ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 371–384

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952+517.956.226

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С ОСОБЕННОСТЬЮ В КОЭФФИЦИЕНТЕ

© 2022 г. Ю. С. Федоров

Для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных типа Коши–Римана рассматривается задача Римана–Гильберта. С помощью метода регуляризации Ломова получены достаточные условия, при выполнении которых её асимптотические решения сходятся в обычном смысле.

DOI: 10.31857/S0374064122030074, **EDN:** BYBLNQ

Светлой памяти моего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящаю эту работу

1. Постановка задачи. Пусть область D содержит точку $z=0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Пусть контур Γ принадлежит классу Гёльдера $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta=\alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta|<1$, согласно теореме Келлога [1, с. 411] функция ζ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Удобно обозначить $D_\delta = D\bigcap\{|z|>\delta\}$ с малым $\delta>0$.

В области D рассмотрим следующую сингулярно возмущённую систему уравнений Коши–Римана с сингулярными коэффициентами:

$$\varepsilon\bigg[x\bigg(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg)+y\bigg(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg)\bigg]-2a(u_1-u_2)=0,$$

$$\varepsilon\bigg[y\bigg(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg)-x\bigg(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg)\bigg]-2a(u_1+u_2)=0, \tag{1.1$_0$}$$

где $\varepsilon\ll 1$ – малый параметр, a – действительная положительная постоянная, т.е. $a\in\mathbb{R}^+$.

Используя оператор Коши–Римана $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y$, с учётом того, что $u=u_1+iu_2$, запишем систему уравнений (1.1_0) в удобной для исследования комплексной форме

$$\varepsilon\bar{z}u_{\bar{z}}-au=0. \tag{1.1}$$

На важность исследования системы (1.1) указал В.Ф. Сафонов [2, гл. 3], на необходимость её изучения обращали внимание также А.В. Бицадзе и А.Б. Васильева. Уравнения, аналогичные (1.1), рассматривались в работе [3] и монографии [4, с. 215] при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой

$$\varepsilon z^2y''(z)+zp(z)y'(z)+q(z)y(z)=0$$

(здесь $y=y(z)$ – функция комплексного переменного z). Некоторые сингулярно возмущённые системы уравнений в частных производных с регулярной особой точкой, отличные от систем вида (1.1_0), изучались И.С. Ломовым [5, 6]. В.Ф. Сафоновым предложено исследовать классы уравнений, когда точка $z=0$ является особой точкой множителя при производной искомой функции по $\bar{z}$. Первый естественный класс таких уравнений содержит сингулярно возмущённое уравнение Коши–Римана (1.1), эквивалентное системе (1.1_0).

Одной из основных граничных задач теории (обобщённых) аналитических функций является краевая задача Римана–Гильберта. Её постановка для аналитических функций принадлежит Б. Риману [7]. В 1857 г. он впервые сформулировал задачу следующим образом: найти аналитическую в области D функцию по известному соотношению между её действительной и мнимой частями на границе области. Сам он не указал способов решения этой задачи. Её полное решение дано Д. Гильбертом [8] в случае односвязной области, когда действительная u и мнимая v части искомой функции удовлетворяют на границе следующему условию:

$$\operatorname{Re}((\alpha+i\beta)(u+iv)) = \alpha u - \beta v = \gamma,$$

где α, β и γ – заданные действительные функции, причём $\alpha^2+\beta^2=1$. В связи с этим данную задачу стали называть *задачей Римана–Гильберта.* Дальнейшее развитие теория задач Римана–Гильберта получила в трудах Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа, А.П. Солдатова и их учеников. При рассмотрении задачи Римана–Гильберта важную роль играет её индекс

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\arg(\alpha+i\beta)|_\Gamma.$$

Переходя к исследованию уравнения (1.1), уточним для него постановку соответствующей задачи.

Задача типа Римана–Гильберта: найти решение $u(z,\varepsilon)\in C(\overline{D})\bigcap C^\infty(D)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\operatorname{Re}((\alpha+i\beta)u)(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2}g(t), \quad t\in\Gamma, \tag{1.2}$$

и в области D равенствами

$$u(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D, \quad \varkappa\leqslant 0, \tag{1.3}$$

где $g(t)\in C(\Gamma)$ – заданная функция, c – положительная постоянная, z_j – фиксированные точки области D, а $\varkappa$ – индекс функции $\alpha+i\beta$ на Γ.

Отметим, что в случае круговой области задача типа Дирихле для уравнения (1.1) исследована в работе [9].

2. Классическая задача Римана–Гильберта. Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана–Гильберта (подробное их изложение имеется в монографиях [10, 11]). Задача ставится следующим образом: найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, которая на границе $\Gamma=\partial D$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} G\varphi|_\Gamma = g, \tag{2.1}$$

где функция $G=\alpha+i\beta\in C^\nu(\Gamma)$ всюду отлична от нуля (отметим, что здесь отсутствует условие (1.3)). Если $g(z)\equiv 0$, то задача Римана–Гильберта называется *однородной*; в противном случае – *неоднородной.* Воспользуемся компактным изложением [12] решения задачи Римана–Гильберта.

