ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 395–406

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74+517.928.4

АЛГОРИТМ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 2022 г. А. А. Бободжанов, Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов

Метод регуляризации Ломова обобщён на нелинейные сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные уравнения с быстро осциллирующей правой частью. Установлено влияние ядра интегрального оператора, нелинейности и быстро осциллирующей части на асимптотику решения начальной задачи для указанных уравнений. Ранее изучались сингулярно возмущённые линейные системы такого типа и нелинейные без осциллирующей неоднородности системы.

DOI: 10.31857/S0374064122030098, **EDN:** BYQXIU

Светлой памяти нашего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящается эта работа

Введение. Исследование различных прикладных задач, связанных со свойствами сред с периодической структурой, приводит к изучению дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими неоднородностями. Уравнения такого типа часто встречаются, например, в электрических системах, находящихся под воздействием высокочастотных внешних сил. Наличие указанных сил создаёт серьёзные проблемы при численном интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому к таким уравнениям обычно применяются асимптотические методы, из которых наиболее известными являются метод расщепления Фещенко–Шкиля–Николенко [1–3] и метод регуляризации Ломова [4–14]. Однако оба эти метода были разработаны в основном для сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений, не содержащих интегрального оператора. Переход от дифференциальных уравнений к интегро-дифференциальным требует существенной перестройки алгоритма метода регуляризации. Интегральный член порождает в решениях новые типы сингулярностей, отличающиеся от уже известных, что усложняет разработку алгоритма метода регуляризации. Ранее изучались в основном линейные задачи такого типа.

В настоящей работе рассматривается нелинейная задача вида

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{dy}{dt} - A(t)y - \int\limits_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds - \varepsilon f(y,t) =$$

$$= h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где $y = y(t,\varepsilon)$ – неизвестная функция, $A(t)$, $K(t,s)$ $h_j(t)$, $f(y,t)$, $j = 1,2$, $\beta(t)$ – заданные скалярные функции ($\beta'(t)$ – частота быстро осциллирующей неоднородности), y^0 – постоянная, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, число T задано.

Задачу (1) будем рассматривать при выполнении следующих условий:

1) имеют место включения $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $h_1(t), h_2(t), \beta(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $K(t,s)\in C^\infty(\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\},\mathbb{R})$; функция $f(y,t) = \sum_{k=0}^N f_k(t)y^k$ – многочлен по переменной y с коэффициентами $f_k(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $k=\overline{0,N}$, $N\in\mathbb{N}$;

2) при всех $t\in[0,T]$ справедливы неравенства $A(t)<0$ и $\beta'(t)>0$.

Цель работы состоит в обобщении алгоритма метода регуляризации Ломова на задачи вида (1) и в анализе сингулярностей в решении $y(t,\varepsilon)$, вносимых нелинейностью $f(y,t)$ и быстро осциллирующей неоднородностью $h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$. Ради упрощения изучается скалярный вариант этой задачи. Предполагается, что исследование её в многомерном случае будет предметом наших последующих работ.

1. Пространство решений и регуляризация задачи (1). Для удобства обозначим $\lambda_1(t)\equiv A(t)$, $\lambda_2(t)\equiv\beta'(t)$, $\sigma=\sigma(\varepsilon)=e^{i\beta(0)/\varepsilon}$, введём регуляризирующие переменные (см. [4])

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\quad j=1,2, \tag{2}$$

и рассмотрим следующую расширенную задачу:

$$L_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^2\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)\tilde{y}-\int\limits_0^t K(t,s)\tilde{y}(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds-$$

$$-\varepsilon f(y,t)=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad \tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=0\\ \tau=0\\ \sigma=e^{i\beta(0)/\varepsilon}}}=y^0 \tag{3}$$

для функции $\tilde{y}=\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$, где, согласно (2), $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, $\psi=(\psi_1,\psi_2)$. Очевидно, что если $\tilde{y}=\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ – решение задачи (3), то функция $\tilde{y}=\tilde{y}(t,\psi(t)/\varepsilon,\sigma,\varepsilon)$ является точным решением задачи (1), поэтому задача (3) является расширенной по отношению к задаче (1). Однако её нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального члена

$$J\tilde{y}\equiv J\biggl(\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=s\\ \tau=\psi(s)/\varepsilon}}\biggr)=\int\limits_0^t K(t,s)\tilde{y}(s,\psi(s)/\varepsilon,\sigma,\varepsilon)\,ds.$$

Для его регуляризации введём класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно действия оператора J (см. [4, с. 62]).

