ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 385–394

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОБЩЕГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ

© 2022 г. А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов

Методом обратной задачи рассеяния выводится эволюция данных рассеяния несамосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля, потенциал которого является решением общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Приведён пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

DOI: 10.31857/S0374064122030086, **EDN:** BYMARS

Введение. Метод обратной задачи рассеяния ведёт своё начало с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ сведением её к обратной задаче рассеяния для самосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой. Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Л.Д. Фаддеева [2] (подробное изложение см. также в [3, гл. 3, § 5; 4, гл. 6, § 5]). Затем П. Лакс [5] заметил универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ. В современной научной литературе большое внимание привлекают интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками. Они имеют важные приложения в физике плазмы, гидродинамике, физике твёрдого тела и т.д. [6–11].

Нагруженными дифференциальными уравнениями принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части функционалы от решения, в частности, значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [12, 13] и А.И. Кожанова [14].

Отметим, что обратная задача рассеяния для несамосопряжённого оператора Штурма–Лувилля на всей оси изучалась в работах [15, 16]. Интегрирование уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций рассмотрено в работе [17]. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ в классе периодических функций исследовалось в [18, 19].

Зададим оператор H равенством

$$H := -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u',$$

здесь и далее $u = u(x,t)$, а штрих обозначает частную производную по x, т.е. $u' = u_x$. Согласно [4, гл. 12, § 2] существует последовательность (P_k), $k \in \{0\}\bigcup\mathbb{N}$, полиномов (от u и производных u по x), для которой справедливы равенства $HP_k = P'_{k+1}$. В частности, первые четыре элемента этой последовательности следующие:

$$P_0 = -\frac{1}{2}, \quad P_1 = -\frac{1}{2}u, \quad P_2 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2, \quad P_3 = -\frac{1}{8}u_{xxxx} + \frac{5}{4}uu_{xx} + \frac{5}{8}(u_x)^2 - \frac{5}{4}u^3.$$

Положим

$$L(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + u. \tag{1}$$

Оператор

$$B_q := \sum_{k=0}^{q}\left(\frac{1}{2}P_k' - P_k\frac{d}{dx}\right)(2L)^{q-k}$$

удовлетворяет соотношению Лакса $[B_q, L] = B_qL - LB_q = -P_{q+1}'$.

Пусть $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p$ – произвольные действительные числа. Введём следующие обозначения:

$$X_q = -P_{q+1}', \quad Y_p = \sum_{q=0}^{p} c_qB_q, \quad Z_p = \sum_{q=0}^{p} c_qX_q.$$

Тогда справедливо равенство $[Y_p, L] = Z_p$. Уравнение

$$u_t = Z_p(u)$$

называется *общим уравнением КдФ*. В частности, при $p=1,\ c_0=0,\ c_1=4$ и $p=2,\ c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=8$ соответственно имеем

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u_t = u_{xxxxx} - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xx} + 30u^2u_x.$$

Рассмотрим общее нагруженное уравнение КдФ с источником, имеющим вид

$$u_t - Z_p(u) + \gamma(t)F(u(0,t))u_x = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{l}\frac{d}{dx}(\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l}), \tag{2}$$

$$L(t)\varphi_j^l = k_j^2\varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1} \quad (\operatorname{Im}k_j > 0), \quad j=\overline{1,N}, \quad l=\overline{0,m_j-1}, \tag{3}$$

где $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, оператор L задан равенством (1), C_m^l – биномиальные коэффициенты, $F(z)$ – некоторый полином от переменной z, а $\gamma(t)$ – заданная непрерывная функция. Функции $\varphi_j^l = \varphi_j^l(x,t)$ при каждом неотрицательном t принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$ квадратично суммируемых на оси функций, а $\varphi_j^0 = \varphi_j^0(x,t)$ – собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_j(t) = k_j^2(t)$ $(\operatorname{Im}k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $l=\overline{0,m_j-1}$, $j=\overline{1,N}$.

