ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 407–415

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2+517.521

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В СИСТЕМАХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ: УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2022 г. А. О. Игнатьев

Для общей системы разностных (дискретных) уравнений с помощью метода функций Ляпунова получен ряд достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости относительно части переменных её решения.

DOI: 10.31857/S0374064122030104, **EDN:** BYTWWZ

Введение. Математическая теория устойчивости занимает важное место в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Начиная с середины двадцатого века, активно развивается теория устойчивости относительно части переменных. К настоящему времени опубликован ряд монографий [1–6] и сотни работ по этой тематике, из которых можно выделить [7–13]. В статьях [14–16] исследуется устойчивость относительно части переменных решений функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, а в [17–19] – устойчивость относительно части переменных в системах стохастических дифференциальных уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости решений разностных систем относительно части переменных. Это направление исследования представляется интересным по двум причинам: во-первых, ряд явлений и процессов в природе описываются разностными уравнениями; во-вторых, при использовании вычислительных методов решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений их сводят к разностным уравнениям. Отметим, что в работе [20] предлагается способ построения разностных схем для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, который обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения.

Важным направлением качественного анализа дискретных (разностных) уравнений является исследование устойчивости их решений. Это направление отражено во многих научных публикациях (см., например, [21–24]). Одним из наиболее эффективных методов изучения устойчивости дифференциальных и разностных уравнений является метод функций Ляпунова [25, 26]. Настоящая статья посвящена применению этого метода к изучению устойчивости решений систем разностных уравнений относительно части переменных.

1. Основные обозначения и определения. Следуя [27], обозначим: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_q=\{n\in\mathbb{N}_0: n\geqslant q\}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^{k+m}$, $B_r=\{z\in\mathbb{R}^{k+m}:\|z\|\leqslant r\}$ – замкнутый шар радиуса r с центром в нуле в $\mathbb{R}^{k+m}$.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$z(n+1)=Z(n,z(n)),\quad Z(n,0)\equiv 0, \tag{1}$$

где $n\in\mathbb{N}_0$ и $z,Z\in\mathbb{R}^{k+m}$. Далее предполагаем, что при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}_0$ функция $Z(n,\cdot):\mathbb{R}^{k+m}\to\mathbb{R}^{k+m}$ является непрерывной. Для фиксированных $n\in\mathbb{N}_0$ и $z_0\in\in\mathbb{R}^{k+m}$ через $z(n,n_0,z_0)$ обозначим решение системы (1), совпадающее с вектором z_0 при $n=n_0$. Исследуем устойчивость нулевого решения

$$z(n)=0 \tag{2}$$

системы (1) относительно первых k его компонент. Примем обозначения $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{k+m}$,

$$x=(x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}=(z_1,\ldots,z_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k,\quad y=(y_1,\ldots,y_m)^{\mathrm{T}}=(z_{k+1},\ldots,z_{k+m})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m.$$

В соответствии с принятым обозначением любое решение $z(n,n_0,z_0)$ системы (1) представляется в виде $z(n,n_0,z_0)=\begin{pmatrix} x(n,n_0,z_0)\\ y(n,n_0,z_0)\end{pmatrix}$. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями [28, гл. 1] введём следующие определения.

Определение 1. Решение (2) системы (1) называется *устойчивым относительно* x (или x*-устойчивым*), если для любых $\varepsilon>0$ и $n_0\in\mathbb{N}_0$ найдётся $\delta=\delta(\varepsilon,n_0)>0$ такое, что для любого $z_0\in B_\delta$ имеет место неравенство $\|x(n,n_0,z_0)\|<\varepsilon$ при всех $n\in\mathbb{N}_{n_0}$.

Определение 2. Решение (2) системы (1) называется *равномерно устойчивым относительно* x (или *равномерно* x*-устойчивым*), если в определении 1 для каждого $\varepsilon>0$ можно выбрать $\delta=\delta(\varepsilon)$ не зависящим от n_0.

Следующее определение является вспомогательным для введения в определении 4 различных модификаций понятия устойчивости.