Рассмотрим пространство U функций $y(t,\tau,\sigma)$, представимых суммами*)

$$y(t,\tau,\sigma)=y_0(t,\sigma)+\sum_{j=1}^2 y_j(t,\sigma)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_y}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},$$

$$y_j(t,\sigma),y^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}),\quad j=\overline{0,2},\quad m=(m_1,m_2),\quad 2\leqslant|m|\equiv m_1+m_2\leqslant N_y. \tag{4}$$

Отметим, что в (4) элементы пространства U зависят от ограниченной по $\varepsilon>0$ постоянной $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, которая не влияет на разработку излагаемого ниже алгоритма, поэтому в дальнейшем в записи элемента (4) этого пространства, ради краткости зависимость от σ опускаем. Кроме того, подчеркнём, что степень многочлена по экспонентам в (4) зависит от элемента $y(t,\tau)\in U$.

Покажем, что класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно действия оператора J. Образ оператора J на элементе (4) имеет вид

$$Jy(t,\tau)=\int\limits_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds+\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t K(t,s)y_j(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds+$$

*) Здесь и далее верхний индекс m в скобках в $y^{(m)}$ означает $y^{(m_1,m_2)}$ и является номером коэффициента $y^{(m)}$. Не следует путать его с номером производной.

$$+\sum_{|m|=2}^{N_y}\int_0^t K(t,s)y^{(m)}(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds, \quad (m,\lambda(t))\equiv m_1\lambda_1(t)+m_2\lambda_2(t).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_0^t K(t,s)y_j(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds=\varepsilon\int_0^t\frac{K(t,s)y_j(s)}{\lambda_j(s)}\,de^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}=$$

$$=\varepsilon\biggl[\frac{K(t,t)y_j(t)}{\lambda_j(t)}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta}-\frac{K(t,0)y_j(0)}{\lambda_j(0)}\biggr]-\varepsilon\int_0^t\biggl(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)y_j(s)}{\lambda_j(s)}\biggr)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}[(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=t}e^{\tau_j}-(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=0}]|_{\tau=\psi_j(t)/\varepsilon}, \tag{5}$$

где

$$I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)},\quad I_j^\nu=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1},\quad j=1,2,\quad \nu\geqslant 1.$$

И аналогично, учитывая, что $(m,\lambda(t))\neq 0$ для любого $t\in[0,T]$, $|m|\geqslant 2$, получаем

$$\int_0^t K(t,s)y^{(m)}(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds=\int_0^t\frac{K(t,s)y^{(m)}(s)}{(m,\lambda(s))}\,de^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}=$$

$$=\varepsilon\biggl[\frac{K(t,t)y^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t(m,\lambda(\theta))\,d\theta}-\frac{K(t,0)y^{(m)}(0)}{(m,\lambda(0))}\biggr]-\varepsilon\int_0^t\biggl(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)y^{(m)}(s)}{(m,\lambda(s))}\biggr)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}[(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))_{s=0}]|_{\tau=\psi_j(t)/\varepsilon}, \tag{6}$$

где введены операторы

$$I_m^0=\frac{1}{(m,\lambda(s))},\quad I_m^\nu=\frac{1}{(m,\lambda(s)))}\frac{\partial}{\partial s}I_m^{\nu-1},\quad |m|\geqslant 2,\quad \nu\geqslant 1.$$

Нетрудно показать (см., например, [15, с. 291–294]), что ряды (5) и (6) сходятся асимптотически при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $t\in[0,T]$). Это означает, что класс M_ε асимптотически инвариантен (при $\varepsilon\to+0$) относительно действия оператора J.

Введём операторы $R_\nu: U\to U$, действующие на каждый элемент $y(t,\tau)\in U$ вида (4) по правилу

$$R_0y(t,\tau)=\int_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds, \tag{7_0}$$

$$R_1y(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}\biggl[\frac{K(t,t)y_j(t)}{\lambda_j(t)}e^{\tau_j}-\frac{K(t,0)y_j(0)}{\lambda_j(0)}\biggr]+\sum_{|m|}^{N_y}\biggl[\frac{K(t,t)y^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))}e^{(m,\tau)}-\frac{K(t,0)y^{(m)}(0)}{(m,\lambda(0))}\biggr], \tag{7_1}$$

$$R_\nu y(t,\tau)=(-1)^{\nu+1}[(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=t}e^{\tau_j}-(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=0}]+$$

$$+(-1)^{\nu+1}\sum_{|m|=2}^{N_y}[(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=0}]. \tag{7_ν}$$

Пусть $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ – произвольная непрерывная по $(t,\tau)\in[0,T]\times\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\leqslant 0,\ \ j=1,2\}$ функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau),\quad y_k(t,\tau)\in U, \tag{8}$$

сходящееся при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,\tau)\in[0,T]\times\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\leqslant 0,\ \ j=1,2\}$). Тогда образ $J\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ этой функции разлагается в асимптотический ряд

$$J\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Jy_k(t,\tau)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Это равенство является основанием для введения расширения $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (8), именно, положим:

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\tilde{J}\biggl(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\biggr)\overset{\text{def}}{=}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau). \tag{9}$$

Хотя оператор $\tilde{J}$ определён формально, его полезность очевидна, так как на практике обычно строят N-е приближение асимптотического решения задачи (2), в котором участвуют лишь N-е частичные суммы ряда (8), имеющие не формальный, а содержательный смысл.