Система уравнений (2), (3) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

где начальная функция $u_0(x)$ задана, комплекснозначна и обладает свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_0(x)|e^{\varepsilon|x|}\,dx < \infty; \tag{5}$$

2) несамосопряжённый оператор $L(0)$ имеет ровно N комплексных собственных значений $\lambda_1(0),\ \lambda_2(0),\ \ldots,\ \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0),\ m_2(0),\ \ldots,\ m_N(0)$ соответственно и не имеет спектральных особенностей.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^{m_j-1}(x,t)\varphi_j^{m_j-1-l}(x,t)\,dx = A_{m_j-1-l}^{j}(t), \quad l=\overline{0,m_j-1}, \quad j=\overline{1,N}, \tag{6}$$

где $A_{m_j-1-l}^{j}(t)$ – заданные непрерывные функции.

Пусть функция $u(x,t)=\operatorname{Re}u(x,t)+i\operatorname{Im}u(x,t)$ обладает необходимой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$ так, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(|u(x,t)|e^{\varepsilon|x|}+\sum_{j=1}^{2p+1}\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx<\infty. \tag{7}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, $l=\overline{0,m_j-1}$, задачи (2)–(7) с помощью метода обратной задачи рассеяния для несамосопряжённого оператора $L(t)$.

1. Необходимые сведения. Рассмотрим уравнение

$$L(0)y:=-y''+u_0(x)y=k^2y,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

потенциал $u_0(x)$ в котором предполагается комплекснозначным и удовлетворяющим условию (5). В этом пункте приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения о прямой и обратной задачах рассеяния для уравнения (8). Обозначим через $e_+(x,k)$ и $e_-(x,k)$ решения уравнения (8) с условиями на бесконечности при $\operatorname{Im}k>-\varepsilon/2$:

$$e_+(x,k)=e^{ikx}+o(1)\quad\text{при}\quad x\to\infty,\quad e_-(x,k)=e^{-ikx}+o(1)\quad\text{при}\quad x\to-\infty. \tag{9}$$

Эти решения называются *решениями Йоста*, при выполнении условия (5) они существуют, единственны и голоморфны по k в полуплоскости $\operatorname{Im}k>-\varepsilon/2$ и имеют следующие представления:

$$e_\pm(x,k)=e^{\pm ikx}\pm\int\limits_x^{\pm\infty}K_\pm(x,y)e^{\pm iky}\,dy, \tag{10}$$

где ядра $K_\pm(x,y)$ связаны с потенциалом $u_0(x)$ соотношением

$$u_0(x)=\mp2\frac{dK_\pm(x,x)}{dx}. \tag{11}$$

Отметим также, что пары функций $(e_\pm(x,k),e_\pm(x,-k))$ образуют в полосе $|\operatorname{Im}k|<\varepsilon/2$ фундаментальные системы решений, вронскианы $W\{e_\pm(x,k),e_\pm(x,-k)\}$ которых равны $\mp2ik$.

Обозначим через $\omega(k)$ и $v(k)$ вронскианы

$$\omega(k):=e_-(x,k)e_+'(x,k)-e_-'(x,k)e_+(x,k)\quad\text{и}\quad v(k):=e_+(x,-k)e_-'(x,k)-e_-(x,k)e_+'(x,-k).$$

Функция $\omega(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im}k>-\varepsilon/2$ и обладает асимптотикой $\omega(k)=2ik(1+O(1/k))$ при $|k|\to\infty$, равномерной в каждой полуплоскости $\operatorname{Im}k\geqslant\eta$, $\eta>-\varepsilon/2$. Отсюда следует, что в полуплоскости $\operatorname{Im}k\geqslant0$ функция $\omega(k)$ имеет конечное число нулей (в общем случае кратных). Требование отсутствия спектральных особенностей оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $\omega(k)$, т.е. $\omega(k)\neq0$, $k\in\mathbb{R}$. Обозначим через $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_N$ невещественные нули функции $\omega(k)$ $(\operatorname{Im}k_j>0$, $j=\overline{1,N})$, тогда $\lambda_j=k_j^2$, $j=\overline{1,N}$, – собственные значения оператора $L(0)$. Кратность корня k_j уравнения $\omega(k)=0$ обозначим через m_j, $j=\overline{1,N}$.

