\alpha/\rho$ – массовые концентрации компонент смеси, которые будут возникать и ниже.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^{\tau}$, а поток тепла – вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d$. При этом тензор вязкости Навье–Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}\right] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}, \quad -\mathbf{q}^F = \varkappa\nabla\theta,$$

где $\nabla\mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор порядка n, а $\mu > 0$, $\lambda \geqslant 0$ – коэффициенты динамической и объёмной вязкости, $\varkappa > 0$ – коэффициент теплопроводности (которые могут зависеть от искомых функций). Общая регуляризующая скорость и регуляризующий тензор вязкости в КГидД случае имеют вид

$$\widehat{\mathbf{w}} = \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f}\right], \quad \Pi^{\tau} = \rho\mathbf{u}\bigotimes\widehat{\mathbf{w}}, \tag{6}$$

где $\tau > 0$ – параметр регуляризации, который может зависеть от искомых функций. Плотность массовой силы $\mathbf{f}$ и мощность тепловых источников $Q \geqslant 0$ – заданные функции.

Представленная модель является регуляризованной системой уравнений Навье–Стокса смеси вязких теплопроводных сжимаемых газов. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю, также допускается: тогда подразумевается использование искусственных коэффициентов μ, λ, $\varkappa$, пропорциональных τ (см. [5–7]). Ниже их конкретный вид несуществен.

В этой модели $\mathbf{d}_\alpha$ – поток диффузии между компонентой α и остальными компонентами, а $\mathbf{q}^d$ – соответствующий дополнительный поток тепла. В случае бинарной смеси $(K = 2)$ при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ приведённые выше уравнения были записаны (среди прочих) в [16]. В данной работе зададим указанные потоки следующими формулами:

$$-\mathbf{d}_\alpha := a_0\left[\sum_{\beta:\beta\neq\alpha}\nabla(G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha\nabla\theta\right] = a_0[\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha\nabla\theta] \quad \text{с} \quad G := \langle G_\alpha\rangle, \tag{7}$$

$$\mathbf{q}^d = \langle(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle, \tag{8}$$

$$G_\alpha := \varepsilon_\alpha - s_\alpha\theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\theta, \quad s_\alpha := \bar{s}_\alpha - R_\alpha\ln\frac{\rho_\alpha}{\bar{\rho}_\alpha} + c_{V\alpha}\ln\frac{\theta}{\bar{\theta}}, \tag{9}$$

где G_α и s_α – потенциал Гиббса и удельная энтропия (см., например, [19]), а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = R_\alpha + c_{V\alpha}$ – удельные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении компоненты $\alpha = \overline{1,K}$. Величины $a_0 \geqslant 0$ и b_α не конкретизируются; они могут зависеть от искомых функций и предполагается, что $\langle b_\alpha\rangle = 0$, а $\bar{s}_\alpha$, $\bar{\rho}_\alpha > 0$, $\bar{\theta} > 0$ – постоянные (референсные значения s_α, ρ_α, θ). Величина $c_{p\alpha}\theta$ – удельная энтальпия компоненты α.

Важную роль играет свойство $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$, непосредственно вытекающее из (7) и сделанного предположения $\langle b_\alpha\rangle = 0$.

Так как имеют место равенства

$$\nabla G_\alpha = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\nabla\theta - \theta\nabla s_\alpha, \quad \nabla s_\alpha = -R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha + c_{V\alpha}\frac{1}{\theta}\nabla\theta,$$

то заменой $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)$ введённые выражения для потоков можно сделать, как обычно, не зависящими явно от s_α:

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0\{[Kc_{p\alpha} - \langle c_{p\alpha}\rangle - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle - b_\alpha)]\nabla\theta - \theta\nabla(Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)\} =$$

$$= a_0\left[\theta\left(KR_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha - \left\langle R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha\right\rangle\right) + (KR_\alpha - \langle R_\alpha\rangle + \tilde{b}_\alpha)\nabla\theta\right],$$

$$\mathbf{q}^d = \langle(G_\alpha + s_\alpha\theta - K^{-1}\langle s_\alpha\rangle\theta + K^{-1}\tilde{b}_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle = \langle(c_{p\alpha} + K^{-1}\tilde{b}_\alpha)\theta\mathbf{d}_\alpha\rangle \tag{10}$$

с учётом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$. При этом $\langle \tilde{b}_\alpha \rangle = 0$. Кроме того, поскольку $\rho_\alpha = pC_\alpha/(R\theta)$, то $\ln \rho_\alpha = \ln C_\alpha - \ln R + \ln p - \ln \theta$, $R = \langle R_\alpha C_\alpha \rangle$, и верна также формула

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0 \biggl\{ \theta \biggl[KR_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha - \biggl\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \biggr\rangle - (KR_\alpha - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle \biggr] + \\ + (KR_\alpha - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_\alpha \nabla \theta \biggr\}. \quad (11)$$

В случае $K = 2$ формулы (7), (8) для потоков принимают вид, эквивалентный известному [1, гл. VI]:

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0[\nabla(G_1 - G_2) + b_1 \nabla \theta], \quad \mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1 \theta)\mathbf{d}_1.$$

Кроме того, поскольку $KR_1 - \langle R_\alpha \rangle = R_1 - R_2$ и

$$KR_1 \frac{1}{C_1} \nabla C_1 - \biggl\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \biggr\rangle - (KR_1 - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle = \biggl(\frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_2} \biggr) \nabla C_1 - \frac{(R_1 - R_2)^2}{R} \nabla C_1,$$

то после несложных алгебраических преобразований формулы (11) и (10) приводят к формулам более стандартного вида для бинарных смесей

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0 \biggl[\frac{R_1 R_2 \theta}{RC_1(1 - C_1)} \nabla C_1 - \frac{R_1 - R_2}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_1 \nabla \theta \biggr], \quad \mathbf{q}^d = (c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1)\theta \mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. при отсутствии термодиффузии) их вид упрощается.