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной задаче (2):

$$L_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=$$

$$=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=0\\ \tau=0\\ \sigma=e^{i\beta(0)/\varepsilon}}}=y^0,\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

где оператор $\tilde{J}$ задаётся равенством (9).

2. Итерационные задачи и их разрешимость в $\boldsymbol{U}$. Подставляя ряд (8) в задачу (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие итерационные задачи:

$$Ly_0(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)y_0-R_0y_0=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad y_0(0,0)=y^0; \tag{11_0}$$

$$Ly_1(t,\tau)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+f(y_0,t)+R_1y_0,\quad y_1(0,0)=0; \tag{11_1}$$

$$Ly_2(t,\tau)=-\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1+R_1y_1+R_2y_0,\quad y_2(0,0)=0; \tag{11_2}$$

$$\ldots$$

$$Ly_k(t,\tau)=-\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t}+P_k(y_0,\ldots,y_{k-1},t)+R_ky_0+\ldots+R_1y_{k-1},\quad y_k(0,0)=0,\quad k>2, \tag{11_k}$$

где $P_k(y_0,\ldots,y_{k-1},t)$ – некоторый многочлен от $y_0,\ \ldots,\ y_{k-1}$, линейный относительно y_{k-1}. Запишем каждую из итерационных задач (11_k) в виде

$$Ly(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)y-R_0y=H(t,\tau),\quad y(0,0)=y_*, \tag{12}$$

где $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{j=1}^{2}H_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}$ – известная функция из пространства U, $y_*\in\mathbb{C}$ – постоянная, а оператор R_0 задаётся равенством (7_0).

Введём скалярное (при каждом $t\in[0,T]$) произведение в пространстве U:

$$\langle z,w\rangle\equiv\left\langle z_0(t)+\sum_{j=1}^{2}z_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_z}z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},w_0(t)+\sum_{j=1}^{2}w_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_w}w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\right\rangle\overset{\mathrm{def}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{def}}{=}(z_0(t),w_0(t))+\sum_{j=1}^{2}(z_j(t),w_j(t))+\sum_{|m|=2}^{\min(N_z,N_w)}(z^{(m)}(t),w^{(m)}(t)),$$

где через $(\cdot,\cdot)$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}$, т.е. $(u(t),v(t))=u(t)\cdot\bar{v}(t)$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1), 2) и правая часть $H(t,\tau)$ уравнения (12) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости этого уравнения в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$\langle H(t,\tau),e^{\tau_1}\rangle\equiv 0\quad\text{для всех}\quad t\in[0,T].\tag{13}$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (10) в виде элемента (4) пространства U (зависимость элемента (4) от σ по причине, объяснённой выше, опускаем):

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\sum_{j=1}^{2}y_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}.\tag{14}$$

Подставляя представление (14) в уравнение (12), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t)I-\lambda_1(t)]y_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]e^{(m,\tau)}-\lambda_1(t)y_0(t)-$$

$$-\int_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds=H_0(t)+\sum_{j=1}^{2}H_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}.$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем следующие уравнения:

$$-\lambda_1(t)y_0(t)-\int_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds=H_0(t),\tag{14_0}$$

$$[\lambda_j(t)I-\lambda_1(t)]y_j(t)=H_j(t),\quad j=1,2,\tag{14_j}$$

$$[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]y^{(m)}(t)=H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant|m|\leqslant N_H.\tag{14_m}$$

Уравнение (14_0) в силу того, что $\lambda_1(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]$, и включения $K(t,s)\in\in C^\infty(\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\},\mathbb{R})$ имеет единственное решение $y_0(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$. Уравнение (14_1) имеет вид $0\cdot y_1(t)=H_1(t)$. Оно разрешимо в пространстве $C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $H_1(t)\equiv 0$, т.е. когда $\langle H(t,\tau),e^{\tau_1}\rangle\equiv 0$ для всех $t\in[0,T]$. Уравнение (14_2) имеет единственное решение $y_2(t)=[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]^{-1}H_2(t)$ в классе $C^\infty([0,T],\mathbb{C})$.