Рассмотрим эту задачу для односвязной области D, ограниченной простым контуром Γ. Пусть $D'=\mathbb{C}\setminus\overline{D}$. Через $C(\overline{D}\vee\overline{D'})$ обозначим класс функций $\phi(z)$, которые определены на $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, аналитичны в любой из открытых связных компонент областей $D_0\subseteq D$ и D', при этом их сужение $\phi|_{D_0}$ на D_0 продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{D_0}$, а сужение $\phi|_{D'}$ на D' – по непрерывности на замыкание $\overline{D'}$. Обозначение $\overline{D}\vee\overline{D'}$ можно трактовать как замыкание множества $D\vee D'$ с помощью односторонних окрестностей контура Γ, так что $D\vee D'=(D\bigcup\Gamma)\vee(D'\bigcup\Gamma)$ (здесь $\Gamma\vee\Gamma$ – дизъюнктное объединение двух экземпляров контура).

Из определения класса $C(\overline{D}\vee\overline{D'})$ вытекает, что в точках $t\in\Gamma$ существуют два граничных значения $\lim\phi(z)$ при стремлении z к t с каждой из двух сторон от Γ. Эти значения удобно обозначать с помощью заданной ориентацией контура, понимая под $\phi^+(t)$ $(\phi^-(t))$ предел $\lim \phi(z)$ для точек $z \in D$, которые в малой окрестности t лежат слева (справа) от Γ, т.е. находятся в соответствующих односторонних окрестностях точки t. В случае, когда область D является единичным кругом, задача (2.1) легко сводится к задаче линейного сопряжения и, следовательно, допускает эффективное решение. С этой целью функцию φ продолжим в область $D' = \{|z| > 1\}$, полагая

$$\varphi(z) = \overline{\varphi(1/\overline{z})}, \quad |z| > 1.$$

Очевидно, что так продолженная функция является аналитической в $\mathbb{C}\backslash\Gamma = D\bigcup D'$ и принадлежит классу $C_0^\mu(\overline{D}\vee\overline{D'})$. Она удовлетворяет условию $\varphi = \varphi_*$, где функция φ_* определяется с помощью инверсии

$$\varphi_*(z) = \overline{\varphi(1/\overline{z})}. \tag{2.2}$$

Операция $\varphi \mapsto \varphi_*$ является линейной над полем $\mathbb{R}$ и инволютивной, т.е. $(\varphi_*)_* = \varphi$. Из определения (2.2) следует, что

$$\varphi_*^\pm(t) = \overline{\varphi^\mp}, \quad t \in \Gamma. \tag{2.3}$$

В частности, краевое условие (2.1) для так продолженной функции φ запишется в виде

$$G\varphi^+ + \overline{G}\varphi^- = 2g. \tag{2.4}$$

Верно и обратное: если $\varphi \in C_0^\mu(\overline{D}\vee\overline{D'})$ – решение задачи (2.4) линейного сопряжения, подчинённое дополнительному требованию $\varphi = \varphi_*$, то сужение функции φ на область D служит решением задачи (2.1).

Очевидно, задачу (2.4) можно представить в форме (2.1) по отношению к коэффициенту $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$. Имеет место

Лемма 2.1. *Пусть $\varkappa = \mathrm{Ind}_\Gamma G$, так что функция $a(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t$ принадлежит классу $C^\mu(\Gamma)$, и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \quad H(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\pi - 2a(t)}{t - z}\,dt. \tag{2.5}$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z)e^{H(z) - H(0)/2}$$

является $\widetilde{G}$-канонической [11, с. 102] и обладает свойством

$$X_*(z) = X(z)z^{-2\varkappa}. \tag{2.6}$$

На линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n введём операцию

$$p^\wedge(z) = z^n p_*(z), \tag{2.7}$$

которая действует по правилу $(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)^\wedge = \overline{c}_n + \overline{c}_{n-1}z + \ldots + \overline{c}_0 z^n$ и, очевидно, инволютивна: $(p^\wedge)^\wedge = p$.

Из тождества (2.6) и определения (2.7) непосредственно следует, что

$$(Xp)_* = Xp^\wedge, \quad p \in P_{-2\varkappa}.$$

Утверждается, что на единичной окружности имеет место соотношение

$$\overline{\left[\frac{tp(t)}{G(t)X^+(t)}\right]} = -\frac{tq^\wedge(t)}{G(t)X^+(t)}, \quad q \in P_{2\varkappa-2}, \quad t \in \Gamma.$$

Обратимся к исходной задаче (2.1) и рассмотрим класс $P_n^0 = \{p \in P_n\colon\ p^\wedge = p\}$. Очевидно, что любой элемент $p \in P_n$ единственным образом представим в виде $p = p^0 + ip^1$, где $p^1 \in P_n^0$, так что P_n^0 – линейное подпространство в P_n размерности $n+1$.

