ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 361–370

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226

ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ И ε-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ

© 2022 г. В. И. Качалов

Для нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве, двояким образом зависящих от малого параметра – регулярно и сингулярно, построены ε-псевдорегулярные решения задачи Коши, т.е. формальные её решения, представимые в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, которые сингулярным образом от него зависят, и сходящиеся в некоторой окрестности нулевого значения параметра равномерно на заданном временно́м интервале. Получены достаточные условия, при выполнении которых сумма такого ряда является точным, а значит, псевдоголоморфным решением этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122030062, **EDN:** BXZAME

Светлой памяти моего учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
с признательностью и благодарностью
посвящаю эту работу

Введение. Формализм большинства методов решения сингулярно возмущённых задач заключается в построении решений таких задач в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, сингулярно от него зависящими. Как правило, такие ряды сходятся асимптотически к точному решению сингулярно возмущённой задачи [1–3].

Ряды, построенные по методу регуляризации Ломова, при определённых условиях на данные задачи могут сходиться к точному решению в обычном смысле, а само решение в этом случае называется *псевдоаналитическим* (*псевдоголоморфным*) [4, гл. I, § 4; 5].

Однако если уравнение является нелинейным и содержит неограниченные операторы, то помимо доказательства обычной сходимости формального (т.е. построенного в соответствии с методом малого параметра) решения нужно ещё обосновывать, что сумма такого ряда является точным решением. Задача такого обоснования исследуется в данной работе.

Отметим, что хотя метод малого параметра используется в математической физике достаточно давно [6, гл. XII, § 1–3; 7, гл. VII, § 1], систематического изучения характера сходимости построенных рядов практически не проводилось.

Рассмотрим в банаховом пространстве E эволюционную задачу

$$\varepsilon\partial_t u = F(u,\varepsilon), \quad t\in(0,T],$$
$$u|_{t=0} = u^0, \tag{1}$$

где $T>0$ – заданное число, а F – нелинейный неограниченный оператор, голоморфным образом зависящий от малого параметра ε, причём разложение оператора F в ряд по степеням ε имеет радиус сходимости, не зависящий от $u\in D_F$. Здесь D_F – область определения этого оператора.

Также будем предполагать, что выполняется следующее свойство: каждому степенному ряду $v_0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^n v_n+\ldots$ с коэффициентами из D_F соответствует такой степенной ряд $f_0+\varepsilon f_1+\ldots+\varepsilon^n f_n+\ldots$ с коэффициентами из D_F, что для любого целого неотрицательного n существует голоморфная в точке $\varepsilon=0$ функция $g_n(\varepsilon)$, при которой справедливо равенство

$$F(v_0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^n v_n,\varepsilon) = f_0+\varepsilon f_1+\ldots+\varepsilon^n f_n+\varepsilon^{n+1}g_n(\varepsilon).$$

Нетрудно показать, что любой оператор, представимый в виде суммы конечного числа линейных и полилинейных операторов, обладает указанным свойством.

Применим к задаче (1) метод малого параметра, т.е. будем искать её решение в виде формального ряда по степеням ε с коэффициентами, сингулярным образом зависящими от ε (как это будет следовать из дальнейшего):

$$u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)=u_0(t,1/\varepsilon)+\varepsilon u_1(t,1/\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^n u_n(t,1/\varepsilon)+\ldots \tag{2}$$

Если подставить ряд (2) в уравнение (1) и воспользоваться указанным выше свойством оператора F, то получится следующая серия начальных сингулярно возмущённых задач:

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u_0=f_0,\quad u_0|_{t=0}=u^0,\\ \varepsilon\partial_t u_1=f_1,\quad u_1|_{t=0}=0,\\ \ldots\\ \varepsilon\partial_t u_n=f_n,\quad u_n|_{t=0}=0,\\ \ldots\end{gathered} \tag{3}$$

решив которую, построим $u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$.

Замечание. Сингулярная зависимость коэффициентов ряда (2) от ε обусловлена тем, что задачи серии (3) являются сингулярно возмущёнными.

Определение. Если ряд (2) с коэффициентами, являющимися решениями серии задач (3), сходится в некоторой окрестности значения $\varepsilon=0$ равномерно на отрезке $[0,T]$, то его сумма $u^{\mathrm{pr}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ называется *ε-псевдорегулярным решением* задачи (1).