Выведем необходимый ниже набор следствий из уравнений (1)–(3), включая уравнения баланса суммарной массы, кинетической энергии, суммарной внутренней энергии, а также уравнения баланса скорости и температуры.

Применение операции $\langle \cdot \rangle$ к уравнению (1) (т.е. суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$) с учётом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ приводит к важному *уравнению баланса суммарной массы*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0. \quad (12)$$

Нередко уравнения (1) заменяют на уравнение (12) с добавлением уравнения для $K - 1$ концентраций

$$\partial_t(\rho C_\alpha) + \operatorname{div}[\rho C_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha] = 0, \quad \alpha = \overline{1, K-1};$$

в том числе так сделано в [15–17], но ниже это не используется. Последние уравнения в силу (12) можно также записать в недивергентном виде

$$\rho \partial_t C_\alpha + \rho \nabla C_\alpha \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha = 0. \quad (13)$$

Уравнение баланса импульса (2) скалярно умножим на $\mathbf{u}$ и воспользуемся однотипными формулами

$$[\partial_t(\rho \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2}(\partial_t \rho)|\mathbf{u}|^2,$$

$$\operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \bigotimes \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})|\mathbf{u}|^2] + \frac{1}{2} \{\operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]\} |\mathbf{u}|^2$$

и уравнением баланса суммарной массы (12), в результате получим *уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{1}{2} \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})|\mathbf{u}|^2] + (\nabla p) \cdot \mathbf{u} = (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

Вычитая его из уравнения баланса суммарной полной энергии (3) и пользуясь формулами

$$\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = (\nabla p) \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + \Pi : \nabla \mathbf{u},$$

придём к *уравнению баланса суммарной внутренней энергии*

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}[\rho\varepsilon(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] + p\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q, \tag{14}$$

здесь и далее через $:$ обозначается скалярное произведение тензоров.

Уравнения типа (12)–(14) в несколько иных ситуациях хорошо известны; здесь их вывод приведён для полноты и замкнутости изложения.

Продифференцировав первые два слагаемые в левой части уравнения баланса импульса (2), получим

$$(\partial_t\rho)\mathbf{u} + \rho\partial_t\mathbf{u} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]\mathbf{u} + \rho[(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \nabla p =$$
$$= \operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\rho\widehat{\mathbf{w}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \rho\mathbf{f}.$$

В силу уравнения баланса суммарной массы (12) после деления на ρ выведем уравнение баланса скорости

$$\partial_t\mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{f}. \tag{15}$$

Обратимся к уравнению (14). Так как $\rho\varepsilon = \langle c_{V\alpha}\rho_\alpha\rangle\theta$, то верны однотипные формулы дифференцирования

$$\partial_t(\rho\varepsilon) = \langle c_{V\alpha}\partial_t\rho_\alpha\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle\partial_t\theta,$$
$$\operatorname{div}[\rho\varepsilon(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = \langle c_{V\alpha}\operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta.$$

Воспользуемся уравнением баланса массы компоненты (1) и после деления на $\langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle = c_V\rho$ придём к *уравнению баланса температуры*

$$\partial_t\theta + (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{c_V\rho}[\langle c_{V\alpha}\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha\rangle\theta + \operatorname{div}(-\mathbf{q} + p\widehat{\mathbf{w}}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q]. \tag{16}$$

2. Уравнение баланса энтропии при наличии потоков диффузии. Введём суммарную удельную энтропию $s := \langle C_\alpha s_\alpha\rangle$ и выведем уравнение баланса суммарной энтропии ρs. Пусть $a_0 > 0$ в (7).

Теорема 1. *Для КГидД системы уравнений справедливо уравнение баланса суммарной энтропии с неотрицательным производством энтропии*

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\varkappa\nabla\theta + \frac{1}{K}\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\right] =$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\varkappa|\nabla\theta|^2 + \frac{1}{\theta}\left[\frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] + \frac{1}{Ka_0\theta}\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\rangle + \frac{\rho}{\tau\theta}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \frac{Q}{\theta} \geqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Преобразуем в силу уравнения баланса массы компоненты (1) и задания энтропии s_α (9) с последующей записью слагаемых в дивергентном виде следующую величину:

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle] = \langle\partial_t(\rho_\alpha s_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + s_\alpha\mathbf{d}_\alpha]\rangle =$$
$$= \langle\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha]\}s_\alpha\rangle + \langle\rho_\alpha[\partial_t s_\alpha + \nabla s_\alpha\cdot(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] + \nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle =$$
$$= \left\langle -R_\alpha[\partial_t\rho_\alpha + \nabla\rho_\alpha\cdot(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] + \frac{1}{\theta}[\rho_\alpha\partial_t\varepsilon_\alpha + \rho_\alpha\nabla\varepsilon_\alpha\cdot(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]\right\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle =$$
$$= \Big\langle -R_\alpha\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] - \rho_\alpha\operatorname{div}(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\} +$$
$$+ \frac{1}{\theta}\{[\partial_t(\rho_\alpha\varepsilon_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha\varepsilon_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] - \varepsilon_\alpha[\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]]\}\Big\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Далее воспользуемся равенством $\rho\varepsilon = \langle\rho_\alpha\varepsilon_\alpha\rangle$ и уравнениями баланса массы компоненты (1) и суммарной внутренней энергии (14), в результате получим

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha \mathbf{d}_\alpha\rangle\right] = \langle (R_\alpha + c_{V\alpha})\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha + R_\alpha\rho_\alpha \operatorname{div}(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\rangle +$$

$$+ \frac{1}{\theta}[-p\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q] + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Так как верны равенства

$$(R_\alpha + c_{V\alpha}) - s_\alpha = \frac{G_\alpha}{\theta}, \quad \langle R_\alpha\rho_\alpha\rangle = \frac{p}{\theta}, \quad \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \nabla p\cdot\widehat{\mathbf{w}} + p\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}}, \quad \Pi^\tau : \nabla\mathbf{u} = \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{w}},$$

$$\frac{1}{\theta}\operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\right) + \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^d), \quad \nabla s_\alpha = -\nabla\left(\frac{1}{\theta}G_\alpha\right),$$