Теорема 2.1. *В условиях леммы 2.1 все решения задачи (2.1) в классе $C^\mu(\overline{D})$ описываются формулой*

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{dt}{t-z} + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa},$$

где функция f удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}.$$

Очевидно, что при $\varkappa \leqslant 0$ размерность пространства $P^0_{-2\varkappa}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2\varkappa+1$. Аналогично, при $\varkappa \geqslant 0$ размерность пространства $P^0_{2\varkappa-2}$ на полем $\mathbb{R}$ равна $2\varkappa-1$. Во всех случаях задача (2.1) имеет индекс $-2\varkappa+1$, который, в частности, отличен от нуля.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг D_0 принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in C^\mu(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$, удовлетворяющую условию $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, так что функция $a(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t$ принадлежит классу $C^\mu(\Gamma)$, и пусть $X(z) = e^{A(z)}$, где функция $A \in C^\mu(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im} A^+ = \frac{\pi}{2} - a, \quad \operatorname{Re} A(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma a(t)|\omega'(t)|\,d_1 t.$$

Тогда все решения задачи (2.1) в классе $C^\mu(\overline{D})$ описываются формулой

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)-\omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2\varkappa},$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}.$$

3. Построение формального решения уравнения (1.1) и основная теорема. В исследовании обобщённых систем Коши–Римана ключевую роль играет интегральный оператор Векуа–Помпейу [13, с. 31]:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1}$$

здесь и всюду ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади.

Если $f \in L^p(D)$, $p > 2$, то функция $U = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar z} = f$, причём оператор $T : L^p(D) \to W^{1,p}(D)$ ограничен. При этом имеет место следующее вложение [13, с. 39] в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D) \subseteq C^\mu(\overline{D}), \quad \mu = 1 - 2/p.$$

В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p > 2$. Если функция f принадлежит пространствам $L^p(D_\delta)$ при любом

$\delta > 0$, но, вообще говоря, не суммируема во всей области D, то под правой частью в (3.1) условимся понимать сингулярный интеграл

$$(Tf)(z) = -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{D_\delta}\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z\neq 0,$$

конечно, в предположении, что указанный предел существует. Вводя обозначение

$$\Omega(z) = -\frac{a}{\pi}\int\limits_{D}\frac{d_2\zeta}{\bar\zeta(\zeta - z)}, \quad z\neq 0,$$

воспользуемся для определения функции Ω следующим утверждением.

Лемма 3.1. *Функция $\Omega(z)$ существует и представима в виде*

$$\Omega(z) = 2a\ln|z| - h(z), \quad z\neq 0,$$

где $h(z)\in H(\overline{D})$ определяется равенством

$$h(z) = \frac{a}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln|\zeta|\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Здесь H – пространство аналитических в области D функций, удовлетворяющих на границе $\Gamma = \partial D$ условию Гёльдера с показателем $\nu = (p-2)/p$, $p > 2$.

Подставляя значение $\Omega(z)$ в формальное решение для $u(z)$, решения уравнения (1.1) можем записать в виде $u(z) = \varphi(z)\exp\{\Omega(z)/\varepsilon\}$. Таким образом, получим следующую формулу:

$$u(z) = \varphi(z)|z|^{2a/\varepsilon}e^{h(z)/\varepsilon},$$

где φ – произвольная аналитическая в области D_0 функция.

Следуя работе [14], в которой описывается класс безрезонансных решений для итерационных задач, введём класс функций U_0, элементы которого (дополнительно к свойствам функций класса U) обладают ещё свойством ограниченности при $\varepsilon\to +0$ и $z\to 0$. Иначе говоря, под решением задачи типа Римана–Гильберта (1.1)–(1.3) будем понимать функцию u, принадлежащую классу

$$U_0 = \{u : u(z) = e^{\tau}((Ig) + XP_{-2\varkappa})(z) \text{ и } u = O(1) \text{ при } \varepsilon\to 0 \text{ и } z\to 0\}.$$

Заметим, что элементы $u\in U_0$, обладают свойством: $u\in C(\overline{D})\bigcap C^{\infty}(D_0)$.

Для наглядного и компактного изложения сформулируем основную теорему для области $D = \{z : |z|\leqslant R\}$. Эта теорема имеет место также для содержащей сингулярную точку $z = 0$ конечной области с границей $\Gamma\in C^{1,\alpha}$.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче (1.1)–(1.3) $a\in\mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ и $g(t)\in C(\Gamma)$. Тогда эта задача в классе U_0 однозначно разрешима и $u(0) = 0$. Более точно, её решение представимо в виде*

$$\widetilde{u}(z,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k(z,\tau)\varepsilon^k = e^{\tau - c^2/\varepsilon^2}\times$$

$$\times\biggl\{[(Ig)(z) + X(z)P_{-2\varkappa}(z)] + \frac{\bar z}{a}\sum_{1}^{\infty}\biggl[\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr]\varepsilon^k\biggr\}, \tag{3.2}$$

где коэффициенты $u_k(\tau,z)$ определяются рекуррентной формулой

$$u_k(\tau,z) = e^{\tau - c^2/\varepsilon^2}\biggl[-\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr], \quad k\geqslant 1.$$