Функция $v(k)$ в отличие от $\omega(k)$ задана только в полосе $|\operatorname{Im}k|<\varepsilon/2$. Функции $\omega(k)$ и $v(k)$ в полосе $|\operatorname{Im}k|<\varepsilon/2$ связаны соотношением

$$\omega(k)\omega(-k)-v(k)v(-k)=4k^2. \tag{12}$$

Кроме того, в полосе $|\operatorname{Im}k|<\varepsilon/2$ справедливо равенство

$$e_-(x,k)=\frac{v(k)}{2ik}e_+(x,k)+\frac{\omega(k)}{2ik}e_+(x,-k). \tag{13}$$

Существуют последовательности чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ и $\{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}$, $j = \overline{1, N}$, называемые *нормировочными цепочками*, такие, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^s e_-(x,k)\right)\Big|_{k=k_j} = \sum_{\nu=0}^{s} \chi_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^\nu e_+(x,k)\right)\Big|_{k=k_j},$$

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s e_-(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2} = \sum_{\nu=0}^{s} \theta_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\nu e_+(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2}, \tag{14}$$

где $s = \overline{0, m_j-1}$, $j = \overline{1, N}$, при этом $\chi_0^j \neq 0$, $\theta_0^j \neq 0$. Здесь и далее ветвь квадратного корня $k = \sqrt{\lambda}$ выбирается так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$. Цепочки нормировочных чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ и $\{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}$, $j = \overline{1, N}$, связаны между собой с помощью рекуррентных соотношений.

Известно (см. [15, 16]), что ядро $K_+(x,y)$ оператора преобразования (10) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K_+(x,y) + F_+(x+y) + \int_x^\infty K_+(x,s)F_+(s+y)ds = 0, \quad x \leqslant y,$$

где

$$F_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{ikx}\,dk + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_j-1} \chi_{m_j-\nu-1}^j \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dk^\nu}\left(\frac{2k(k-k_j)^{m_j}}{w(k)}e^{ikx}\right), \tag{15}$$

$$S(k) := \frac{v(k)}{w(k)}, \tag{16}$$

при этом потенциал $u_0(x)$ находится по формуле (11).

Определение. Набор $\{S(k), \lambda_j, \chi_0^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\colon\ j = \overline{1, N}\}$ или $\{S(k), \lambda_j, \theta_0^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\colon\ j = \overline{1, N}\}$ называется *данными рассеяния* для оператора $L(0)$.

Нахождение комплекснозначного потенциала $u_0(x)$ по данным рассеяния называют *обратной задачей.*

Справедлива [15]

Теорема 1. *Данные рассеяния однозначно определяют оператор* L.

В дальнейшем часто будем пользоваться результатами следующих лемм, которые доказываются непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Если функции* $y(x,\zeta)$ *и* $z(x,\eta)$ *являются решениями уравнений* $Ly = \zeta^2 y$ *и* $Lz = \eta^2 z$, *то справедливо соотношение*

$$\frac{d}{dx}W\{y,z\} = (\zeta^2 - \eta^2)yz.$$

Лемма 2. *Пусть функции* e_- *и* φ_j^l, $l = \overline{0, m_j-1}$, *являются решениями уравнений*

$$Le_- = \lambda e_- \quad \text{и} \quad L\varphi_j^l = \lambda_j\varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1}, \quad l = \overline{0, m_j-1}, \quad \lambda = k^2, \tag{17}$$

соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}W\{\varphi_j^l, e_-\} = (\lambda_j - \lambda)\varphi_j^l e_- + l\varphi_j^{l-1}e_-.$$