Далее в работе будет доказано существование ε-псевдорегулярных решений для некоторых классов сингулярно возмущённых задач и установлены условия совпадения таких решений с точными. Согласно [4, 8–11] точные решения, представимые в виде сходящихся в обычном смысле рядов вида (2), называются *псевдоголоморфными.*

Будем изучать при малых положительных ε сингулярно возмущённую задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u=Au+\varepsilon^2B(u,Hu),\quad t\in(0,T],\\ u|_{t=0}=u^0,\end{gathered} \tag{4}$$

где A – замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной в банаховом пространстве E областью определения D_A; $B(u,v)$ – ограниченный билинейный оператор, действующий из $E\times E$ в E; линейный оператор H может быть как ограниченным, так и неограниченным. Относительно оператора A будем предполагать выполненным следующее

Условие (А). Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы [12, гл. I, § 1; 13, гл. VII, § 31].

Эту полугруппу обозначим через $\mathcal{U}_A(t)$.

1. Случай ограниченного оператора *H*. Пусть оператор H принадлежит векторному пространству линейных $\mathcal{L}(E)$ непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве E. Формальное решение $u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ задачи Коши (4) будем искать в виде ряда (2) с коэффициентами, определяемыми из серии начальных сингулярно возмущённых задач:

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u_0=Au_0,\quad u_0|_{t=0}=u^0,\\ \varepsilon\partial_t u_1=Au_1+\varepsilon B(u_0,Hu_0),\quad u_1|_{t=0}=0,\\ \ldots\\ \varepsilon\partial_t u_n=Au_n+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}B(u_k,Hu_{n-k-1}),\quad u_n|_{t=0}=0,\\ \ldots\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши произведения рядов:

$$B(u, Hu) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^{n} B(u_k, Hu_{n-k}).$$

В соответствии с условием (A) и формулой решения линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве [12, гл. I, § 6; 13, гл. VII, § 31] найдём решения задач серии (5):

$$u_0(t, 1/\varepsilon) = \mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0,$$

$$u_1(t, 1/\varepsilon) = \int_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) B(u_0(\tau, 1/\varepsilon), Hu_0(\tau, 1/\varepsilon))\, d\tau,$$

$$\ldots$$

$$u_n(t, 1/\varepsilon) = \int_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) \Big[\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k(\tau, 1/\varepsilon), Hu_{n-k-1}(\tau, 1/\varepsilon))\Big]\, d\tau,$$

$$\ldots \tag{6}$$

Пусть $\|B(u,v)\| \leqslant b\|u\|\|v\|$ при некотором $b > 0$ и $\|H\| = h.$ Методом математической индукции докажем неравенство

$$\|u_n(t, 1/\varepsilon)\| \leqslant t^n b^n h^n \|u^0\|^{n+1}. \tag{7}$$

Как следует из второго равенства серии (6), неравенство (7) верно при $n = 1,$ поскольку полугруппа $\mathcal{U}_A(t)$ – сжимающая. Предположим его справедливость при всех $n = \overline{1, m}$ и выведем отсюда его истинность при $n = m + 1.$ С учётом того, что $\|\mathcal{U}_A(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0,$ имеем

$$\|u_{m+1}(t, 1/\varepsilon)\| \leqslant \int_0^t bh \sum_{k=0}^{m} (\tau^k b^k h^k \|u^0\|^{k+1} \tau^{m-k} b^{m-k} h^{m-k} \|u^0\|^{m-k+1})\, d\tau =$$

$$= b^{m+1} h^{m+1} \|u^0\|^{m+2} \int_0^t (m+1)\tau^m\, d\tau = b^{m+1} h^{m+1} t^{m+1} \|u^0\|^{m+2},$$

что и требовалось доказать.