Коэффициенты u_k, $k \in \mathbb{N}$, *являются однородными функциями первой степени по* τ, *в частности,* $u_k(\tau, z) = 0$ *при* $z \in \Gamma$, *и решение (3.2) при* $z \in \Gamma$ *совпадает с точным решением задачи (1.1)–(1.3). При* $|z| < R$ *ряд в интегральном представлении (3.2) при достаточно малом* ε *сходится в обычном смысле абсолютно и равномерно по переменному* z *во всей области* $\overline{D}$ *к точному решению задачи (1.1)–(1.3).*

Доказательство. Для наглядности и упрощения изложения доказательство теоремы проводим в предположении, что граница Γ области D является окружностью, т.е. $\Gamma : |z| = R$ (отметим, что теорема 3 справедлива и для произвольной области с границей $\Gamma \in C^{1,\nu}$).

Тогда функция $h(z)$, приведённая в лемме 3.1, примет более простой вид:

$$h(z) = \frac{a}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln|\zeta|\, d\zeta}{\zeta - z} = 2a \ln R.$$

В этом случае решение уравнения (1.1) принимает вид

$$u(z) = \varphi(z) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} 2a \ln(|z| R^{-1})\right\}, \tag{3.3}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая в области D_0 функция. Чтобы получить решение исходной задачи (1.1)–(1.3), нужно подчинить функцию (3.3) условиям (1.2), (1.3). При этом функция $\varphi(z)$ будет сложным образом зависеть от z и ε, и её описание при стремлении $(z, \varepsilon) \to (0, +0)$ будет весьма затруднительным. Поэтому, вместо того чтобы использовать точное решение уравнения (1.1), попробуем построить разложение решения задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда по степеням параметра ε, применив метод регуляризации Ломова [4].

Согласно методу Ломова, исходя из представления (3.3), вводим новую дополнительную переменную

$$\tau(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon} 2a \ln\frac{|z|}{R}, \quad |z| \leqslant R,$$

производная которой равна

$$\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \frac{a}{\varepsilon \bar{z}}.$$

Для расширенной неизвестной функции $\widetilde{u} = u(z, \tau, \varepsilon)$ (вместо исходного уравнения (1.1)) с учётом того, что

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{a}{\varepsilon \bar{z}}\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

получаем расширенное уравнение

$$\varepsilon \bar{z} \widetilde{u}_{\bar{z}} + a(\widetilde{u}_\tau - \widetilde{u}) = 0. \tag{3.4}$$

Сформулируем соответствующую задачу типа Римана–Гильберта: найти решение $\widetilde{u}$ уравнения (3.4) из класса $C(\overline{D}) \bigcap C^\infty(D_0)$, удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\operatorname{Re}\left((\alpha + i\beta)\tilde{u}\right)(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2} g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3.5}$$

где $g(t) \in C(\Gamma)$, и в области D равенствам

$$\tilde{u}(z_j, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D. \tag{3.6}$$

Согласно теории Пуанкаре решение расширенной задачи (3.4)–(3.6) будем искать в виде

$$\widetilde{u}(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z, \tau) \varepsilon^k. \tag{3.7}$$

Подставляя представление (3.7) в уравнение (3.4), получаем равенство

$$\bar{z}(\varepsilon u_{0\bar{z}} + \varepsilon^2 u_{1\bar{z}} + \ldots + \varepsilon^{k+1} u_{k\bar{z}} + \ldots) + a((u_{0\tau} - u_0) + \varepsilon(u_{1\tau} - u_1) + \ldots + \varepsilon^k(u_{k\tau} - u_k) + \ldots) = 0.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, приходим к следующим итерационным задачам:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} u_{0\tau} - u_0 = 0, \\ \operatorname{Re}(\alpha + i\beta)u_0(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2} g(t), \quad t \in \Gamma, \\ u_0(z_j) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D, \end{cases} \tag{3.8$_0$}$$

$$\varepsilon: \begin{cases} u_{1\tau} - u_1 = \dfrac{\bar{z}}{a}\dfrac{\partial u_0}{\partial \bar{z}}, \\ \operatorname{Re}((\alpha + i\beta)u_1)(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \\ u_1(z_j) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D, \end{cases} \tag{3.8$_1$}$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon^k: \begin{cases} u_{k\tau} - u_k = \dfrac{\bar{z}}{a} d\dfrac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}, \\ \operatorname{Re}((\alpha + i\beta)u_k)(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \\ u_k(z_j) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D, \end{cases} \tag{3.8$_k$}$$

$$\ldots$$

4. Решение итерационных задач. Рассмотрим первую итерационную задачу (3.8_0). Её уравнение

$$u_{0\tau} - u_0 = 0$$

можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение; его решение даётся формулой

$$u_0(\tau, z) = e^\tau \varphi_0(z), \tag{4.1}$$

где $\varphi_0(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного z.