Придавая в равенстве (17) l последовательно значения $0, 1, \ldots,$ получаем

Следствие 1. *При выполнении условий леммы 2 и* $\lambda \neq \lambda_j$ *справедливы соотношения*

$$\varphi_j^l e_- = \sum_{r=0}^{l} \frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{r+1}} \frac{l!}{(l-r)!} \frac{d}{dx} W\{e_-, \varphi_j^{l-r}\},$$

$$\varphi_j^{m_j-1-l} e_- = \sum_{r=0}^{m_j-1-l} \frac{(m_j-1-l)!}{(\lambda-\lambda_j)^{m_j-r}(m_j-1-l-r)!} \frac{d}{dx} W\{e_-, \varphi_j^{m_j-1-l-r}\}. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство (18) n раз по λ и полагая $\lambda=\lambda_j$, докажем

Следствие 2. *Справедливы соотношения*

$$\varphi_j^{l-1} e_-^{(n)}(x,k_j) = \frac{n}{l} \varphi_j^l e_-^{(n-1)}(x,k_j) - \frac{1}{l}\frac{d}{dx} W\{e_-^{(n)}(x,k_j), \varphi_j^l(x,k_j)\}, \quad l = \overline{1, m_j-1}.$$

2. Эволюция данных рассеяния. Введём обозначение

$$G(x,t) := -\gamma(t) F(u(0,t)) u_x + 2\sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^l \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_j^l \varphi_j^{m_j-1-l}) \tag{19}$$

и будем рассматривать более общую задачу, а именно, рассмотрим уравнение

$$u_t - Z_p(u) = G(x,t). \tag{20}$$

Будем искать пару Лакса для уравнения (20) в виде

$$-\frac{\partial^2 e_-(x,t)}{\partial x^2} + (u-\lambda) e_-(x,,t) = 0,$$

$$\frac{\partial e_-(x,t)}{\partial t} = Y_p e_-(x,t) + \frac{1}{2} i\sqrt{\lambda} \sum_{l=0}^{p} c_l (2\lambda)^l e_-(x,t) + \Phi(x,t), \tag{21}$$

где $e_-(x,t) = e_-(x,\sqrt{\lambda},t)$ – решение Йоста уравнения $L(t)y=\lambda y$ с асимптотикой (9). Используя тождество

$$\frac{\partial^3 e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^3 e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t \partial x^2},$$

на основании равенств (19)–(21) придём к уравнению

$$-\Phi_{xx} + (u-\lambda)\Phi = -G(x,t) e_-(x,\sqrt{\lambda},t).$$

Будем искать его решения в виде

$$\Phi(x,t) = C(x) e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + B(x) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t).$$

Тогда для определения функций $C(x)$ и $B(x)$ выводим систему уравнений

$$C'(x) e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + B'(x) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) = 0,$$

$$C'(x) e_-'(x,\sqrt{\lambda},t) + B'(x) e_-'(x,-\sqrt{\lambda},t) = G(x,t) e_-(x,\sqrt{\lambda},t),$$

решение которой имеет представление

$$C(x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx, \quad B(x) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx.$$

Следовательно, в этом случае второе уравнение системы (21) примет следующий вид:

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = Y_p e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + \frac{1}{2} i\sqrt{\lambda} \sum_{l=0}^{p} c_l (2\lambda)^l e_-(x,\sqrt{\lambda},t) -$$

$$- \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) \int\limits_{-\infty}^{x} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) \int\limits_{-\infty}^{x} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx. \tag{22}$$

Переходя в равенстве (22) к пределу $x \to \infty$ и учитывая (5), (9), (12), (13), получаем

$$\frac{\partial \omega(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = -\frac{\omega(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx -$$

$$- \frac{v(-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx, \tag{23}$$

$$\frac{\partial v(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = i\sqrt{\lambda} \sum_{l=0}^{p} c_l (2\lambda)^l v(\sqrt{\lambda},t) - \frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx -$$

$$- \frac{\omega(-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx. \tag{24}$$