то

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\right] = \frac{1}{\theta}[\nabla p + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \rho\mathbf{f}]\cdot\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\theta}(\Pi^{NS} : \nabla\mathbf{u} + Q) -$$

$$- \operatorname{div}\frac{\mathbf{q}}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot\langle(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle + \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot\langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle - \frac{1}{\theta}\langle\nabla G_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Последние три слагаемых правой части с учётом свойства $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$ можно записать в виде

$$-\frac{1}{K\theta}\langle[\nabla(KG_\alpha) + b_\alpha\nabla\theta]\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle = -\frac{1}{K\theta}\langle[\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha\nabla\theta]\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle = \frac{1}{Ka_0\theta}\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\rangle.$$

Кроме того, $\mathbf{q} - \langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle = -\varkappa\nabla\theta + K^{-1}\theta\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle$. Уравнение (17) выведено.

Обратим внимание на то, что уравнение баланса энтропии (17) сохраняет силу, во-первых, при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$ (если угодно, при $a_0 = 0$; при $K = 2$ такой результат указан в конце раздела 2 в [14]), во-вторых, при $\tau = 0$ – в этих более простых случаях нужно отбросить слагаемые соответственно с $\mathbf{d}_\alpha$ и $\widehat{\mathbf{w}}$ в его левой и правой частях.

3. Разложение КГидД системы уравнений относительно градиента искомых функций. Изучаемые ниже свойства связаны с диссипативными свойствами КГидД системы уравнений. При этом ограничимся упрощённым случаем $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$, который также оказывается достаточно нетривиальным.

Сначала обратим внимание на то, что в этом случае умножение уравнений баланса массы компоненты (1) на R_α и $c_{V\alpha}$ и суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$ в силу (5) приводит к следующим одинаковым уравнениям для R и c_V:

$$\partial_t(\rho R) + \operatorname{div}[\rho R(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0, \quad \partial_t(\rho c_V) + \operatorname{div}[\rho c_V(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0. \tag{18}$$

Так как в выражения для $\widehat{\mathbf{w}}$, p, ε, а значит, и в уравнения баланса импульса (2) и полной энергии (3), входят именно суммарные величины ρ, R и c_V (а не сами ρ_α, см. (4)), то уравнения (12), (18) вместе с (2), (3) образуют замкнутую систему уравнений для искомых функций $\rho > 0$, $R > 0$, $c_V > 0$, $\mathbf{u}$, $\theta > 0$, количество которых не зависит от K (и при $K > 3$ меньше исходного). Это обстоятельство можно применить в том числе при построении численных методов решения исходной КГидД системы уравнений; ниже в данной статье оно не используется. Отметим также, что в силу уравнения баланса суммарной массы (12) уравнения для R и c_V можно записать в недивергентном виде

$$\partial_t R + \nabla R\cdot(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0, \quad \partial_t c_V + \nabla c_V\cdot(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0.$$

Пусть далее $\mathbf{f} = 0$, $Q = 0$. Введём вектор искомых функций $\mathbf{z} = (\rho_1, \ldots, \rho_K, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (15) и (16) с точностью $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$.

Запишем уравнение баланса массы компоненты (1) в виде $\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho_\alpha\widehat{\mathbf{w}})$, $\alpha=\overline{1,K}$, и разложим его правую часть:

$$\operatorname{div}(\rho_\alpha\widehat{\mathbf{w}}) = \rho_\alpha \operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),$$

$$\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} = \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\nabla(\langle R_\alpha\rho_\alpha\rangle\theta)\right] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\left[\frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha\Delta\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R\Delta\theta\right] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2). \tag{19}$$

Разложим также слагаемые правой части уравнения (15):

$$\operatorname{div}\Pi^{NS} = \mu\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}}) + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + O(|\nabla\mathbf{z}|^2) =$$

$$= \mu\Delta\mathbf{u} + \left(\frac{1}{3}\mu + \lambda\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),$$

$$\frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) = \tau(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\right] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta\right] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),$$

и слагаемые правой части уравнения (16):

$$\operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \varkappa\Delta\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \quad \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = p\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),$$

далее см. разложение в (19).

Подставляя все эти разложения в правые части соответствующих уравнений и учитывая, что

$$|\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla\mathbf{u}| + |(\operatorname{div}\mathbf{u})\rho\widehat{\mathbf{w}}| + |\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla\theta| + |\Pi:\nabla\mathbf{u}| = O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$$

и $p = R\rho\theta$, выведем в итоге редуцированную систему уравнений с производной ∂_t отдельно для каждой из искомых функций:

$$\partial_t\rho_\alpha + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho_\alpha + \rho_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u} =$$

$$= \tau\left[\frac{\rho_\alpha\theta}{\rho}\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle + \rho_\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R\rho_\alpha\Delta\theta\right] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \quad \alpha=\overline{1,K}, \tag{20}$$

$$\partial_t\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + R\nabla\theta = \tau\frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle +$$

$$+ \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \tau R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{21}$$

$$\partial_t\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta =$$

$$= \tau\frac{R\theta^2}{c_V\rho}\langle R_\alpha\Delta\rho_\alpha\rangle + \tau\frac{R\theta}{c_V}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \left(\tau\frac{R^2\theta}{c_V} + \frac{\varkappa}{c_V\rho}\right)\Delta\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{22}$$

где $\chi := \mu/3 + \lambda$. Выражения типа $\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle$ подразумевают суммирование по $\beta=\overline{1,K}$.