Теперь, используя краевые условия задачи (3.8_0), для вычисления аналитической функции $\varphi(z)$ приходим к следующей задаче:

$$\operatorname{Re}(\alpha + i\beta)\varphi_0(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2} g(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\varphi_0(z_j) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D. \tag{4.2}$$

Сначала рассмотрим первое краевое условие:

$$\operatorname{Re}(\alpha + i\beta)\varphi_0(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2} g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{4.3}$$

Согласно теореме 2.1 при $\varkappa \leqslant 0$ и $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $G \in C^\nu(\Gamma)$ однородная задача Римана–Гильберта имеет ровно $-2\varkappa + 1$ линейно независимых решений; совокупность всех решений даётся формулой

$$\varphi_0(z, \varepsilon) = X(z)(c_0 z^{-2\varkappa} + c_1 z^{-2\varkappa - 1} + \ldots + c_{-2\varkappa}), \tag{4.4}$$

где c_0, c_1, ..., $c_{-2\varkappa}$ – произвольные постоянные. Неоднородная задача с граничным условием (4.3) безусловно разрешима, причём все её решения в классе $C^\mu(\overline{D})$ описываются формулой

$$\varphi_0(z) = e^{-c^2/\varepsilon^2}(Ig)(z) + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa}, \tag{4.5}$$

где

$$(Ig)(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z}.$$

При $\varkappa \geqslant 0$ (см. теорему 2.1) однородная задача Римана–Гильберта не имеет решений, отличных от нуля, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}. \tag{4.6}$$

При этом единственное решение задачи Римана–Гильберта для уравнения $u_{0\tau} - u_0 = 0$ даётся формулой

$$\varphi_0(z) = e^{-c^2/\varepsilon^2}(Ig)(z). \tag{4.7}$$

Теперь подчиним решение (4.5) задачи (3.8_0) второму условию. При $\varkappa \leqslant 0$ равенства $\varphi_0(z_j) = 0$, $j = \overline{1, -2\varkappa+1}$, $z_j \in D$ (см. (4.4), (4.5)) приводят к следующей системе алгебраических уравнений:

$$P_{-2\varkappa}(z_j) = -\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{X(z_j)}(Ig)(z_j), \quad j = \overline{1, -2\varkappa+1}, \quad z_j \in D, \tag{4.8}$$

где $P_{-2\varkappa}(z_j) = c_0 z_j^{-2\varkappa} + c_1 z_j^{-2\varkappa-1} + \ldots + c_{-2\varkappa}$, а числа c_0, c_1, $\ldots$, $c_{-2\varkappa}$ пока не известны. Введя обозначения

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_{-2\varkappa})^{\text{т}}, \quad f_j = -\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{X(z_j)}(Ig)(z_j), \quad F = (f_0, f_1, \ldots, f_{-2\varkappa})^{\text{т}},$$

$$A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_{-2\varkappa+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{-2\varkappa} & z_2^{-2\varkappa} & z_3^{-2\varkappa} & \ldots & z_{-2\varkappa+1}^{-2\varkappa} \end{pmatrix},$$

систему уравнений (4.8) запишем в матричной форме

$$AC = F. \tag{4.9}$$

Матрица $A^{\text{т}}$ имеет определитель $\Delta = |A^{\text{т}}| = |A| \neq 0$, так как он является определителем Вандермонда. Следовательно, система уравнений (4.8) или (4.9) имеет единственное решение

$$C = A^{-1}F.$$

Подставляя найденные значения чисел c_j в многочлен $P_{-2\varkappa}$, найдём окончательно функцию $\varphi_0(z)$ в (4.1) и, значит, построим однозначно решение первой итерационной задачи (3.8_0).

Лемма 4.1. *Пусть* $\varkappa = \operatorname{Ind}(\alpha(t) + i\beta(t))$ *и* $a \in \mathbb{R}^+$.

Если $\varkappa \leqslant 0$, *то первая итерационная задача* (3.8_0) *имеет единственное решение в классе* U_0, *это решение представляется в виде (4.1), где аналитическая функция* φ_0 *вычисляется по формуле (4.4), в которой постоянные* c_0, c_1, $\ldots$, $c_{-2\varkappa}$ *являются решениями алгебраической системы (4.9).*

Если $\varkappa \geqslant 0$, *то однородная итерационная задача* (3.8_0) *не имеет решений, отличных от нуля, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы имели место условия ортогональности (4.6); при этом единственное решение задачи* (3.8_0) *вычисляется по формуле (4.1), где аналитическая функция* φ_0 *имеет вид (4.7).*

Аналогичным образом находим решения следующих итерационных задач. Рассмотрим уравнение (3.8_k):

$$u_{k\tau} - u_k = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}\bar{z}}{a}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}.$$

Решение этого уравнения даётся формулой

$$u_k(\tau,z)=e^{\tau}\biggl[\varphi_k(z)-\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr].$$

Используя первое условие задачи (3.8_k), приходим к следующей задаче:

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_k(t)=\widetilde{g_k(t)},\quad t\in\Gamma,$$

где

$$\widetilde{g_k(t)}=-\operatorname{Re}\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\bigg|_{\Gamma}=0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_k(z)=0,\quad k\geqslant 1,\quad z\in D. \tag{4.10}$$

При $\varkappa>0$ (согласно теореме 2.1) однородная задача (4.10) Римана–Гильберта не имеет решений, отличных от нуля, и $\varphi_k(z)=0,$ $k\geqslant 1,$ $z\in D.$

В результате для коэффициентов $u_k(\tau,z)$ получим следующие выражения:

$$u_k(\tau,z)=e^{\tau-c^2/\varepsilon^2}\biggl[-\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr],\quad k\geqslant 1. \tag{4.11}$$

Тем самым, будут решены все итерационные задачи в классе U_0.