Рассмотрим уравнение (14_m) более подробно:

$$[(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)]y^{(m)}(t)=H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H.$$

Покажем, что коэффициент $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)$ отличен от нуля для любого $t\in[0,T]$, $2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H$. Действительно, предположим противное, т.е. что $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)=$ $=0$ при некотором t. Отделяя в этом равенстве мнимую и действительную части, получаем

$$(m_1-1)\lambda_1(t)=0,\quad m_2\beta'(t)=0.$$

Второе равенство этой системы возможно, лишь когда $m_2=0$. Но тогда $m_1\geqslant 2$, и первое равенство не выполняется, так как $\lambda_1(t)<0$. Значит, $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)\neq 0$ для всех $t\in$ $\in[0,T]$, $2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H$. Отсюда следует, что каждое уравнение (14_m) имеет единственное решение и это решение записывается в виде

$$y^{(m)}(t)=[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]^{-1}H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant|m|\leqslant N_H.$$

Таким образом, для разрешимости уравнения (12) необходимо и достаточно выполнения тождества (13). Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий теоремы 1 и условия (13) уравнение (12) имеет следующее решение в пространстве U:

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\alpha_1(t)e^{\tau_1}+[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]^{-1}H_2(t)e^{\tau_2}+$$
$$+\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]^{-1}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}, \tag{15}$$

где $\alpha_1(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – произвольная функция.

3. Однозначная разрешимость общей итерационной задачи в пространстве U. Теорема об остаточном члене. Как видно из (15), решение уравнения (12) определяется неоднозначно. Однако если его подчинить дополнительным условиям:

$$y(0,0)=y_*,\quad \Big\langle -\frac{\partial y}{\partial t}+R_1y+Q(t,\tau),e^{\tau_1}\Big\rangle\equiv 0\quad \text{для всех}\quad t\in[0,T], \tag{16}$$

где $Q(t,\tau)=Q_0(t)+\sum_{j=1}^{2}Q_i(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_Q}Q^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}$ – известная функция пространства U, а y_* – постоянная из $\mathbb{C}$, то задача (12) будет однозначно разрешимой в пространстве U. Заметим, что условия (16) являются естественными для всей серии итерационных задач (11_k) и возникают как условия разрешимости (13) при переходе от задачи (11_k) к задаче (11_{k+1}). Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2), правая часть $H(t,\tau)$ уравнения (12) принадлежит пространству U и удовлетворяет условию ортогональности (13). Тогда уравнение (12) при дополнительных условиях (16) однозначно разрешимо в U.*

Доказательство. При выполнении условия (13) уравнение (12) имеет решение (15) в пространстве U, где $\alpha_1(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – пока произвольная функция. Подчиним решение (15) первому условию (16), т.е. потребуем, чтобы $y(0,0)=y_*$. Получим, что $\alpha_1(0)=y^*$, где обозначено

$$y^*=y_*+\lambda_1^{-1}(0)H_0(0)-[\lambda_2(0)-\lambda_1(0)]^{-1}H_2(0)-\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(0))-\lambda_1(0)]^{-1}H^{(m)}(0). \tag{17}$$

Подчиним теперь решение (15) второму условию (16). Предварительно вычислим[*)] выражение

$$-\frac{\partial y_0}{\partial t}+R_1y_0+Q(t,\tau)=-\dot y_0(t)-\dot\alpha_1(t)e^{\tau_1}-\left(\frac{H_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\right)^{\bullet}e^{\tau_2}-$$

[*)] Здесь и далее жирная точка справа над скобкой означает дифференцирование по t выражения, стоящего в этих скобках.

$$-\sum_{|m|=2}^{N_H}\left(\frac{H^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)}\right)^{\bullet}e^{(m,\tau)}+\frac{K(t,t)\alpha_1(t)}{\lambda_1(t)}e^{\tau_1}-\frac{K(t,0)\alpha_1(0)}{\lambda_1(0)}+$$

$$+\frac{K(t,t)H_2(t)}{\lambda_1(t)[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]}e^{\tau_2}-\frac{K(t,0)H_2(0)}{\lambda_1(0)[\lambda_2(0)-\lambda_1(0)]}+Q_0(t)+\sum_{j=1}^{2}Q_i(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_Q}Q^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}.$$

Поэтому второе условие (16) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\dot\alpha_1(t)+\frac{K(t,t)\alpha_1(t)}{\lambda_1(t)}=Q_1(t).$$

Присоединяя к нему начальное условие (17), однозначно найдём функцию

$$\alpha_1(t)=\exp\biggl(\int\limits_0^t\frac{K(s,s)}{\lambda_1(s)}\,ds\biggr)\biggl(y^*+\int\limits_0^t\exp\biggl(-\int\limits_0^x\frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\,d\theta\biggr)Q_1(x)dx\biggr),$$

а значит, построим решение (15) задачи (12) в пространстве U однозначным образом. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (11_k), найдём однозначно их решения в пространстве U и построим ряд (8). Составим частичную сумму $S_n(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k y_k(t,\tau)$ этого ряда и обозначим её сужение при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$ через $y_{\varepsilon n}(t)$. Имеет место

Лемма. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда функция $y_{\varepsilon n}(t)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{n+1},* т.е.