Определение 3. Решение (2) системы (1) называется:

притягивающим относительно x (x*-притягивающим*), если для каждого $n_0\in\mathbb{N}_0$ существует $\eta=\eta(n_0)>0$ и для любых $\varepsilon>0$ и $z_0\in B_\eta$ найдётся $\sigma=\sigma(\varepsilon,n_0,z_0)\in\mathbb{N}$ такое, что $\|x(n,n_0,z_0,)\|<\varepsilon$ для всех $n\geqslant n_0+\sigma$;

эквипритягивающим относительно x (или x*-эквипритягивающим*), если для каждого $n_0\in\mathbb{N}_0$ существует $\eta=\eta(n_0)>0$ и для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\sigma=\sigma(\varepsilon,n_0)\in\mathbb{N}$ такие, что $\|x(n,n_0,z_0)\|<\varepsilon$ для всех $z_0\in B_\eta$ и $n\geqslant n_0+\sigma$;

равномерно x*-притягивающим*, если для некоторого $\eta>0$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\sigma=\sigma(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что $\|x(n,n_0,z_0)\|<\varepsilon$ для всех $z_0\in B_\eta$, $n_0\in\mathbb{N}_0$ и $n\geqslant n_0+\sigma$;

равномерно глобально x*-притягивающим*, если для любых $\eta>0$ и $\varepsilon>0$ найдётся $\sigma=\sigma(\varepsilon,\eta)\in\mathbb{N}$ такое, что $\|x(n,n_0,z_0)\|<\varepsilon$ для всех $z_0\in B_\eta$, $n_0\in\mathbb{N}_0$ и $n\geqslant n_0+\sigma$;

слабо x*-притягивающим*, если для каждого $n_0\in\mathbb{N}_0$ существует $\eta=\eta(n_0)>0$ такое, что для любого $z_0\in B_\eta$ найдётся возрастающая к $+\infty$ последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, своя, вообще говоря, для каждых n_0 и z_0, вдоль которой $\|x(n_i,n_0,z_0)\|\to 0$ при $i\to+\infty$;

l_p*-притягивающим* относительно x, где $p>0$ – некоторое число, если для любого $n_0\in\mathbb{N}_0$ найдётся такое $\eta=\eta(n_0)$, что для всех $z_0\in B_\eta$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=n_0}^{\infty}\|x(j,n_0,z_0)\|^p<+\infty.$$

Иными словами, решение $z(n)=0$ системы (1) является:

x-притягивающим, если

$$\lim_{n\to+\infty}x(n,n_0,z_0)=0 \quad \text{при всех} \quad n_0\in\mathbb{N}, \quad z_0\in B_{\eta(n_0)}; \tag{3}$$

x-эквипритягивающим, если предельное соотношение (3) выполняется равномерно относительно z_0;

равномерно x-притягивающим, если предельное соотношение (3) выполняется равномерно относительно z_0 и n_0;

слабо x-притягивающим, если

$$\liminf_{n\to+\infty}\|x(n,n_0,z_0)\|=0 \quad \text{при всех} \quad n_0\in\mathbb{N}, \quad z_0\in B_{\eta(n_0)}.$$

Областью x*-притяжения* решения $z(n)=0$ системы (1) в дискретный момент времени $n_0\in\mathbb{N}$ называется множество

$$A(n_0)=\{z_0\in\mathbb{R}^{k+m}:\|x(n,n_0,z_0)\|\to 0 \ \text{ при } \ n\to+\infty\}.$$

Если множество $A(n_0)$ не зависит от n_0, то будем говорить, что область x-притяжения *равномерная.* Если для любого n_0 имеет место равенство $A(n_0)=\mathbb{R}^{k+m}$, то говорят, что начало *глобально притягивающее относительно* x. Если же для любых $\eta>0$, $n_0\in\mathbb{N}_0$ и $z_0\in B_\eta$ предельное соотношение (3) выполняется равномерно по n_0 и z_0, то начало называется *равномерно глобально* x*-притягивающим.*

Определение 4. Решение (2) системы (1) называется:

асимптотически устойчивым относительно x (или *асимптотически* x*-устойчивым*), если оно x-устойчиво и x-притягивающее;

эквиасимптотически устойчивым относительно x (или *эквиасимптотически* x*-устойчивым*), если оно x-устойчиво и x-эквипритягивающее;

равномерно асимптотически устойчивым относительно x (или *равномерно асимптотически* x*-устойчивым*), если оно равномерно x-устойчиво и равномерно x-притягивающее;

равномерно глобально асимптотически устойчивым относительно x (или *равномерно глобально асимптотически* x*-устойчивым*), если оно равномерно x-устойчиво и равномерно глобально x-притягивающее;

слабо асимптотически x*-устойчивым*, если оно x-устойчиво и слабо x-притягивающее;

l_p*-устойчивым относительно* x, если оно x-устойчиво и l_p-притягивающее относительно x.