Подставляя найденные коэффициенты $u_0(\tau,z),$ $u_k(\tau,z),$ $k\geqslant 1,$ в ряд (3.7), получаем единственное формальное решение задачи (3.4)–(3.6) в виде ряда

$$\widetilde u(z,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(z,\tau)\varepsilon^k=$$

$$=e^{\tau-c^2/\varepsilon^2}\biggl\{[(Ig)(z)+X(z)P_{-2\varkappa}(z)]+\frac{\bar z}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\biggl[\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr]\varepsilon^k\biggr\}, \tag{4.12}$$

где коэффициенты $u_k(\tau,z)$ определяются по рекуррентной формуле (4.11), функции $X(z)$ и $(Ig)(z)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.5), а $P_\varkappa(z)$ является полиномом степени $\varkappa$ с известными коэффициентами.

5. Обоснование обычной сходимости формальных решений к точному. Согласно формуле (4.1) коэффициент u_0 определяется равенством

$$u_0(\tau,z)=e^{\tau}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0(z),\quad \varphi_0(z)=e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z),$$

где $a\in\mathbb{R}^+,$ $\tau\to-\infty$ при $\varepsilon\to+0,$ $z\neq 0,$ аналитическая функция $\varphi_0,$ являясь решением задачи типа Римана–Гильберта (4.2), вычисляется по формуле (4.4) или (4.7) в зависимости от значения индекса задачи $\varkappa,$ а $\varphi_0^*(z)$ – аналитическая функция комплексного переменного $z.$

Для коэффициента $u_1(\tau,z)$ с учётом того, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial\bar z}=\frac{a}{\varepsilon\bar z}e^{\tau}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z),$$

используя соотношение (4.11), приходим к формуле

$$u_1(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau.$$

Так как
$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar z}=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\frac{a}{\bar z}\varphi_0^*(z)e^{\tau}(\tau+1),$$
то для коэффициента $u_2(\tau,z)$ из соотношения (4.11) получим формулу
$$u_2(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^2}{2}+\tau\right)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{\tau}\right).$$

Аналогично находим формулы для коэффициентов $u_3(\tau,z)$ и $u_4(\tau,z)$:
$$u_3(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^3}{6}+\tau^2+\tau\right)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}\right).$$
$$u_4(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^4}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^4}{24}+\frac{\tau^3}{6}+\frac{\tau^3}{3}+\frac{\tau^2}{2}+\tau^2+\tau\right)=$$
$$=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^4}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^4\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{6\tau}+\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{3\tau}+\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^3}\right).$$

Заметив закономерность образования этих формул, несложно методом математической индукции доказать для коэффициента $u_k(\tau,\varepsilon)$, $k\geqslant 0$, представления
$$u_k(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^k}{k!}+m_{k-1}\tau^{k-1}+\ldots+m_1\tau\right)=$$
$$=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^k\left(\frac{1}{k!}+m_{k-1}\frac{1}{\tau}+\ldots+m_1\left(\frac{1}{\tau}\right)^{k-1}\right)=$$
$$=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)\frac{e^{\tau}}{\theta^k}\left(\frac{1}{k!}+m_{k-1}\theta+\ldots+m_1\theta^{k-1}\right), \tag{5.1}$$
где m_j – некоторые положительные рациональные числа,
$$m_1=1,\quad m_j\leqslant\frac{k-1}{2},\quad \theta=\frac{1}{\tau}=\frac{-\varepsilon}{2a\ln(R/|z|)}.$$

Заметим, что $\theta<0$, $|\theta|\to+0$ при $\varepsilon\to+0$, если $0<r_0\leqslant|z|<R$. Введём обозначение
$$P_k=P_k(\theta)=\frac{1}{k!}+m_{k-1}\theta+\ldots+m_1\theta^{k-1}.$$

Тогда $u_k(\tau,z)=\varepsilon^{-k}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)\theta^{-k}e^{1/\theta}P_k(\theta)$. Имеем
$$|P_k|\leqslant\frac{1}{k!}+|\theta|(m_{k-1}+m_{k-2}|\theta|\ldots+m_1|\theta|^{k-2})\leqslant$$
$$\leqslant\left[\max\{m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}\}=\frac{k-1}{2}\right]\leqslant\frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|(1+|\theta|+\ldots+|\theta|^{k-2})\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|(1+|\theta|+\ldots+|\theta|^{k-2}+\ldots)=\frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|}\leqslant 1+\frac{k-1}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|}. \tag{5.2}$$