Из оценки (7) следует равномерная на отрезке $[0, T]$ сходимость ряда

$$u_0(t, 1/\varepsilon) + \varepsilon u_1(t, 1/\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t, 1/\varepsilon) + \ldots \tag{8}$$

при всех $0 < \varepsilon < (Tbh\|u^0\|)^{-1}.$ Обозначим его сумму через $u^{\mathrm{pr}}(t, 1/\varepsilon, \varepsilon).$ Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При выполнении условия (A) и ограниченности операторов B и H задача Коши (4) имеет ε-псевдорегулярное решение.*

2. Точные решения эволюционных задач с ограниченным билинейным оператором. Как обычно, под *точным* решением задачи Коши (4) понимаем функцию $u(t, 1/\varepsilon, \varepsilon),$ принадлежащую классу $D_A \bigcap D_H$ при всех $t \in (0, T]$ и любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число), обращающую уравнение (4) в тождество по $t \in (0, T]$ и удовлетворяющую начальному условию $u(0, 1/\varepsilon, \varepsilon) = u^0.$ Производная $\partial_t u$ понимается в сильном смысле.

Как и выше, рассмотрим случай ограниченного оператора H (в частности, $D_H = E$).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 задача Коши (4) имеет при каждом достаточно малом положительном ε единственное точное решение.*

Доказательство. Так как A – инфинитезимальный генератор сжимающей полугруппы $\mathcal{U}_A(t)$, то при положительных ε задача (4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) = \mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0 + \varepsilon\int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon), Hu(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon))\,d\tau. \tag{9}$$

Из предыдущего следует, что $\mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0 = u_0(t,1/\varepsilon)$. Через C_E обозначим банахово пространство $C([0,T];E)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в E и с нормой равномерной сходимости.

Пусть $S^1_\varepsilon = \{v(t)\in C_E : \|v(t)-u_0(t,1/\varepsilon)\|_{C_E}\leqslant 1\}$ – замкнутый единичный шар в C_E с центром в $u_0(t,1/\varepsilon)$, при этом $\varepsilon>0$ мало и фиксировано (насколько мало, будет в дальнейшем указано). Рассмотрим оператор

$$\Phi[w(t)] = u_0(t,1/\varepsilon) + \varepsilon\int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(w(\tau), Hw(\tau))\,d\tau,$$

действующий в C_E. При достаточно малых ε он отображает шар S^1_ε в себя ввиду ограниченности операторов B и H.

Докажем, что при малых ε оператор Φ является сжатием (именно такие ε мы и будем иметь в виду далее). При $\varepsilon>0$ имеем

$$\|\Phi[w_1(t)]-\Phi[w_2(t)]\| = \varepsilon\biggl\|\int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)[B(w_1(\tau),Hw_1(\tau)) - B(w_2(\tau),Hw_2(\tau))]\,d\tau\biggr\| =$$

$$= \varepsilon\biggl\|\int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)[B(w_1(\tau),Hw_1(\tau)) - B(w_1(\tau),Hw_2(\tau)) +$$

$$+ B(w_1(\tau),Hw_2(\tau)) - B(w_2(\tau),Hw_2(\tau))]\,d\tau\biggr\| =$$

$$= \varepsilon\biggl\|\int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(w_1(\tau),H(w_1(\tau)-w_2(\tau)))\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(w_1(\tau)-w_2(\tau),Hw_2(\tau))\,d\tau\biggr\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int\limits_0^t \biggl\|\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)\biggr\|\|B(w_1(\tau),H(w_1(\tau)-w_2(\tau)))\|\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon\int\limits_0^t \biggl\|\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)\biggr\|\|B(w_1(\tau)-w_2(\tau),Hw_2(\tau))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon Tbh(\|w_1\|_{C_E}+\|w_2\|_{C_E})\|w_2-w_1\|_{C_E}.$$

Здесь учтено то, что $\mathcal{U}_A$ – сжимающая полугруппа.

Если $w_1,w_2\in S^1_\varepsilon$, то $\|w_i\|_{C_E}\leqslant 1+\|u_0\|_{C_E}$, $i=1,2$, и поэтому при

$$0<\varepsilon<(2Tbh(1+\|u_0\|_{C_E}))^{-1} \tag{10}$$

оператор Φ является сжатием, отображающим шар S_ε^1 в себя. В соответствии с принципом сжимающих отображений [13, гл. VIII, § 33] в шаре S_ε^1 существует и единственно решение интегрального уравнения (9), что ввиду его эквивалентности задаче (4) доказывает существование и единственность точного решения $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ у этой начальной задачи. Теорема доказана.