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon n}(t)}{dt}-A(t)y_{\varepsilon n}(t)-\int\limits_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s,\varepsilon)\,ds-\varepsilon f(y_{\varepsilon n},t)=$$

$$=h_1(t)+h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}+\varepsilon^{n+1}F(t,\varepsilon),\quad y_{\varepsilon n}(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],$$

где $\|F(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\leqslant\overline{F}$, $\overline{F}>0$ *– постоянная, не зависящая от* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$ *достаточно мало.*

Доказательство. Обозначим через L_0 следующий оператор:

$$L_0\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j}-A(t).$$

Подставив $y_0(t,\tau)$, $\ldots$, $y_n(t,\tau)$ в первые n уравнений системы (11_k), получим тождества. Умножим их на 1, ε, $\ldots$, ε^n соответственно и сложим. В результате получим

$$L_0(y_0+\varepsilon y_1+\cdots+\varepsilon^n y_n)-R_0(y_0+\varepsilon y_1+\cdots+\varepsilon^n y_n)\equiv h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma-$$

$$-\varepsilon\biggl(\frac{\partial y_0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial y_1}{\partial t}+\cdots+\varepsilon^{n-1}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial t}\biggr)+\varepsilon R_1y_0+\varepsilon^2(R_1y_1+R_2y_0)+$$

$$+\varepsilon^n(R_1y_{n-1}+\cdots+R_ny_0)+\biggl[\varepsilon f(y_0,t)+\varepsilon^2\biggl(\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1\biggr)+\cdots+\varepsilon^N P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr].$$

Произведём здесь сужение при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$; при этом учтём, что выполняются тождества

$$e^{\tau_2}\sigma|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\equiv e^{i\beta(t)/\varepsilon},\qquad\sum_{0\leqslant|m|\leqslant k}z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\equiv\sum_{0\leqslant|m|\leqslant k}z^{(m)}(t)e^{(m,\psi(t)/\varepsilon)},$$

$$L_0v(t,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \equiv \varepsilon\frac{dv(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon)}{dt} - A(t)v(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial v(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon)}{\partial t}.$$

Будем иметь

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon n}}{dt} - A(t)y_{\varepsilon n}(t) = \varepsilon^{n+1}\frac{\partial y_n(t,\psi)}{\partial t} + h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} + \sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\psi) +$$

$$+\varepsilon\biggl[f(y_0,t) + \varepsilon\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1 + \ldots + \varepsilon^{n-1}P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr],$$

или

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon n}}{dt} = A(t)y_{\varepsilon n}(t) + \int\limits_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s)\,ds + h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} + \varepsilon^{n+1}\frac{\partial y_n(t,\psi)}{\partial t} +$$

$$+\varepsilon f(y_{\varepsilon n}(t),t) - \biggl[\int\limits_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s)\,ds - \sum_{r=0}^{n}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\psi)\biggr] -$$

$$-\varepsilon\biggl[f(y_{\varepsilon n}(t),t) - f(y_0,t) - \frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1 - \ldots - \varepsilon^{n-1}P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr].$$

Согласно определению операторов R_k выражение в первой квадратной скобке последнего тождества представляется в виде $\varepsilon^{n+1}M_1(t,\varepsilon)$, а по построению задач (11_0), ..., (11_n) выражение во второй квадратной скобке – в виде $\varepsilon^{n+1}M_2(t,\varepsilon)$, где $\|M_i\|_{C[0,T]} \leqslant \mathrm{const}$ (для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$, $i = 1,2$. Обозначая $F(t,\varepsilon) \equiv -M_1(t,\varepsilon) - M_2(t,\varepsilon) + \partial y_N(t,\psi)/\partial t$, получаем утверждение леммы.

При обосновании асимптотической сходимости формального решения $y_{\varepsilon n}(t)$ к точному $y(t,\varepsilon)$ используется следующее утверждение о разрешимости операторного уравнения $P_\varepsilon(u) = 0$ (см., например, [16, с. 187–188]).