Умножая равенство (24) на $\omega(\sqrt{\lambda},t)$ и вычитая из него равенство (23), умноженное на $v(\sqrt{\lambda},t)$, а также используя (13) и (16), найдём, что

$$\frac{\partial S(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = i\sqrt{\lambda} \sum_{l=0}^{p} c_l (2\lambda)^l S(\sqrt{\lambda},t) + \frac{2i\sqrt{\lambda}}{\omega^2(\sqrt{\lambda},t)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx.$$

Лемма 3. *Справедливы тождества*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t) e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\, dx = -\gamma(t) F(u(0,t)) v(\sqrt{\lambda},t) \omega(\sqrt{\lambda},t), \tag{25}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t) e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)\, dx = \gamma(t) F(u(0,t)) v(\sqrt{\lambda},t) v(-\sqrt{\lambda},t), \tag{26}$$

где функция $G(x,t)$ определена равенством (19).

Доказательство. Действительно, используя определение (19), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t) e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\, dx = -\gamma(t) F(u(0,t)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) u_x(x,t)\, dx +$$

$$+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l})e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx=$$

$$=2\gamma(t)F(u(0,t))\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e_-''(x,\sqrt{\lambda},t)+\lambda e_-(x,\sqrt{\lambda},t))e_-'(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\biggl(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\Bigl[\varphi_j^l e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j^{m_j-1-l}+$$

$$+\varphi_j^{m_j-1-l}e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j^{m_j-1-l}\varphi_j^l-2\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l}\frac{\partial}{\partial x}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\Bigr]\biggr)\,dx=$$

$$=\gamma(t)F(u(0,t))\int\limits_{-\infty}^{\infty}[((e_-'(x,\sqrt{\lambda},t))^2)'+k^2(e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t))']\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\biggl(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}[\varphi_j^l e_-W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l}\}+\varphi_j^{m_j-1-l}e_-W\{e_-,\varphi_j^l\}]\biggr)\,dx.$$

Отсюда, воспользовавшись следствием 1, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,t)e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx=\gamma(t)F(u(0,t))\lim_{R\to\infty}[\lambda e_-^2(s,\sqrt{\lambda},t)+(e_-'(s,\sqrt{\lambda},t))^2]|_{-R}^{R}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl[\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{l}\frac{l!}{(l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^{l-r}\})+$$

$$+\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}W\{e_-,\varphi_j^l\}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l-r}\})\Bigr]\,dx=$$

$$=\gamma(t)F(u(0,t))\lim_{R\to\infty}\biggl[\lambda\biggl(\frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}R}+\frac{w(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}R}\biggr)^2-$$

$$-\lambda e^{2i\sqrt{\lambda}R}+\biggl(\frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2}e^{i\sqrt{\lambda}R}-\frac{w(\sqrt{\lambda},t)}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}R}\biggr)^2+\lambda e^{2i\sqrt{\lambda}R}\biggr]=$$

$$=-\gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)\omega(\sqrt{\lambda},t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^l\})W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l-r}\}\,dx=$$

$$=-\gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)w(\sqrt{\lambda},t).$$

Аналогично доказывается равенство (26). Лемма доказана.

Согласно лемме 1 и равенствам (25) и (26) имеем $\omega_t(\sqrt{\lambda},t)=0$. Следовательно, учитывая определение (16), заключаем, что

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial S(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=\left(i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^l+2i\sqrt{\lambda}\gamma(t)F(u(0,t))\right)S(\sqrt{\lambda},t). \tag{28}$$

Теперь перейдём к нахождению эволюции нормировочной цепочки $\{\theta_0^n,\theta_1^n,\ldots,\theta_{m_j-1}^n\}$, соответствующей собственному значению λ_n, $n=\overline{1,N}$. Для этого запишем равенство (22) в следующем виде:

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=Y_pe_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^le_-(x,\sqrt{\lambda},t)-$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\left[e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)G\,dx-e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x}e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)Gdx\right]=$$

$$=Y_pe_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^le_-(x,\sqrt{\lambda},t)+$$

$$+\frac{\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\Bigg[e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)u(x,t)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{x}u(s,t)(e_-'(s,\sqrt{\lambda},t)e_-(s,-\sqrt{\lambda},t)+e_-(s,\sqrt{\lambda},t)e_-'(s,-\sqrt{\lambda},t))ds\Bigg]-$$

$$-\frac{\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\left[e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)u(x,t)-\int\limits_{-\infty}^{x}2e_-'(s,\sqrt{\lambda},t)e_-(s,\sqrt{\lambda},t)u(s,t)ds\right]+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^l\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!}\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-(x,\sqrt{\lambda},t),\varphi_j^{m_j-1-l-r}\})\,dx\,\varphi_j^l,$$

и, продолжив преобразования, окончательно получим

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=Y_pe_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}ik\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^le_-(x,\sqrt{\lambda},t)-\gamma(t)F(u(0,t))e_-'(x,k,t)-$$

$$-i\sqrt{\lambda}\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\varphi_j^l\int\limits_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^l\varphi_j^{m_j-1-l}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx.$$

Дифференцируя это равенство m_n-1 раз по λ, полагая $\lambda=\lambda_n$, устремляя x к бесконечности, используя следствие 2, равенства (14) и приравнивая коэффициенты при $(ix)^le^{i\sqrt{\lambda_n}x}$, $l=\overline{m_n-1,0}$, найдём аналог уравнений Гарднера–Грина–Крускала–Миуры

$$\frac{d\theta_r^n}{dt}=\left[\sum_{l=0}^{p}2^lic_l\lambda_n^{l+1/2}+A_0^n(t)-2i\lambda_n^{1/2}\gamma(t)F(u(0,t))\right]\theta_r^n+$$

$$+\left[\sum_{l=0}^{p}2^lic_l\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda_n^{l-1/2}+A_1^n(t)-i\left(\frac{1}{2}\lambda_n^{-1/2}+1\right)\gamma(t)F(u(0,t))\right]\theta_{r-1}^n+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{r}\Bigg[\sum_{l=0}^{p}2^lc_l\frac{i}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\left(l+\frac{1}{2}-\mu\right)\lambda_n^{l-\nu+1/2}+A_\nu^n(t)+$$

$$+\frac{i(-1)^\nu(2\nu-3)!}{2^{2\nu-2}\nu!(\nu-2)!}\lambda_n^{-(2\nu-1)/2}\gamma(t)F(u(0,t))\Bigg]\theta_{r-\nu}^n,\quad r=\overline{0,m_n-1},\quad n=\overline{1,N}. \tag{29}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Если система функций* $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $l=\overline{0,m_j-1}$, $j=\overline{1,N}$, *является решением задачи (2)–(7), то данные рассеяния* $\{S(\sqrt{\lambda},t),\lambda_n(t),\theta_0^n(t),\theta_1^n(t),\ldots,\theta_{m_n-1}^n(t),\ n=\overline{1,N}\}$ *несамосопряжённого оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *удовлетворяют дифференциальным уравнениям (27)–(29).*

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым позволяют применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (2)–(7).

Пусть задана функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (5). Тогда решение задачи (2)–(7) находится по следующему алгоритму.

Шаг 1. Решая прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$, получаем данные рассеяния $\{S(k),\lambda_j,\theta_0^j,\theta_1^j,\ldots,\theta_{m_j-1}^j:\ \ j=\overline{1,N}\}$ для оператора $L(0)$.

Шаг 2. Находим, согласно теореме 2, данные рассеяния при $t>0$:

$$\{S(k,t),\lambda_j(t),\theta_0^j(t),\theta_1^j(t),\ldots,\theta_{m_j-1}^j(t):\ \ j=\overline{1,N}\}.$$

Шаг 3. Используя метод, основанный на интегральном уравнении Гельфанда–Левитана–Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. получаем единственную (согласно теореме 1) функцию $u(x,t)$ по данным рассеяния при $t>0$, найденным на предыдущем шаге.