Определение 5. Будем говорить, что функция $a(r)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ и записывать как $a \in \mathcal{K}$, если она определена на некотором отрезке $[0, H]$ или полуинтервале $[0, +\infty)$, является непрерывной и строго возрастающей и такой, что $a(0) = 0$.

Подкласс класса $\mathcal{K}$, состоящий из функций возрастающих к $+\infty$, обозначим через $\mathcal{K}_\infty$.

2. Исследование устойчивости относительно части переменных с помощью функций Ляпунова.

Определение 6. *Вариацией* ΔV функции $V(n, z)$ *в силу системы* разностных уравнений (1) назовём выражение

$$\Delta V(n, z) = V(n + 1, Z(n, z)) - V(n, z).$$

Теорема 1. *Если для системы разностных уравнений (1) существует функция* $V(n, z)$, *которая определена и непрерывна по* z *на множестве*

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad \|x\| \leqslant H, \quad \|y\| < +\infty \tag{4}$$

и удовлетворяет условиям

$$V(n, 0) \equiv 0, \quad V(n, z) \geqslant a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \quad \Delta V = V(n + 1, Z(n, z)) - V(n, z) \leqslant 0$$

для значений n *и* $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *удовлетворяющих условиям (4), то решение (2) системы (1) устойчиво относительно* x.

Более того, если для некоторой функции $b \in \mathcal{K}$ *и любых* n, z *из области (4) справедливо условие*

$$V(n, z) \leqslant b(\|z\|), \tag{5}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно устойчиво относительно x.

Доказательство. Пусть заданы $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon > 0$. Так как функция V непрерывна по z и $V(n_0, 0) = 0$, то найдётся $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $V(n_0, z_0) < a(\varepsilon)$ при всех $z_0 \in B_\delta$. Для любых $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $z_0 \in B_\delta$ получаем

$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n - 1, z(n - 1, z(n - 1, n_0, z_0))) \leqslant \ldots \leqslant V(n_0, z_0) < a(\varepsilon).$$

Но так как $a \in \mathcal{K}$, то из полученных неравенств следует, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$. Устойчивость решения (2) относительно x доказана.

При выполнении условия (5) значение δ можно выбрать не зависящим от n_0. Действительно, полагая $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$, где b^{-1} – функция, обратная по отношению к функции b, при $z_0 \in B_\delta$ получаем

$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_o) \leqslant b(\|z_0\|) < b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon),$$

откуда вытекает неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема представляет собой аналог теоремы Румянцева [7] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = y_1(n) - y_2(n), \quad y_1(n+1) = y_1(n)y_2(n)e^{nx(n)} + x(n), \quad y_2(n+1) = y_1(n)y_2(n)e^{nx(n)}.$$

Очевидно, что эта система имеет нулевое решение. В качестве функции V выберем $V = x^2 + (y_1 - y_2)^2$. Её вариация ΔV в силу рассматриваемой системы равна нулю. Учитывая, что $x^2 < V < 2(x^2 + y_1^2 + y_2^2)$, на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение этой системы равномерно x-устойчиво.

Теорема 2. *Если для системы разностных уравнений (1) существует функция $V(n,z)$, которая определена и непрерывна по z на множестве (4) и удовлетворяет условиям*

$$V(n,z) \geqslant a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \quad V(n,0) = 0, \tag{6}$$

$$\Delta V(n,z) \leqslant -c(\|x\|), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{7}$$

то нулевое решение системы (1) слабо асимптотически x-устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $z = 0$ системы (1) x-устойчиво. Поэтому для $H > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\delta = \delta(n_0, H) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$, если $z_0 \in B_\delta$.