Ниже полученная редуцированная система уравнений служит очень удобной основой как для линеаризации исходной КГидД системы, так и при анализе её параболичности.

4. Линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений и её L^2-диссипативность. При $\mathbf{f}=0$ и $Q=0$ система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\rho_1,\ldots,\rho_K,\mathbf{u},\theta)(x,t)\equiv\mathbf{z}_0$, где $\mathbf{z}_0=(\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$ с $\rho_{10}>0,\ \ldots,\ \rho_{K0}>0$, $\theta_0>0$. Линеаризуем систему на этом фоновом решении. Для этого запишем решение в виде

$$\rho_\alpha=\rho_{\alpha0}+\rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha\quad(\alpha=\overline{1,K}),\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0+u_*\widetilde{\mathbf{u}},\quad \theta=\theta_0+\theta_*\widetilde{\theta},\tag{23}$$

где $\rho_{\alpha*}>0$, $u_*>0$, $\theta_*>0$ – нормировочные обезразмеривающие параметры, а $\widetilde{\mathbf{z}}:=(\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\theta})$ – вектор безразмерных возмущений с $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}:=(\widetilde{\rho}_1,\ldots,\widetilde{\rho}_K)$. В дальнейшем важно, что, в отличие от [8–10], множители $\rho_{\alpha*}$ могут быть выбраны не равными фоновым значениям $\rho_{\alpha0}$.

Введём нормированные фоновые плотности компонент и скорость, а также фоновые значения суммарной плотности и коэффициентов R и c_V:

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}:=\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_{\alpha*}},\quad \widehat{\mathbf{u}}_0:=\frac{\mathbf{u}_0}{u_*},\quad \rho_0:=\langle\rho_{\alpha0}\rangle,\quad R_0:=\left\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}R_\alpha\right\rangle,\quad c_{V0}:=\left\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}c_{V\alpha}\right\rangle.$$

В отличие от работ [8–10] решение в виде (23) подставим не в исходную КГидД систему или в систему уравнений (1), (15), (16), а в редуцированную систему (20)–(22). Так как $\partial_k\mathbf{z}=(\rho_{1*}\partial_k\widetilde{\rho}_1,\ldots,\rho_{K*}\partial_k\widetilde{\rho}_K,u_*\partial_k\widetilde{\mathbf{u}},\theta_*\partial_k\widetilde{\theta})$, $k=\overline{1,n}$, и $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)=O(|\nabla\widetilde{\mathbf{z}}|^2)$, то после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектора $\widetilde{\mathbf{z}}$ и его производных 1-го и 2-го порядков и деления уравнений соответственно на $\rho_{\alpha*}$, u_*, θ_*, несложными преобразованиями получаем линеаризованную систему уравнений

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha+u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha+\widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}})=$$
$$=\tau_0u_*^2\left[\frac{\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\beta\rho_{\beta*}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle+\widehat{\rho}_{\alpha0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\right],\quad \alpha=\overline{1,K},\tag{24}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}}+u_*\left(\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\nabla\widetilde{\theta}\right)=u_*^2\left[\tau_0\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_0}{\rho_0u_*^2}\Delta\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{\chi_0}{\rho_0u_*^2}\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+\tau_0\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}\right],\tag{25}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta}+u_*\left(\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}\right)=$$
$$=u_*^2\left[\tau_0\frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0u_*^2\theta_*}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+\tau_0\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\left(\tau_0\frac{R_0^2\theta_0}{c_{V0}u_*^2}+\frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0u_*^2}\right)\Delta\widetilde{\theta}\right].\tag{26}$$

Здесь τ_0, μ_0, χ_0, $\varkappa_0$ – фоновые значения τ, μ, χ, $\varkappa$, т.е. их значения на фоновом решении, и из конвективных слагаемых (т.е. с первыми производными по x) вынесен общий множитель u_*, а из диссипативных слагаемых (т.е. со вторыми производными) – множитель u_*^2.

Для упрощения анализа полученной системы уравнений существенна возможность одновременной симметризации как конвективных, так и диссипативных слагаемых. Симметричность конвективных слагаемых достигается наложением условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}=\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}^2}=\frac{R_\alpha\theta_0}{\rho_{\alpha0}\rho_0},\quad \alpha=\overline{1,K},\quad\text{и}\quad\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\theta_*^2}{u_*^2}=\frac{\theta_0}{c_{V0}}.\tag{27}$$

Симметричность диссипативных слагаемых имеет место при выполнении условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}=\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*},\quad\frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0u_*^2\theta_*}R_\alpha\rho_{\alpha*},\quad\alpha=\overline{1,K},\quad\text{и}\quad\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}.$$

Первое и третье из них совпадают с условиями (27), а второе следует из условий (27), что обеспечивает одновременную симметризацию конвективных и диссипативных слагаемых.

Отметим, что при $\rho_{\alpha*} = \rho_{\alpha 0}$ условиям (27) можно удовлетворить только в очень частном случае: когда $p_{\alpha 0} = R_\alpha \rho_{\alpha 0}\theta_0$ не зависит от α. С другой стороны, условия (27) фактически содержат свободный параметр (выбором которого будет удобно распорядиться ниже) – им удовлетворяет выбор

$$\rho_{\alpha*} = b\sqrt{\rho_{\alpha 0}c_{V0}\rho_0/R_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,K}, \quad u_* = b\sqrt{c_{V0}\theta_0}, \quad \theta_* = b\theta_0 \quad \text{при любом} \quad b > 0. \tag{28}$$

Пусть ниже условия (27) выполнены. Тогда вид коэффициентов линеаризованной системы уравнений (24)–(26) существенно упрощается:

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) =$$

$$= \tau_0 u_*^2[\widehat{\rho}_{\alpha 0}\langle\widehat{\rho}_{\beta 0}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle + \widehat{\rho}_{\alpha 0}(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\theta}], \quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{29}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}) =$$

$$= u_*^2[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\nabla\widetilde{\theta}], \tag{30}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*(a\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\theta}) = u_*^2[\tau_0 a\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + (\tau_0 a^2 + \bar{\varkappa}_0)\Delta\widetilde{\theta}], \tag{31}$$