Теорема (Срубщик–Юдович). *Пусть оператор P_ε действует из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 и имеет в некотором шаре $\{\|u-u_0\| \leqslant r\} \subset B_1$ первые две непрерывные производные. Пусть также существует оператор $\Gamma_\varepsilon \equiv [P'_\varepsilon(u_0)]^{-1}$ и выполнены условия*

$$1a)\ \|\Gamma_\varepsilon\| \leqslant c_1\varepsilon^{-k};\quad 2a)\ \|P_\varepsilon(u_0)\| \leqslant c_2\varepsilon^m\quad (m > 2k);\quad 3a)\ \|P''_\varepsilon(u)\| \leqslant c_3.$$

Тогда уравнение $P_\varepsilon(u) = 0$ имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$ решение $u_* \in B_1$, удовлетворяющее неравенству $\|u_* - u_0\|_{B_1} \leqslant c\varepsilon^{m-k}$. Здесь c, c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Применяя эту теорему к уравнению

$$P_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon\frac{du}{dt} - A(t)u - \int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)\,ds -$$

$$-\varepsilon f(u+y^0,\varepsilon) - A(t)y^0 - \int\limits_0^t K(t,s)y^0\,ds - h_1(t) - h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} = 0,$$

приходим к следующему результату (см. [16, с. 190–192]).

Теорема 3. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1) и 2). Тогда при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало) задача (1) имеет единственное решение $y(t,\varepsilon) \in C^1([0,T],\mathbb{C})$; при этом имеет место оценка*

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon n}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant c_n\varepsilon^{n+1},\quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где $y_{\varepsilon n}(t)$– *сужение (при* $\tau = \psi(t)/\varepsilon$) *n-й частичной суммы ряда (8) (с коэффициентами* $y_k(t,\tau) \in U$, *удовлетворяющими итерационным задачам* (11_k)), *а постоянная* $c_n > 0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

4. Построение решения первой итерационной задачи. Используя теорему 1, найдём решение первой итерационной задачи (11_0). Так как правая часть $h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_2}\sigma$ уравнения (14_0) удовлетворяют условию (13), то это уравнение имеет (согласно (15)) решение в пространстве U вида

$$y_0(t,\tau) = y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}, \tag{18}$$

где $\alpha_1^{(0)}(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – пока произвольная функция, $y_0^{(0)}(t)$ – решение интегрального уравнения $-\lambda_1(t)y_0^{(0)}(t) - \int_0^t K(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds = h_1(t)$, $y_2(t) = [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)]^{-1}h_2(t)\sigma$. Подчиняя семейство (18) начальному условию $y_0(0,0) = y^0$, будем иметь $y_0^{(0)}(0) + \alpha_1(0) + y_2^{(0)}(0) = y^0$, т.е.

$$\alpha_1(0) = y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\sigma. \tag{19}$$

Для полного вычисления функции $\alpha_1^{(0)}(t)$ перейдём к следующей итерационной задаче (11_1). Подставляя в неё решение (18) уравнения (14_0), получаем следующее уравнение:

$$Ly_1(t,\tau) = -\frac{d}{dt}y_0^{(0)}(t) - \dot\alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} - \dot y_2(t)e^{\tau_2} +$$

$$+ f(y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}, t) + R_1(y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}).$$

Выделяя в правой части этого уравнения члены с экспонентой e^{τ_1} и подчиняя их условию ортогональности (13), придём к уравнению

$$-\dot\alpha_1^{(0)}(t) + \left(\frac{\partial f(y_0^{(0)}(t),t)}{\partial y} + \frac{K(t,t)}{\lambda_1(t)}\right)\alpha_1^{(0)}(t) = 0,$$

присоединяя к которому начальное условие (19), найдём $\alpha_1^{(0)}(t)$:

$$\alpha_1^{(0)}(t) = (y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\sigma)\exp\left(\int_0^t \frac{\partial f(y_0^{(0)}(\theta),\theta)}{\partial y} + \frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\right)d\theta,$$

а значит, решение (18) задачи (11_0) в пространстве U находится однозначно. При этом главный член асимптотики имеет следующий вид:

$$y_{\varepsilon 0}(t) = y_0^{(0)}(t) + \left(y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\beta(0)\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(\int_0^t \frac{\partial f(y_0^{(0)}(\theta),\theta)}{\partial y} + \frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\right)d\theta \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(\theta)\,d\theta\right) +$$

$$+ [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)]^{-1}h_2(t)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\beta(t)\right). \tag{20}$$

Проанализируем его.