Для завершения доказательства достаточно установить, что для любых $\varepsilon \in (0, H)$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $N = N(\varepsilon, n_0) \in \mathbb{N}$ такое, что при всяком $z_0 \in B_\delta$ можно указать натуральное число n_1, расположенное между n_0 и $n_0 + N$ (включая эти числа), такое, что

$$\|x(n_1, n_0, z_0)\| \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Обозначим $\lambda(n_0) = \sup\limits_{z \in B_\delta} V(n_0, z)$, $\quad N(n_0, \varepsilon) = [\lambda(n_0)/c(\varepsilon)] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Предположим противное: n_1, для которого выполняется неравенство (8), не существует. Значит, $\varepsilon < \|x(n, n_0, z_0)\| < H$ при всех n из множества чисел $\{n_0, n_0+1, \ldots, n_0+N\}$. Тогда из условий теоремы следует, что

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(n_0 + N, z(n_0 + N, z(n_0 + N, n_0, z_0))) \leqslant V(n_0, z_0) - c(\varepsilon)N \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3. *Если для системы (1) существует непрерывная по z на множестве (4) функция $V(n,z)$ такая, что выполнены условия (6), (7) и*

$$V(n,z) \leqslant b(\|z\|), \quad b \in \mathcal{K}, \tag{9}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически x-устойчиво.

Если дополнительно выполнены условия

$$a \in \mathcal{K}_\infty, \quad b \in \mathcal{K}_\infty, \quad c \in \mathcal{K}_\infty, \quad H = \infty, \quad \lim_{\|z\| \to \infty} V(n,z) = +\infty, \tag{10}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно глобально асимптотически x-устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $z = 0$ системы (1) равномерно x-устойчиво. Поэтому для числа H найдётся такое δ, не зависящее от n_0, что для дискретной траектории $z(n, n_0, z_0)$ из включений $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $z_0 \in B_\delta$ следует неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$ для всех $n \geqslant n_0$. Выберем произвольно ε $(0 < \varepsilon < H)$. Покажем, что существует $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > n_0 + \sigma. \tag{11}$$

Выясним, при каких n может выполняться двойное неравенство

$$\varepsilon \leqslant \|x(n, n_0, z_0)\| < H. \tag{12}$$

Для этого рассмотрим дискретную траекторию $z(n,n_0,z_0)$ с вектором $z_0 \in B_\delta$. Из условий (6), (7), (9) и из предположения (12) следует, что

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(n,z(n,n_0,z_0)) \leqslant V(n_0,z_0) - (n-n_0)c(\varepsilon) \leqslant b(\delta) - (n-n_0)c(\varepsilon).$$

Таким образом, при $n > n_0 + \sigma(\varepsilon)$, где $\sigma(\varepsilon) = [b(\delta)/c(\varepsilon)] + 1$, предположение (12) перестаёт выполняться, т.е. справедливо неравенство (11). Это означает, что решение $z = 0$ системы (1) является равномерно притягивающим относительно x.

В случае, когда дополнительно выполнены условия (10), в приведённом доказательстве величины H и ε выбираются произвольно $(0 < \varepsilon < H)$, $\delta = \delta(H)$, $\sigma = \sigma(\varepsilon, H) = [\delta(H)/c(\varepsilon)] + 1$. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}y_1(n) + \frac{1}{2^n\sqrt{2}}y_2(n),$$

$$y_1(n+1) = 2^{-n}y_2(n), \quad y_2(n+1) = 2^n x(n) + 2^n y_1(n). \tag{13}$$

Эта система допускает нулевое решение. Покажем, что оно равномерно асимптотически x-устойчиво. Для этого рассмотрим функцию

$$V(n,x,y_1,y_2) = x^2 + (2^{-1/2}y_1 - 2^{-n}y_2)^2.$$

Её вариация в силу рассматриваемой системы имеет вид $\Delta V = -x^2/2$. Учитывая, что функция V является определённо-положительной относительно x и удовлетворяет неравенствам

$$x^2 \leqslant V(n,x,y_1,y_2) < 2(x^2 + y_1^2 + y_2^2),$$

а её вариация ΔV в силу системы (13) является определённо-отрицательной относительно x, на основании теоремы 3 заключаем, что нулевое решение системы (13) равномерно асимптотически устойчиво относительно x.

Теорема 4. *Если для системы разностных уравнений (1) существует непрерывная по z функция $V(n,z)$, удовлетворяющая условию (6), и для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ можно указать $\Theta = \Theta(n_0)$ такое, что при $z_0 \in B_\Theta$ функция $V(n,z(n,n_0,z_0))$ не возрастает и стремится к нулю при $n \to +\infty$, то нулевое решение системы (1) эквиасимптотически устойчиво относительно x.*

Доказательство. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Выберем произвольно $\delta = \delta(n_0) \in (0, \Theta(n_0))$. Для любого $z_0 \in B_\delta$ функция $V(n,z(n,n_0,z_0))$ не возрастает. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} V(n,z(n,n_0,z_0)) = 0 \tag{14}$$