где введены обозначения

$$a := \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}, \quad \bar{\mu}_0 := \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\varkappa}_0 := \frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0 u_*^2}. \tag{32}$$

Вид правых частей уравнений (24)–(26) и (29)–(31) наводит на мысль о том, что можно вывести замкнутую симметричную систему уравнений для функций $\tilde{r} := \langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha\rangle/(R_0\rho_0)$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$. Чтобы реализовать это предположение, применим операцию $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}(\cdot)\rangle/(R_0\rho_0)$ к уравнению (24) и в силу равенств $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widehat{\rho}_{\alpha 0}\rangle = \langle R_\alpha\rho_{\alpha 0}\rangle = R_0\rho_0$ получим уравнение

$$\partial_t\tilde{r} + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) = \tau_0 u_*^2\left[\frac{R_0\theta_0}{u_*^2}\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\right].$$

Симметризуем систему из этого уравнения и уравнений (25), (26) с $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\nabla\tilde{r}$ и $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\Delta\tilde{r}$. Симметричность конвективных слагаемых обеспечивается выполнением условий

$$1 = \frac{R_0\theta_0}{u_*^2} \ \Leftrightarrow\ u_* = \sqrt{R_0\theta_0} \quad \text{и} \quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*} \ \Leftrightarrow\ \theta_* = \sqrt{\frac{\theta_0}{c_{V0}}}u_*, \quad \text{т.е.} \quad \theta_* = \theta_0\sqrt{\frac{R_0}{c_{V0}}}. \tag{33}$$

Симметричность диссипативных слагаемых обеспечивается выполнением тех же условий и условия $R_0\theta_*/u_*^2 = R_0^2\theta_0^2/(c_{V0}u_*^2\theta_*)$, которое следует из предыдущих. Таким образом, при указанном в (33) выборе u_* и θ_* приходим к следующей упрощённой системе уравнений:

$$\partial_t\tilde{r} + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) = \tau_0 u_*^2[\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\Delta\widetilde{\theta}], \tag{34}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*(\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta}) =$$

$$= u_*^2[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\nabla\tilde{r} + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\nabla\widetilde{\theta}], \tag{35}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*(\bar{a}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\theta}) = u_*^2[\tau_0\bar{a}\Delta\tilde{r} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + (\tau_0\bar{a}^2 + \bar{\varkappa}_0)\Delta\widetilde{\theta}], \tag{36}$$

где $\bar{a} := \sqrt{R_0/c_{V0}}$ и для $\bar{\mu}_0$, $\bar{\chi}_0$, $\bar{\varkappa}_0$ использованы прежние обозначения (32) с $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$.

Если функции $\tilde{r}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$ найдены, то в силу уравнения (29) для $\widetilde{\rho}_\alpha$ получается простейшее неоднородное уравнение переноса

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\rho}_\alpha = g_\alpha := -\widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 u_*^2[\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha 0}(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\theta}], \quad \alpha = \overline{1,K},$$

поскольку можно считать, что $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$ в (28). Оно допускает решение в явном виде.

Для анализа задачи Коши для системы (29)–(31) умножим её уравнения на соответствующие компоненты непрерывно дифференцируемой финитной вектор-функции

$$\mathbf{z} = (\rho_1, \ldots, \rho_n, \mathbf{u}, \theta)(x)$$

(её не следует путать с решением КГидД системы, которое выше обозначалось аналогично) и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Результаты сложим, проинтегрируем по частям и получим интегральное тождество

$$(\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z})_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + u_* \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}) = 0, \quad t > 0. \tag{37}$$

В нём участвуют скалярное произведение в пространстве Лебега вектор-функций $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ и формы

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := \langle (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \rho_\alpha) \rangle + (\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}} + a \nabla \widetilde{\theta}, \mathbf{u}) + (a \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\theta}, \theta),$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := \bar{\mu}_0 (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}) + \bar{\chi}_0 (\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u}) + \bar{\varkappa}_0 (\nabla \widetilde{\theta}, \nabla \theta) + \tau_0 [(\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) +$$

$$+ ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) + (a \nabla \widetilde{\theta}, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) + (\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}) + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}) +$$

$$+ (a \nabla \widetilde{\theta}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}) + (\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle, a \nabla \theta) + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}, a \nabla \theta) + (a \nabla \widetilde{\theta}, a \nabla \theta)].$$

Здесь для краткости $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$ – пространстве Лебега скалярных функций (тензоры $\nabla \widetilde{\mathbf{u}}$ и $\nabla \mathbf{u}$ рассматриваем как векторы длины n^2). Эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором – полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем, в отличие от [8, 9]. Тогда с помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = (\widehat{\mathbf{u}}_0, \langle (\nabla \widetilde{\rho}_\alpha) \rho_\alpha \rangle + (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}) \mathbf{u} + (\nabla \widetilde{\theta}) \theta) -$$

$$- (\widetilde{\mathbf{u}}, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) + (\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle, \mathbf{u}) - a(\widetilde{\theta}, \operatorname{div} \mathbf{u}) + a(\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \theta),$$

и, поскольку $(\nabla w) w = 0.5 \nabla (w^2)$, $(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = 0.5 \nabla (|\mathbf{u}|^2)$ и $\widehat{\mathbf{u}}_0 = \mathrm{const}$, получаем

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0, \quad \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{z}}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n), \tag{38}$$

где $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{z} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$, имеющих обобщённые по Соболеву производные $\partial_i \mathbf{z} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,n}$. Далее, для любой вектор-функции $\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ непосредственно выводим