Из выражения (20) для $y_{\varepsilon 0}(t)$ видно, что на построение главного члена асимптотики решения задачи (1) существенно влияют быстро осциллирующая неоднородность $h_2(t)e^{i/\varepsilon\beta(t)}$, ядро $K(t,s)$ интегрального оператора и нелинейность $f(y,t)$. Точное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), выходя в момент $t = 0$ из точки $y = y^0$, совершает при $t > 0$ быстрые осцилляции около решения $y_0^{(0)}(t)$ интегрального уравнения

$$-\lambda_1(t)y_0^{(0)}(t) - \int_0^t K(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds = h_1(t),$$

не стремясь ни к какому пределу при $\varepsilon \to +0$. Нетрудно видеть, что это уравнение получено из вырожденного ($\varepsilon = 0$) по отношению к (1) уравнения после отбрасывания в (1) быстро осциллирующей неоднородности. Если $h_2(t) \equiv 0$, т.е. быстро осциллирующая неоднородность отсутствует, то решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), выходя в момент $t = 0$ из точки $y = y^0$, быстро (с экспоненциальной скоростью) стремится при $\varepsilon \to +0$ к решению вырожденного уравнения $-A(t)\bar{\bar{y}} - \int_0^t K(t,s)\bar{\bar{y}}(s)\,ds = h_1(t)$.

5. Дополнение: краткий очерк развития метода регуляризации Ломова для сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений. В конце пятидесятых – начале шестидесятых годов прошлого столетия С.А. Ломов, изучая модельное уравнение Лайтхилла, приходит к идее регуляризации сингулярных возмущений с помощью перехода в пространство бóльшей размерности. Эта идея глубоко развивается им в последующих работах и приводит к созданию *метода регуляризации сингулярных возмущений*, наиболее полно изложенному в его монографии [4]. Метод регуляризации позволяет строить асимптотические решения сингулярно возмущённых задач в виде рядов по степеням малого параметра, сумма которых при некоторых дополнительных ограничениях на исходные данные задачи *псевдоаналитична*. Последнее означает, что регуляризованные ряды сходятся не только асимптотически, но и в обычном смысле в некоторой кольцевой окрестности $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ точки $\varepsilon = 0$. В теории дифференциальных уравнений сформировалось новое направление – аналитическая теория сингулярных возмущений. Результаты С.А. Ломова по псевдоаналитичности были обобщены на нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и уравнения в банаховом пространстве его учениками В.Ф. Сафоновым, В.И. Прохоренко, А.А. Бободжановым, В.И. Качаловым. В настоящее время аналитическая теория сингулярных возмущений благодаря исследованиям В.И. Качалова находится в весьма удовлетворительном состоянии.

Однако оставалась практически не изученной проблема регуляризации сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений. Первое применение метода регуляризации к таким уравнениям дано в работе С.А. Ломова (1970 г.) и подробно изложено в монографии [4, гл. 4]. В этой работе рассматривается сингулярно возмущённая система типа Вольтерры

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,T], \tag{$D.1$}$$

в условиях *стабильности спектра* $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$:

$$\lambda_i(t) \neq 0, \quad \lambda_j(t) \neq \lambda_i(t), \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T] \tag{$D.2$}$$

(в отличие от работ школы Васильевой–Бутузова–Иманалиева здесь предполагается, что выполняются неравенства $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leqslant 0$, т.е., в частности, допускаются и чисто мнимые точки спектра). Основная трудность, которую необходимо преодолеть в уравнениях типа $(D.1)$, заключается в регуляризации интегрального оператора

$$Jy = \int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds.$$

Если дифференциальная часть задачи $(D.1)$ допускает довольно очевидное расширение

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}$$

при введении регуляризирующих переменных

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta\equiv\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\quad j=\overline{1,n}, \tag{D.3}$$

то интегральный оператор при указанных переменных принимает вид

$$J\tilde{y}=\int\limits_0^t K(t,s)\tilde{y}\bigg(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\bigg)\,ds,$$

и его расширение по независимым переменным τ_j становится проблематичным.

Решение этой проблемы дал сам С.А. Ломов. Для простейшего случая интегро-дифференциальных уравнений типа $(D.1)$ он предложил ввести пространство, инвариантное относительно действия интегрального оператора J, которое получается естественным образом из пространства безрезонасных решений интегрированием по частям его элементов (см. [4]). Эта идея принципиальной важности позволила сдвинуть с “мертвой точки” процесс обобщения на интегро-дифференциальные системы метода регуляризации. Тем не менее в течение десяти лет (1979–1989 гг.) не вышло ни одной работы, посвящённой этой тематике. И только в 1990 г. вследствие изучения связи методом регуляризации Ломова и методом эквивалентного дифференциального соответствия Ларионова [17] интерес к интегро-дифференциальным уравнениям возобновился. В методе Ларионова рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=Ay+\int\limits_0^t K\bigg(\frac{t}{\varepsilon}-\frac{s}{\varepsilon}\bigg)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),\quad y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],$$

с постоянной матрицей A и с быстро изменяющимися ядрами типа $K(t/\varepsilon-s/\varepsilon)\equiv e^{-\nu(t/\varepsilon-s/\varepsilon)}$ $(\nu=\mathrm{const})$. Такие уравнения часто встречаются в приложениях (см., например, [17]). Однако для них метод регуляризации разработан не был.