Продолжая далее оценки сомножителей последнего выражения в (5.1), получаем
$$\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\frac{1}{\theta^k}=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\frac{(2a\ln(R/|z|))^k}{\varepsilon^k}<\frac{\varepsilon^4(2a\ln(R/r_0))^k}{c^{2k+4}},$$

где $c = 2a\ln(R/r_0) > 1$, при $0 < r_0 \leqslant |z| < R$. Здесь мы воспользовались известным неравенством

$$\frac{n^k}{e^n} < \frac{1}{n^2}$$

при $n > N_0(k)$. Значение числа $c = 2a\ln(R/r_0)$ подобрано, исходя из неравенства $0 < r_0 \leqslant \leqslant |z| \leqslant R$. Значит, для каждого фиксированного $r_0 \in (0, R)$ имеем

$$|u_k(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(z,\varepsilon)}| < \frac{\varepsilon^4}{c^{k+4}}|\varphi_0^*(z)|e^{1/\theta}|P_k|, \quad 0 < r_0 \leqslant |z| < R. \tag{5.3}$$

Следовательно, учитывая, что $|\varphi_0(z)| \leqslant M_0 = \mathrm{const}$ (при всех z, для которых $|z| \leqslant R$), и принимая во внимание неравенства $e^{1/\theta} < 1$, $P_k < k+4$, для сужения частичной суммы ряда (4.12) получаем оценку

$$|S_N(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k+4}\frac{M_0(k+4)}{c^{k+4}} < M_0\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k+4}\frac{k+4}{c^{k+4}} = \mathrm{const},$$

так как последний числовой ряд сходится, что легко проверяется согласно признаку Коши. Поэтому частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}|\varepsilon^k$ ограничены. Отсюда вытекает, что ряд (4.12) сходится абсолютно в указанной точке z для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое число.

Аналогичными рассуждениями показывается, что ряд для производной

$$\varepsilon\bar{z}\sum_{k=1}^{\infty} u_{k\bar{z}}(\tau, z, \varepsilon)\bigg|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}$$

также сходится абсолютно в указанной точке z. Следовательно, сумма ряда (4.12) является точным решением исходной задачи (1.1)–(1.3).

6. Обоснование асимптотической сходимости. Так как ряд (4.12) сходится абсолютно в указанной точке z для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое число, то должна иметь место его асимптотическая сходимость.

Решения уравнения (3.4) представим в виде

$$u(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k u_k(z, \tau) + \varepsilon^{N+1}R_N(z, \tau, \varepsilon).$$

Подставим решения $u_0(z, \tau)$, …, $u_N(z, \tau)$ в системы (3.8_0), …, (3.8_k) $(k = N)$ соответственно. Полученные тождества умножим на 1, ε, …, ε^N соответственно и просуммируем, в результате получим тождество

$$\varepsilon\bar{z}\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k u_{k\bar{z}}(z, \tau) - a\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k(u_{k\tau}(z, \tau) - u_k(z, \tau)) = -\bar{z}\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial \bar{z}}.$$

Вводя обозначение $R_N = u - S_N$, относительно остатка ряда $R_N(z, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\bar{z}R_{N\bar{z}}(z, \tau, \varepsilon) - a(R_{N\tau}(z, \tau, \varepsilon) - R_N(z, \tau, \varepsilon)) = -\bar{z}\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial \bar{z}}. \tag{6.1}$$

Производя сужение в (6.1) при

$$\tau(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R} = \frac{\psi(z)}{\varepsilon},$$

получаем

$$\varepsilon\bar{z}R_{N\bar{z}} - aR_N = -\bar{z}\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial\bar{z}} \equiv f(z,\varepsilon), \tag{6.2}$$

где правая часть уравнения (6.2) выражается формулой

$$-f(z,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{N+1}\bar{z}u_{N\bar{z}}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = a\varepsilon^N u_N + a\varepsilon^N\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)\times$$

$$\times\biggl[\frac{1}{(N-1)!}\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)^{N-1} + \frac{m_{N-1}}{(N-2)!}\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)^{N-2} + \ldots + m_1\biggr] =$$

$$= a\varepsilon^N\biggl(u_N + \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\frac{e^\tau}{\theta^{N-1}}P'_N\biggr), \tag{6.3}$$

в которой u_N, согласно (5.3), определятся равенством

$$u_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^N}\varphi_0^*(z)\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)\times$$

$$\times\biggl[\frac{1}{N!}\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)^N + \frac{c_{N-1}}{(N-1)!}\biggl(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr)^{N-1} + \ldots + c_1\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\biggr] =$$

$$= \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^N}\varphi_0^*(z)e^\tau\biggl(\frac{\tau^N}{N!} + m_{N-1}\tau^{N-1} + \ldots + m_1\tau\biggr).$$

Таким образом, из формулы (6.3) вытекает, что функция $f(z,\varepsilon)$ представима в виде

$$-f(z,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{N+1}\bar{z}u_{N\bar{z}}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = a\varepsilon^N\biggl(u_N + \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\frac{e^\tau}{\theta^{N-1}}P'_N\biggr).$$