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|^2 + \tau_0 [\|\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle\|^2 + \|(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}\|^2 + \|a \nabla \theta\|^2 +$$

$$+ 2((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) + 2(a \nabla \theta, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle) + 2(a \nabla \theta, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})] =$$

$$= \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|^2 + \tau_0 \|\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + a \nabla \theta\|^2 \geqslant 0. \tag{39}$$

Здесь для краткости $\|\cdot\|$ – норма в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, билинейная форма $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$ – симметричная и неотрицательно определённая. Однако в отличие от однокомпонентного случая она не является положительно определённой, поскольку $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \tau_0 \|\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle\|^2$ при $\mathbf{u} = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, а тождество $\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle \equiv 0$ означает только то, что $\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \rho_\alpha \rangle \equiv \mathrm{const}$. (Для $\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ все три const равны нулю.) Это обстоятельство является прямым следствием использования общей регуляризующей скорости $\widehat{\mathbf{w}}$ (точнее, суммарного давления p) в уравнениях (1).

Пусть $\boldsymbol{V}(S_T)$ – гильбертово пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n))$, имеющих обобщённую производную $\partial_t \widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n))$, где $S_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$ – слой и $\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) = (\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n))^*$ (см. используемые здесь понятия, например, в [20]). Введём *слабое* *решение* $\widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{V}(S_T)$ задачи Коши для системы уравнений (29)–(31), удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dt + u_* \mathcal{B}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = 0 \quad \text{для любой} \quad \mathbf{z} \in \boldsymbol{L}^2((0,T); \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \tag{40}$$

при всех $T > 0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}^n}$ – отношение двойственности на $\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по S_T вместо $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Для решения* $\widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{V}(S_T)$ $(T > 0$ *– любое) линеаризованной системы уравнений (29)–(31) при всех* $t \geqslant 0$ *верно энергетическое равенство*

$$\begin{gathered} 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S_t)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)} + \\ + \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)}] = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}. \end{gathered} \tag{41}$$

Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ *не возрастает при* $t \geqslant 0$ *(это свойство* $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$*-диссипативности), введённое решение единственно и верна энергетическая оценка*

$$\begin{gathered} \max\{\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)},\ \sqrt{2}u_*[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)} + \\ + \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)}]^{1/2}\} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}, \end{gathered} \tag{42}$$

где $S := \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Доказательство. Положив $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)$ в тождестве (40) и применив затем первое свойство в (38) и формулу в (39), приходим к указанному энергетическому равенству (с t вместо T). При этом свойство $\widetilde{\mathbf{z}} \in C([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n))$ и формула

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dt = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,T)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} - 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $T > 0$ вытекают из [20, гл. IV, теорема 1.17 и замечание 1.22]. Свойство $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$-диссипативности очевидно (поскольку в (41) нормы по S_t не убывают по $t \geqslant 0$), а энергетическая оценка легко получается стандартным образом. Единственность решения следует из (41) или (42). Теорема доказана.

В силу энергетических равенства (41) и оценки (42) справедливо

Следствие. *Существует производная* $\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}) \in L^1(0,+\infty)$ *и верна другая форма энергетического равенства*

$$\begin{gathered} 0.5\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{z}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}) + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \\ + \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}] = 0 \end{gathered}$$

при почти всех $t > 0$.

Равенство из формулировки следствия формально получается подстановкой в тождество (37) $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)$.

Замечание. Так как коэффициенты системы уравнений (29)–(31) постоянны, то производные $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \partial_t\widetilde{\mathbf{u}}, \partial_t\widetilde{\theta})$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_i\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \partial_i\widetilde{\mathbf{u}}, \partial_i\widetilde{\theta})$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют той же системе уравнений. Поэтому априорная оценка (42) сохраняет силу при замене $\widetilde{\mathbf{z}}$ на $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}}$ (на самом деле, и на производную $\widetilde{\mathbf{z}}$ любого порядка по t, x_1, $\ldots$, x_n). Такие следствия из априорной оценки позволяют доказать существование введённого выше обобщённого решения системы при надлежащих условиях регулярности $\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}$. Его существование также следует из указанной выше связи данной системы уравнений с системой (34)–(36), анализ которой более стандартен (см. ниже). Здесь подробнее на этом останавливаться не будем.

5. $\boldsymbol{L}^2$-диссипативность упрощённой линеаризованной КГидД системы уравнений. Выполним анализ начально-краевой задачи для упрощённой системы уравнений (34)–(36). Для этого введём вектор-функции $\tilde{\mathbf{y}} := (\tilde{r}, \widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\theta})$ и $\mathbf{y} := (r, \mathbf{u}, \theta)$ и формы, аналогичные определённым выше:

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) := (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, r)_\Omega + (\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \mathbf{u})_\Omega + (\bar{a} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\theta}, \theta)_\Omega,$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) := \bar{\mu}_0(\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u})_\Omega + \bar{\chi}_0(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u})_\Omega + \bar{\varkappa}_0(\nabla\widetilde{\theta}, \nabla\theta)_\Omega + \tau_0[(\nabla\tilde{r}, \nabla r)_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla r)_\Omega +$$
$$+ (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \nabla r)_\Omega + (\nabla\tilde{r}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega + (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega +$$
$$+ (\nabla\tilde{r}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega + (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega].$$

Здесь для краткости $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\Omega$ – скалярное произведение в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ или $L^2(\Omega)$, а Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Как и выше, эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором – полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем. Тогда снова имеем

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0, \quad \tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{y}}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{43}$$

где $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ с $\partial_i\mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$, и таких, что $\mathbf{y}|_{\partial\Omega} = 0$ (напомним, что для общей области Ω на самом деле это пространство строится как замыкание в норме $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций). Далее, для любой $\mathbf{y} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ непосредственно получаем

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2 + \tau_0[\|\nabla r\|_\Omega^2 + \|(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \|\bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2 +$$
$$+ 2((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \nabla r)_\Omega + 2(\bar{a}\nabla\theta, \nabla r)_\Omega + 2(\bar{a}\nabla\theta, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega] =$$
$$= \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2 + \tau_0\|\nabla r + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2 \geqslant 0, \tag{44}$$