Шаг 4. После этого решаем прямую задачу для несамосопряжённого оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ и находим функции $\varphi_j^l(x,t)$, $l=\overline{0,m_{j-1}}$, $j=\overline{1,N}$.

Пример. В заключение приведём пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t+20u_xu_{xx}-30u^2u_x+10uu_{xx}-u_{xxxxx}=-\gamma(t)u(0,t)u_x+2\frac{\partial}{\partial x}(\varphi^2(x,t)), \tag{30}$$

$$L(0)\varphi:=-\varphi''+u_0(x)\varphi=k^2\varphi, \tag{31}$$

$$u(x,0)=u_0(x)=\frac{8a^2e^{2iax}}{(1+e^{2iax})^2},\quad \operatorname{Im}a>0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{32}$$

Здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x,t)\,dx=A(t)=\frac{i}{2a}e^{-2\operatorname{arcsh}t},\quad \gamma(t)=8a^2(t^2+1)+\frac{(t^2+1)e^{-2\operatorname{arcsh}t}}{8a^4}-\frac{\sqrt{t^2+1}}{2ia^3}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$: $\lambda(0)=k^2=a^2$, $v(k,0)=0$, $S(k,0)=0$, $\theta_0(0)=1$. В силу теоремы 2 имеем $\lambda(t)=\lambda(0)=a^2$, $S(k,t)=0$, $\theta_0(t)=e^{\beta(t)}$, где

$$\beta(t)=32ia^5t+\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau-2ia\int\limits_0^t\gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau.$$

Подставляя эти данные в формулу (15), найдём ядро $F_+(x,t)=-2iae^{iax+\beta(t)}$ интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко.

Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y;t)-2iae^{\beta(t)}e^{ia(x+y)}-2iae^{\beta(t)}e^{iay}\int\limits_x^{\infty}K_+(x,s;t)e^{ias}ds=0,$$

получаем

$$K_+(x,y;t)=\frac{2iae^{\beta(t)}e^{ia(x+y)}}{1+e^{\beta(t)}e^{2iax}}.$$

Отсюда находим решение задачи Коши (30)–(32)

$$u(x,t) = \frac{8a^2 e^{2iax+2\operatorname{arcsh} t}}{(1+e^{2iax+2\operatorname{arcsh} t})^2}, \quad \varphi(x,t) = \frac{e^{iax}}{1+e^{2iax+2\operatorname{arcsh} t}}.$$

Заключение. Разработана процедура построения решения задачи Коши для общего нагруженного уравнения КдФ с источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций с помощью метода обратной задачи рассеяния для несамосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля. Приведён пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
2. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
5. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 467–490.
6. *Mel'nikov V.K.* A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane // Commun. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 639–652.
7. *Mel'nikov V.K.* Integration method of the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. A. 1988. V. 133. № 9. P. 493–496.
8. *Mel'nikov V.K.* Integration of the Korteweg–de Vries equation with a source // Inv. Probl. 1990. V. 6. № 2. P. 233–246.
9. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1385–1403.
10. *Claude C., Leon J., Latifi A.* Nonlinear resonant scattering and plasma instability: an integrable model // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3321–3330.
11. *Shchesnovich S.V., Doktorov E.V.* Modified Manakov system with self-consistent source // Phys. Lett. A. 1996. V. 213. № 1-2. P. 23–31.
12. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
13. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
14. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.
15. *Блащак В.А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряжённого оператора. I // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 8. С. 1519–1533.
16. *Блащак В.А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряжённого оператора. II // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 10. С. 1915–1924.
17. *Хасанов А.Б., Хоитметов У.А.* Об интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Математика. 2018. № 3. С. 79–90.
18. *Хасанов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом // Теор. и мат. физика. 2020. Т. 203. № 2. С. 192–204.
19. *Яхшимуратов А.Б., Матёкубов М.М.* Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций // Изв. вузов. Математика. 2016. № 2. С. 87–92.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан,
Хорезмское отделение института математики
им. В.И. Романовского, Узбекистан,
Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 28.08.2020 г.
После доработки 01.02.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.