Вследствие уравнения (6.2) и условий задачи Римана–Гильберта для нахождения R_N получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered} R_{N\bar{z}} - R_N = f(z,\varepsilon),\\ \operatorname{Re}((\alpha+i\beta)R_N)(z) = 0, \quad t\in\Gamma,\\ R_N(z_j) = 0, \quad j = \overline{1,\varkappa+1}, \quad z_j\in D. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Решение уравнения (6.2), т.е. первого уравнения в (6.4), даётся формулой

$$R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = e^\tau\biggl[\varphi_0(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{e^{-\tau}f(\zeta,\varepsilon)\,d_2\zeta}{\zeta-z}\biggr]_{\tau=\tau(\varepsilon,z)},$$

$$R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = (e^\tau\varphi_0(z) + e^\tau T(e^{-\tau}f)) \equiv R_{Na} + R_{Nb}.$$

Аналогично оценке (5.2) величины P_k для P'_N получаем, что

$$|P'_N| \leqslant 1 + \frac{(N-1)^2}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|}. \tag{6.5}$$

Далее имеем

$$\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\frac{1}{\theta^{N-1}} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{2N-2}}\frac{(2a\ln(R/|z|))^{N-1}}{\varepsilon^{2N-2}} < \frac{\varepsilon^4c^{N-1}}{c^{2N-2}} < \frac{\varepsilon^4}{c^{N-1}},$$

где $c = 2a\ln(R/r_0) > 1$, при $0 < r_0 \leqslant |z| < R$.

Следовательно, для функции $f(z,\varepsilon)$ верна оценка

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant a\varepsilon^N \left[|u_N| + \frac{\varepsilon^4}{c^{N-1}}|\varphi_0^*(z)|e^\tau |P_N'|\right].$$

Тогда с учётом неравенств (5.2), (5.3) и (6.5) получаем

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant a\varepsilon^{N+1} M_0 e^{1/\theta}\left[\frac{N+4}{c^{N+4}} + \frac{(N-1)^2}{c^{N-1}}\right] <$$

$$< a\varepsilon^{N+1} M_0 e^{1/\theta}\left[\sum_{k=N+4}^{\infty}\frac{k}{c^k} + \sum_{k=N-1}^{\infty}\frac{k^2}{c^k}\right] < \varepsilon^{N+1} M_0 e^{1/\theta}[s_1+s_2] < aC_1 M_0 e^{1/\theta}\varepsilon^{N+1},$$

т.е.

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant aC_1 e^{1/\theta}\varepsilon^{N+1}.$$

Заметим, что согласно неравенству Гёльдера при $1/p + 1/q = 1$, $p > 2$, справедливы неравенства

$$|Tf| = \left| -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{f(\zeta,\varepsilon)\,d_2\zeta}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_D |f(\zeta,\varepsilon)|^p\,d_2\zeta\right)^{1/p}\left(\int\limits_D |(\zeta-z)|^{-q}\,d_2\zeta\right)^{1/q}.$$

Оценим величину R_{Nb}:

$$|R_{Nb}| = e^\tau |T(e^{-\tau} f)| \leqslant \frac{1}{\pi} aC_1 M_0 e^{1/\theta} M_p \varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{\pi} aC_1 M_0 M_p \varepsilon^{N+1},$$

где

$$M_p = \left(\int\limits_D |(\zeta - z)|^{-q}\,d_2\zeta\right)^{1/q} = \left(\frac{2\pi}{2-q}(R^{2-q} - r_0^{2-q})\right)^{1/q}, \quad D = \{z : r_0 \leqslant |z| \leqslant R\}.$$

Аналогичным образом для R_{Na}, воспользовавшись решением задачи Римана–Гильберта (6.4), получаем оценку

$$|R_{Na}| < \frac{1}{\pi} aC_1 M_1 M_p \varepsilon^{N+1}.$$

Следовательно,

$$|R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}| < |R_{Na}| + |R_{Nb}| = C_N\varepsilon^{N+1},$$

где $C_N = \pi^{-1} aC_1(M_0 + M_1)M_p$, причём постоянная C_N не зависит от ε.

Автор выражает искреннюю благодарность А.П. Солдатову и В.Ф. Сафонову за ценные советы и обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
2. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущённые задачи и метод регуляризации. М., 2012.
3. *Рабинович Ю.Л., Хапаев М.М.* Линейные уравнения с малым параметром в окрестности регулярной особой точки // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 2. С. 268–271.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
5. *Ломов И.С.* Необходимые и достаточные условия существования целых аналитических решений сингулярно возмущенных уравнений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 811–815.
6. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.

7. *Риман Б.* Сочинения. М., 1948.
8. *Hilbert D.* Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig; Berlin, 1924.
9. *Расулов А.Б.,Федоров Ю.С.* Сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с особенностью в младшем коэффициенте // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 10. С. 1757–1763.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М, 1977.
12. *Солдатов А.П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43. № 1. С. 184–202.
13. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
14. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Обобщение метода регуляризации на сингулярно возмущённые интегродифференциальные уравнения в частных производных // Изв. вузов. 2018. № 3. С. 9–22.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 27.11.2021 г.
После доработки 27.11.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.