При обобщении идеи С.А. Ломова на интегро-дифференциальные уравнения с быстро изменяющимися ядрами В.Ф. Сафонов предложил рассмотреть системы сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)\,d\theta}K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),$$

$$y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],\quad\varepsilon>0, \tag{D.4}$$

с переменной матрицей $A(t)$ и со скалярной функцией $\mu(t)$, называемой спектральным значением ядра интегрального оператора. В работе [18] рассмотрен случай нестабильности спектрального значения $(\mu(t)=t^r l(t),\ \ l(t)<0)$ при условиях $(D.2)$ на спектр матрицы $A(t)$ и показано, что в регуляризации задачи $(D.4)$ участвуют не только регуляризирующие функции $(D.3)$, но и спецфункции

$$\sigma_k=e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t\mu(\theta)\,d\theta}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\mu(\theta)\,d\theta}\frac{s^k}{k!}\,ds\quad(k=\overline{0,r-1}), \tag{D.5}$$

индуцируемые точкой $t = 0$ нестабильности спектрального значения $\mu(t)$ ядра интегрального оператора, а также сама функция $\mu(t)$. Отсюда вытекает, что если $\mu(t) < 0$ (для всех $t \in [0, T]$), то для регуляризации задачи $(D.4)$, кроме регуляризирующих функций $(D.3)$, нужно ввести регуляризирующие переменные $(D.5)$ и ещё одну дополнительную переменную $\tau_{n+1} = \varepsilon^{-1} \int_0^t \mu(\theta)\, d\theta$.

Перспектива дальнейших исследований связана с рассмотрением интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры и Фредгольма, а также нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и неоднородностями. К последнему типу уравнений относится уравнение в рассмотренной в работе задаче (1), а также уравнения задач в работах [10–12, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шкиль Н.И.* Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. Киев, 1971.
2. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, 1966.
3. *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 5. С. 1026–1029.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
6. *Рыжих А.Д.* Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Т. 357. С. 92–94.
7. *Kalimbetov B.T., Temirbekov M.A., Khabibullaev Zh.O.* Asymptotic solution of singular perturbed problems with an instable spectrum of the limiting operator// Abstr. and Appl. Analysis. 2012. Art. 120192.
8. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.* Asymptotic analysis of integro-differential systems with an unstable spectral value of the integral operator's kernel // Comput. Math. and Math. Phys. 2007. V. 47. № 1. P. 65–79.
9. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. doi:10.3390/axioms8010027.
10. *Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Integro-differentiated singularly perturbed equations with fast oscillating coefficients // Bull. of KarSU. Ser. Math. 2019. V. 94. № 2. P. 33–47.
11. *Bobodzhanov A.A., Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Integro-differential problem about parametric amplification and its asymptotical integration // Int. J. Appl. Math. 2020. V. 33. № 2. P. 331–353.
12. *Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Regularization method for singularly perturbed integro-differential equations with rapidly oscillating coefficients and with rapidly changing kernels // Axioms. 2020. V. 9. № 4 (131). https://doi.org/10.3390/axioms9040131.
13. *Kalimbetov B.T., Temirbekov A.N., Tulep A.S.* Asymptotic solutions of scalar integro-diferential equations with partial derivatives and with fast oscillating coefcients // European J. Pure Appl. Math. 2020. V. 13. № 2. P. 287–302.
14. *Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.* Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2068–2083.
15. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., 2012.
16. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Сингулярно возмущенные интегральные и интегродифференциальные уравнения с быстро изменяющимися ядрами и уравнения с диагональным вырождением ядра. М., 2017.
17. *Ларионов Г.С.* Колебания осциллятора со слабо нелинейной упруго-наследственной характеристикой // Изв. АН УзССР. Механика твердого тела. 1972. Т. 1. С. 64–68.
18. *Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т.* Метод регуляризации для систем с нестабильным значением ядра интегрального оператора // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 696–706.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”,
Международный казахско-турецкий университет
им. Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан

Поступила в редакцию 12.10.2021 г.
После доработки 23.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.