Перейдём к изложению основного результата данного пункта работы.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 ε-псевдорегулярное решение задачи Коши (4) является её точным решением.*

Доказательство. Введём обозначение для частичной суммы ряда (8), представляющего ε-псевдорегулярное решение $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ задачи (4):

$$u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}(t,1/\varepsilon)=u_0(t,1/\varepsilon)+\varepsilon u_1(t,1/\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^n u_n(t,1/\varepsilon). \tag{11}$$

Также обозначим $\|u_0\|_{C_E}=a$ (см. неравенство (10)). Заметим, что в силу сжимаемости полугруппы $a\leqslant\|u^0\|$. Из свойства билинейности оператора B следует, что функция $u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}(t,1/\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}=Au_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}+\varepsilon^2B(u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}},Hu_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})-\varepsilon^{n+2}\sum_{m=0}^n B(u_m,Hu_{n-m})-\\ -\varepsilon^{n+3}\sum_{m=1}^n B(u_m,Hu_{n-m+1})-\varepsilon^{n+4}\sum_{m=2}^n B(u_m,Hu_{n-m+2})-\ldots\\ \ldots-\varepsilon^{2n+1}[B(u_n,Hu_{n-1})+B(u_{n-1},Hu_n)]-\varepsilon^{2n+2}B(u_n,Hu_n),\end{gathered} \tag{12}$$

в котором коэффициенты псевдомногочлена (11) по степеням ε записаны без аргументов.

Вычтя уравнение (12) из уравнения (4), получим

$$\begin{gathered}\partial_t(u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})=A(u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})+\varepsilon^2[B(u,Hu)-B(u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}},Hu_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})]+\varepsilon^{n+2}\sum_{m=0}^n B(u_m,Hu_{n-m})+\\ +\varepsilon^{n+3}\sum_{m=1}^n B(u_m,Hu_{n-m+1})+\varepsilon^{n+4}\sum_{m=2}^n B(u_m,Hu_{n-m+2})+\ldots\\ \ldots+\varepsilon^{2n+1}[B(u_n,Hu_{n-1})+B(u_{n-1},Hu_n)]+\varepsilon^{2n+2}B(u_n,Hu_n).\end{gathered} \tag{13}$$

Поставим к уравнению (13) начальное условие

$$(u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})|_{t=0}=0.$$

Здесь $u=u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ – точное решение поставленной задачи (которое по теореме 2 существует и единственно).

Уравнение (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$\begin{gathered}u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}=\varepsilon\int_0^t\mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)[B(u,H(u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}}))+B(u-u_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}},Hu_{n\varepsilon}^{\mathrm{pr}})]\,d\tau+\\ +\varepsilon^{n+1}\int_0^t\mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\Big[\sum_{m=0}^n B(u_m,Hu_{n-m})+\varepsilon\sum_{m=1}^n B(u_m,Hu_{n-m+1})+\\ +\varepsilon^2\sum_{m=2}^n B(u_m,Hu_{n-m+2})+\ldots+\varepsilon^{n-1}(B(u_n,Hu_{n-1})+B(u_{n-1},Hu_n))+\varepsilon^nB(u_n,Hu_n)\Big]\,d\tau,\end{gathered} \tag{14}$$

причём в подынтегральные выражения входят функции переменной τ.

С учётом оценки (7) и сжимаемости полугруппы из уравнения (14) при $\varepsilon > 0$ вытекают неравенства (ниже аргумент τ не пишем):

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon \int\limits_0^t bh(\|u\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}\|)\|u - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}\|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon^{n+1}T\Big[\sum_{m=0}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m})\|_{C_E}+\varepsilon\sum_{m=1}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m+1})\|_{C_E}+\varepsilon^2\sum_{m=2}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m+2})\|_{C_E}+\ldots$$

$$\ldots+\varepsilon^{n-1}(\|B(u_n,Hu_{n-1})\|_{C_E}+\|B(u_{n-1},Hu_n)\|_{C_E})+\varepsilon^n\|B(u_n,Hu_n)\|_{C_E}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t (\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon^{n+1}Th[(n+1)a^2br^n + \varepsilon na^2br^{n+1} + \varepsilon^2(n-1)a^2br^{n+2} + \ldots + 2\varepsilon^{n-1}a^2br^{2n-1} + \varepsilon^n a^2br^{2n}], \quad (15)$$

где $r = Tbha$.