где для краткости $\|\cdot\|_\Omega$ – норма в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ или в $L^2(\Omega)$. Так как справедливо неравенство

$$\|\nabla r\|_\Omega \leqslant |\widehat{\mathbf{u}}_0|\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega + \bar{a}\|\nabla\theta\|_\Omega + \|\nabla r + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \bar{a}\nabla\theta\|_\Omega,$$

то билинейная форма $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ является уже не только симметричной, но и положительно определённой для $\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Пусть $\boldsymbol{V}(Q_T)$ – пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{y}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$, имеющих обобщённую производную $\partial_t\widetilde{\mathbf{y}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, где $Q_T = \Omega \times (0,T)$ – цилиндр и $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) = (\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))^*$. Введём *слабое решение* $\widetilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{V}(Q_T)$ начально-краевой задачи для системы уравнений (34)–(36) при краевом условии $\widetilde{\mathbf{y}}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle\partial_t\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{y}\rangle_\Omega\,dt + u_*\tilde{\mathcal{B}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) + u_*^2\tilde{\mathcal{A}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{для любой} \quad \mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2((0,T); \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \tag{45}$$

при всех $T > 0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{y}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{y}}^{(0)} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\Omega$ – отношение двойственности на $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по Q_T вместо Ω.

Следующая теорема аналогична теореме 2 (вместе с её доказательством на основе определения (45) и свойств (43), (44), включая свойство $\mathbf{y} \in C([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ при всех $T > 0$).

Теорема 3. *Введённое слабое решение $\widetilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{V}(Q_T)$ ($T > 0$ – любое) линеаризованной системы уравнений (34)–(36) существует и единственно, и для него при всех $t \geqslant 0$ верно энергетическое равенство*

$$0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^2 + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(Q_t)}^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}^2 +$$

$$+ \tau_0\|\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}] = 0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.$$

Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ *не возрастает при* $t\geqslant 0$ *(свойство* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$*-диссипативности), и верна энергетическая оценка*

$$\max\Big\{\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}, \sqrt{2}u_*[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(Q)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q)} +$$

$$+ \tau_0\|\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q)}]^{1/2}\Big\} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{y}}^{(0)}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},$$

где $Q := \Omega\times(0,+\infty)$.

Справедлив также аналог следствия 1: верны свойство $\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}) \in L^1(0,+\infty)$ и другая форма энергетического равенства

$$0.5\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{y}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}) + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} +$$

$$+ \tau_0\|\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}] = 0$$

при почти всех $t>0$. Из этого равенства вытекает, что $\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ экспоненциально быстро убывает по $t\geqslant 0$.

Отметим, что введённое слабое решение не только единственно, но и существует в соответствии с [20, гл. VI, теорема 1.1 и § 1.3]. Его регулярность можно изучить стандартными методами теории параболических уравнений [21]. Кроме того, последняя теорема переносится с начально-краевой задачи на задачу Коши.

6. Анализ параболичности исходной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси. Анализ параболичности по Петровскому КГД и КГидД систем уравнений в однокомпонентном случае выполнен в работах [8–10]. Чтобы выполнить его для системы (1)–(3), в редуцированной системе (20)–(22) необходимо отбросить конвективные слагаемые в левых частях и остаточные члены $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$ в правых частях уравнений. В такой упрощённой однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i\partial_j$, следует "заморозить" зависящие от решения $\mathbf{z}$ коэффициенты перед $\partial_i\partial_j$ и выполнить преобразование Фурье по x:

$$\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbf{z}(x,t)e^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta}\,dx, \quad \zeta\in\mathbb{R}^n,$$

где i – мнимая единица. "Замороженные" коэффициенты будем брать в некоторой точке $\mathbf{z}_0 = (\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$, уже использовавшейся выше в качестве фонового решения. Сказанное приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2A_0(\xi)\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = 0, \quad t>0, \tag{46}$$

с параметром $\zeta\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$ и вещественной матрицей $A_0(\xi)$ порядка $K+n+1$ с $\xi=\zeta/|\zeta|$.

Свойство параболичности определяется в терминах собственных значений $\lambda[A_0(\xi)]$ введённой матрицы. Как и в [8–10], под *неравномерной параболичностью* в некоторой подобласти $\mathcal{D}\subset(0,+\infty)^K\times\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ области значений решения удобно понимать свойство

$$\inf_{|\xi|=1} u_*^2\operatorname{Re}\lambda[A_0(\xi)] > 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{z}_0\in\mathcal{D}, \tag{47}$$

где $\operatorname{Re}\lambda$ – вещественная часть λ.

Выполним замену $\mathbf{z} = D\widetilde{\mathbf{z}}$ с диагональной матрицей $D := \operatorname{diag}\{\rho_{1*},\ldots,\rho_{K*},u_*,\ldots,u_*,\theta_*\}$ порядка $K+n+1$ с элементами, удовлетворяющими условиям (27). Тогда $\mathcal{F}\mathbf{z} = D\mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}$ и после умножения системы (46) слева на D^{-1} приходим к эквивалентной системе

$$\partial_t\mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2\hat{A}_0(\xi)\mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) = 0, \quad t>0,$$

с матрицей $\hat{A}_0(\xi) = D^{-1}A_0(\xi)D$, подобной матрице $A_0(\xi)$.