Если $0 < \varepsilon < (2Tbh(1+a))^{-1}$, то $\rho = \varepsilon r = a/(2(1+a)) < 1/2$, и из неравенства (15) следует, что

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t (\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon^{n+1}Tbha^2r^n[n+1+n\rho(1+\rho+\ldots+\rho^{n-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t (\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon Tbha^2\rho^n\left(n+1+\frac{n\rho}{1-\rho}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t (\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon Tbha^2\rho^n(2n+1), \quad (16)$$

так как $\rho(1-\rho)^{-1} < 1$ при $0 < \rho < 1/2$.

Пусть $\mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon) = \varepsilon bh(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)$. Очевидно, что эта функция является ограниченной при $0 \leqslant t,\tau \leqslant T$ ввиду ограниченности при $\varepsilon \to +0$ функций $u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)$ и $u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Согласно неравенству Гронуолла–Беллмана из неравенства (16) следует, что

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon\rho^n Tbha^2(2n+1)e^{\int_0^t \mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon)\,d\tau}, \quad (17)$$

а поскольку $(2n+1)\rho^n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\rm pr}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\|_{C_E} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) = u^{\rm pr}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$. Теорема доказана.

3. Приближённые решения эволюционных уравнений в случае неограниченного оператора $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим задачу Коши (4) в случае, когда H – замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Пусть также имеется начальная задача

$$\varepsilon\partial_t v = Av + \varepsilon^2 B(v, Gv), \quad t \in (0,T],$$

$$v|_{t=0} = u^0, \quad (18)$$

где $G \in \mathcal{L}(E)$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (A) *и оператор* B *ограничен, а оператор* H *неограничен. Если* $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ *– точное решение задачи Коши (4), ограниченное на отрезке* $[0,T]$ *при* $\varepsilon\to+0$, *то при некоторой константе* C_ε *такой, что* $C_\varepsilon\to 0$ *при* $\varepsilon\to+0$, *справедливо неравенство*

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)-v(t,1/\varepsilon,\varepsilon)\|\leqslant C_\varepsilon\|(H-G)u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)\|. \tag{19}$$

Доказательство. Представим уравнение (4) в виде

$$\varepsilon\partial_t u=Au+\varepsilon^2B(u,Gu)+\varepsilon^2B(u,(H-G)u)$$

и вычтем из него уравнение (18):

$$\varepsilon\partial_t(u-v)=A(u-v)+\varepsilon^2[B(u-v,Gu)+B(v,G(u-v))]+\varepsilon^2B(u,(H-G)u), \tag{20}$$

причём если u и v – решение задачи Коши (4), то

$$(u-v)|_{t=0}=0.$$

Пользуясь тем, что $\mathcal{U}_A(t)$ – сильно непрерывная полугруппа с генератором A, запишем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (20):

$$u-v=\varepsilon\int\limits_0^t\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)[B(u-v,Gu)+B(v,G(u-v))]\,d\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(u,(H-G)u)\,d\tau.$$

Здесь аргументы у функций u и v опущены. Так как полугруппа $\mathcal{U}_A(t)$ – сжимающая и $\varepsilon>0$, имеем оценку

$$\|u-v\|\leqslant\varepsilon b\int\limits_0^t(\|Gu\|+\|v\|\|G\|)\|u-v\|\,d\tau+\varepsilon Tb\|u\|\|(H-G)u\|,$$

откуда в соответствии с неравенством Гроноулла–Беллмана (см. также (17)) получаем оценку

$$\|u-v\|\leqslant\varepsilon Tb\|u\|\exp\{\varepsilon Tb(\|Gu\|_{C_E}+\|v\|_{C_E}\|G\|)\}\|(H-G)u\|, \tag{21}$$

совпадающую с неравенством (19), если

$$C_\varepsilon=\varepsilon Tb\|u\|_{C_E}\exp\{\varepsilon Tb(\|Gu\|_{C_E}+\|v\|_{C_E}\|G\|)\}.$$

Как следует из неравенства (21), для последовательности ограниченных операторов G_m, сильно сходящейся к H, можно указать такую последовательность $\varepsilon_m\to+0$, что для решения $V_m(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)$ начальных задач (18) будет иметь место равномерная по $t\in[0,T]$ сходимость

$$\lim_{m\to\infty}\|u(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)-V_m(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)\|=0. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим начальную задачу

$$\varepsilon\partial_t u=\partial_x^2u-\varepsilon^2u(\partial_x u),\quad t\in(0,T],\quad x\in[0,1],$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x).$$

Здесь $E=C[0,1]$; $D(\partial_x^2)=\{w(x)\in C[0,1]:\partial_x^2w\in C[0,1],\ \ w(0)=w(1)=0\}$; $D^\mu(\partial_x)=\{w(x)\in C[0,1]:\partial_xw\in C[0,1],\ \ \mu w(0)-w(1)=0\}$, $\mu\in(0,1)$ и фиксирован билинейный оператор $B(u,v)=-uv$, очевидно, ограниченный как оператор, действующий из $C[0,1]\times C[0,1]$ в $C[0,1]$; $\varphi(x)\in D(\partial_x^2)$.

Резольвента оператора $H = \partial_x$ с областью определения $D^\mu(\partial_x)$ задаётся формулой [14, с. 144]

$$R_H(\lambda) = \frac{1}{\mu - e^\lambda}\biggl(\mu \int\limits_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi + e^\lambda \int\limits_x^1 e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\, d\xi\biggr),$$

и при всех $\lambda > 0$ (и заданном $\mu \in (0,1)$) подчинена оценке $\|R_H(\lambda)\| \leqslant 1/\lambda$. Тогда, как известно [12, с. 66], последовательность ограниченных операторов

$$H_m = -mI - m^2 R_H(m),$$

где I – тождественный оператор, при $m \to \infty$ сильно сходится к оператору $H = \partial_x$.

Рассмотрим серию начальных задач

$$\varepsilon\partial_t v = \partial_x^2 v - \varepsilon^2 v(H_m v), \quad t \in (0,T], \quad x \in [0,1],$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x). \tag{23}$$

С помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [15, с. 187]

$$G(t/\varepsilon, x; s) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi ks)\sin(\pi kx) e^{-\pi^2 k^2 t/\varepsilon}$$

строим ε-регулярные решения задач (23) (они являются псевдоголоморфными по теореме 3):

$$V_m(t,x,1/\varepsilon,\varepsilon) = v_0(t,x,1/\varepsilon) + \varepsilon v_1(t,x,1/\varepsilon) + \ldots,$$

где

$$v_0(t,x,1/\varepsilon) = \int\limits_0^1 G(t/\varepsilon, x; s)\varphi(s)\, ds;$$

$$v_1(t,x,1/\varepsilon) = -\int\limits_0^t \biggl[\int\limits_0^1 G\Bigl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}, x; s\Bigr)(v_0(\tau,s,1/\varepsilon) H_m[v_0(\tau,s,1/\varepsilon)])\, ds\biggr] d\tau;$$

и т.д. Как следует из выражения для C_ε, предел (22) будет иметь место, если $\varepsilon_m = m^{-2}$.

4. Существование ε-псевдорегулярных решений уравнений с неограниченным билинейным оператором. Дополнительно к условию (A) наложим на билинейный оператор $B(u, Hv)$ из уравнения (4) специальное условие.

Условие (B). *Для некоторого $a \geqslant 0$ существует неубывающая последовательность множеств $W_a^1 \subset W_a^2 \subset \ldots \subset W_a^k \subset \ldots \subset D_A$ такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого $w \in W_a^n$ выполняется оценка $\|w\| \leqslant e^{an}$, и если $u \in W_a^p$, $v \in W_a^q$, то $B(u,Hv) \in qW_a^{p+q}$ $(p,q \in \mathbb{N})$. Кроме того, при каждом $n \in \mathbb{N}$ множество W_a^n инвариантно относительно действия полугруппы, т.е. $\mathcal{U}_A(t)W_a^n \subset W_a^n$ при всех $t \geqslant 0$.*

Введём следующее обозначение:

$$\exp_a E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_a^n.$$

Отметим, что множество $\exp_a E$ обобщает пространство целых функций экспоненциального типа [16, гл. VIII, § 2].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, условие (B) и включение $u^0 \in \exp_a E$. Тогда задача Коши (4) имеет единственное ε-псевдорегулярное решение.*

Доказательство. Обратимся к серии решений (6). Пусть для определённости $u^0 \in W_a^1$, тогда вследствие инвариантности множества W_a^n относительно действия полугруппы $\mathcal{U}_A(t)$ верно включение $u_0(t,1/\varepsilon) \in W_a^1$, а значит, $\|u_0(t,1/\varepsilon)\| \leqslant e^a$ при всех $t \geqslant 0$ и любом $\varepsilon > 0$.