Нетрудно видеть, что матрица $-u_*^2\hat{A}_0(\xi)$ непосредственно возникает в результате применения преобразования Фурье не к редуцированной системе (20)–(22), как выше, а к правой части симметризованной линеаризованной системы (29)–(31). Поэтому $\hat{A}_0(\xi)=[\hat{A}_0(\xi)]^{\text{т}}$, а собственные значения $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]=\lambda[A_0(\xi)]$ вещественны и (с учётом непрерывности $\hat{A}_0(\xi)$ по ξ) условие (47) принимает вид

$$\lambda[\hat{A}_0(\xi)]>0 \ \text{для любых единичного}\ \xi\ \text{и}\ \mathbf{z}_0\in\mathcal{D}. \tag{48}$$

Явный 3×3-блочный вид матрицы $\hat{A}_0(\xi)$ следующий:

$$\hat{A}_0(\xi)=\begin{pmatrix}\tau_0\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & \tau_0 s\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\xi & \tau_0 a\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\\ \tau_0 s\xi\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & (\bar{\mu}_0+\tau_0 s^2)I_n+\bar{\chi}_0\xi\xi^{\text{т}} & \tau_0 as\xi\\ \tau_0 a\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0^T & \tau_0 as\xi^{\text{т}} & \bar{\varkappa}_0+\tau_0a^2\end{pmatrix},$$

где $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0:=(\widehat{\rho}_1,\ldots,\widehat{\rho}_K)^{\text{т}}$, $s=s(\xi):=\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\xi$, вектор ξ считаем столбцом, I_n – единичная матрица порядка n. Очевидно, что у блока $\tau_0\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0$, имеющего порядок K, ранг равен 1. При этом квадратичная форма с матрицей $\hat{A}_0(\xi)$ имеет вид

$$\hat{A}_0(\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\tau_0(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})^2+2\tau_0 s(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})(\xi\cdot\mathbf{v})+2\tau_0 a(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})q+$$
$$+(\bar{\mu}_0+\tau_0 s^2)|\mathbf{v}|^2+\bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2+2\tau_0 as(\xi\cdot\mathbf{v})q+(\bar{\varkappa}_0+\tau_0a^2)q^2=$$
$$=\bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2+\bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2+\bar{\varkappa}_0q^2+\tau_0[s^2(|\mathbf{v}|^2-(\xi\cdot\mathbf{v})^2)+(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r}+s\xi\cdot\mathbf{v}+aq)^2]\geqslant 0 \tag{49}$$

для любого блочного вектора-столбца $\mathbf{b}:=(\mathbf{r},\mathbf{v},q)^{\text{т}}$ с $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^K$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $q\in\mathbb{R}$. Отметим, что выражение в квадратных скобках можно также записать в виде $|(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})\xi+s\mathbf{v}+aq\xi|^2$.

Формула (49), особенно с указанной альтернативной записью выражения в квадратных скобках, является прямым матричным аналогом для (39). Из неё следует, что вместо неравенства (48) выполнено только более слабое свойство $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]\geqslant 0$ для любых единичного ξ и $\mathbf{z}_0\in\mathcal{D}$, причём собственное значение $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]=0$ имеет кратность $K-1$, поскольку равенство $\hat{A}_0(\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=0$ означает, что $\mathbf{v}=0$, $q=0$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r}=0$. Таким образом, происходит вырождение размерности $K-1$ свойства неравномерной параболичности в $\mathcal{D}$. Поэтому для исходной КГидД системы нельзя дать столь элементарное доказательство локальной классической корректности задачи Коши как в [8].

Уравнение баланса массы компонент (1) при $\mathbf{d}_\alpha=0$ после приведения к недивергентному виду и деления на ρ_α запишем в виде

$$\partial_t\ln\rho_\alpha+\nabla\ln\rho_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})+\operatorname{div}(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})=0. \tag{50}$$

Как следствие, при всех $\alpha,\beta=\overline{1,K}$ имеем

$$\partial_t\ln\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}+\nabla\ln\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})=0. \tag{51}$$

Это дифференциальные уравнения первого порядка (они вытекают также из (13)). Все K уравнений (1) можно эквивалентным образом заменить на одно из них (или одно из уравнений (50)) с фиксированным $\alpha=\beta$ и $K-1$ уравнений (51) с остальными $\alpha\neq\beta$. Отсюда очевидно, что КГидД система уравнений (1)–(3) (при $\mathbf{d}_\alpha=0$) является системой уравнений составного типа. Это существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент (или их концентраций) в начально-краевых задачах, а также для выбора способа дискретизации уравнений баланса плотности компонент смеси (или их концентраций).

Таким образом, КГидД система уравнений (1)–(3) гомогенной смеси в отсутствие потоков диффузии имеет составной тип, как и система уравнений Навье–Стокса сжимаемого однокомпонентного газа. В противоположность этому система уравнений Эйлера однокомпонентной газовой динамики имеет гиперболический тип, а КГидД система уравнений однокомпонентного газа – параболический по Петровскому тип. Вместе с тем для всех этих систем разных типов, включая КГидД систему (1)–(3) при наличии потоков диффузии, справедливы уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика М., 1986.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М., 1987.
3. *Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Динамика ионизированного излучающего газа. М., 1989.
4. *Giovangigli V.* Multicomponent Flow Modeling. Boston, 1999.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М., 2004.
6. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчёта вязких течений. М., 2007.
7. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.; Ижевск, 2009.
8. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
9. *Злотник А.А.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
10. *Злотник А.А.* Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
11. *Злотник А.А.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Докл. РАН. 2010. Т. 433. № 6. С. 599–603.
12. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О квазигазо- и гидродинамических уравнениях бинарных смесей газов // Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
13. *Балашов В.А., Савенков Е.В.* Многокомпонентная квазигидродинамическая модель для описания течений многофазной жидкости с учетом межфазного взаимодействия // Прикл. механика и техн. физика. 2018. Т. 59. № 3. С. 57–68.
14. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
15. *Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E.* Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
16. *Balashov V., Zlotnik A.* An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312.
17. *Balashov V., Zlotnik A.* On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions // J. Sci. Comput. 2021. V. 86. Art. 33.
18. *Елизарова Т.Г., Шильников Е.В.* Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 124–135.
19. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем. М., 2002.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
21. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
После доработки 24.03.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.