С помощью метода математической индукции установим неравенство

$$\|u_n(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n e^{a(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением [17].

Лемма. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$1 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!} \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{4^2}{3!} \cdot \frac{(n-2)^{n-3}}{(n-3)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \cdot 1 = \frac{(n+2)^n}{n!}.$$

Учтём также тот факт, что из включения $B(u,Hv) \in qW_a^{p+q}$ $(u \in W_a^p,\ v \in W_a^q)$ следует, что $\|B(u,Hv)\| \leqslant qe^{a(p+q)}$.

Проверим справедливость неравенства (24) при $n=1$. С учётом сжимаемости полугруппы имеем

$$\|u_1(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t \|B(u_0(\tau,1/\varepsilon), Hu_0(\tau,1/\varepsilon))\|\, d\tau \leqslant \int\limits_0^t e^{2a}\, d\tau = te^{2a}.$$

Пусть неравенство (24) верно при данном натуральном n, тогда

$$\|u_{n+1}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t \sum_{k=0}^n \|B(u_k(\tau,1/\varepsilon), Hu_{n-k}(\tau,1/\varepsilon))\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg[\int\limits_0^t \Big(1 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!} \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \cdot 1\Big)\tau^n\, d\tau\Bigg] e^{a(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+2)^n}{n!(n+1)} t^{n+1} e^{a(n+2)} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)!} t^{n+1} e^{a(n+2)}.$$

Сходимость ряда

$$u_0(t,1/\varepsilon) + \varepsilon u_1(t,1/\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,1/\varepsilon) + \ldots$$

равномерно по $t \in [0,T]$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ (ε^* находится с помощью признака Даламбера) таким образом установлена. Его сумма и будет ε-псевдорегулярным решением задачи (4).

Пример 2. Рассмотрим смешанную задачу

$$\varepsilon\partial_t u = \partial_x^2 u - \varepsilon^2 u(\partial_x u), \quad t \in (0,T], \quad x \in (0,\pi),$$

$$u(t,0,1/\varepsilon) = u(t,\pi,1/\varepsilon) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u(0,x,1/\varepsilon) = \sin x, \quad x \in [0,\pi].$$

По формулам (6) строим её ε-псевдорегулярное решение:

$$u^{\mathrm{pr}}(t,x,1/\varepsilon,\varepsilon) = e^{-t/\varepsilon}\sin x - \frac{\varepsilon}{4}(e^{-2t/\varepsilon} - e^{-4t/\varepsilon})\sin 2x +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{32}[(2e^{-3t/\varepsilon} - 3e^{-5t/\varepsilon} + e^{-9t/\varepsilon})\sin 3x - (e^{-5t/\varepsilon} - 2e^{-3t/\varepsilon} + e^{-t/\varepsilon})\sin x] - \ldots$$

Здесь $E = C[0,\pi]$, $a=0$, W_0^n состоит из тригонометрических многочленов вида $a_1 \sin x + {}+ a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, коэффициенты которых удовлетворяют неравенству $|a_1| + |a_2| + \ldots \ldots + |a_n| \leqslant 1$. Несложно доказать, что $\exp_0 E$ – мультипликативный моноид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М., 1973.
3. *Маслов В.П.* Асимптотические методы в теории возмущений. М., 1988.
4. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
5. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // Докл. АН СССР. 1988. Т. 37. № 2. С. 465–467.
6. *Рид М., Саймон В.* Методы современной математической физики. Т. 4. М., 1982.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
8. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН СССР. 1982. Т. 334. № 8. С. 694–695.
9. *Kachalov V.I.* Poincare decomposition theorems and the Lomov regularization method // J. of Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1391. № 1. P. 012134.
10. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. doi:10.3390/axioms8010027.
11. *Качалов В.И.* О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 52–59.
12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
14. *Дезин А.А.* Воспоминания и избранные труды по математике. М., 2011.
15. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1976.
16. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980.
17. *Бесова М.И., Качалов В.И.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении в банаховом пространстве // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18. № 1. С. 332–337.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт"

Поступила в редакцию 21.05.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.