равномерно по $z_0 \in B_\delta$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Для любых $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in B_\delta$ по условию теоремы найдётся $N = N(\varepsilon, n_0, z_0)$ такое, что $V(n_0+N, z(n_0+N, n_0, z_0)) < \varepsilon$. Это неравенство, поскольку функции V и Z непрерывны по z, выполняется в некоторой открытой окрестности $Q(z_0)$ точки z_0, т.е. $V(n_0+N, z(n_0+N, n_0, z_0')) < \varepsilon$ при $z_0' \in Q(z_0)$. Так как V монотонно не возрастает вдоль решений системы (1), то отсюда следует, что

$$V(n,z(n,n_0,z_0')) < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 + N(\varepsilon, n_0, z_0'), \quad z_0' \in Q(z_0).$$

Компактное множество $\|z_0\| \leqslant \delta$ оказалось покрытым системой открытых окрестностей $\{Q(z_0)\}$, из которой по теореме Гейне–Бореля можно выделить конечное подпокрытие Q_1, $\ldots$, Q_r с соответствующими числами N_1, $\ldots$, N_r. Обозначим $N(\varepsilon, n_0) = \max\{N_1, \ldots, N_r\}$. Тогда $V(n,z(n,n_0,z_0)) < \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}_{n_0+N(\varepsilon,n_0)}$ при $z_0 \in B_{\delta(n_0)}$. Таким образом, предельное соотношение (14) выполняется равномерно по z_0, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть для системы (1) существует функция $V(n,z)$, непрерывная по z, удовлетворяющая в области (4) неравенству (6) и такая, что выполняются следующие условия:*

i) вариация функции V в силу системы (1) неположительна;

ii) существуют $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\eta_0 > 0$ такие, что для любых n и η, удовлетворяющих неравенствам $n \geqslant n_0$, $0 < \eta \leqslant \eta_0$, множество $L = \{(n,z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^{n+m} : V(n,z) \geqslant \eta,$ $\|x\| \leqslant H\}$ непусто;

iii) найдутся неотрицательные числа $m_\eta(n)$, для которых выполняются соотношения

$$\Delta V(n,z) \leqslant -m_\eta(n) \quad \textit{при} \quad (n,z) \in L \tag{15}$$

и

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} m_\eta(n) = +\infty. \tag{16}$$

Тогда нулевое решение системы (1) эквиасимптотически x-устойчиво.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует такое $\delta = \delta(n_0) > 0$, что из включения $z_0 \in B_\delta$ вытекает неравенство $\|x(n,n_0,z_0)\| < H$ при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Обозначим $V_*(n_0) := \sup\limits_{\|z_0\|<\delta} V(n_0,z_0)$. Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} V(n,z(n,n_0,z_0)) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_0 \in B_\delta.$$

Предположим противное. Тогда вследствие неположительности вариации ΔV в силу системы (1) можно указать такие $\eta > 0$ и $z_0 \in B_\delta$, для которых при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ верно неравенство $V(n,z(n,n_0,z_0)) \geqslant \eta > 0$. Воспользовавшись условием (15), получаем

$$0 \leqslant V(n,z(n,n_0,z_0)) \leqslant V(n_0,z_0) - m_\eta(n_0+1) - m_\eta(n_0+2) - \ldots - m_\eta(n) \leqslant$$

$$\leqslant V_*(n_0) - m_\eta(n_0+1) - m_\eta(n_0+2) - \ldots - m_\eta(n),$$

что в силу условия (16) невозможно при достаточно больших значениях n. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Проиллюстрируем доказанную теорему следующим примером.

Пример 3. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = d_{11}(n)x(n) + d_{12}(n)y(n), \quad y(n+1) = d_{21}(n)x(n) + d_{22}(n)y(n), \tag{17}$$

где

$$d_{11}(n) = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt[4]{n+16}}}, \quad d_{12}(n) = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{(n+15)(n+16)} - 1}{\sqrt[4]{n+16}(\sqrt[4]{n+16} - 1)}},$$

$$d_{21}(n) = \frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}, \quad d_{22}(n) = -d_{11}(n)d_{12}(n).$$

Очевидно, что система (17) допускает нулевое решение. Для доказательства его эквиасимптотической x-устойчивости воспользуемся теоремой 5. В качестве функции Ляпунова выбираем $V(n,x,y) = x^2 + \sqrt[4]{n+15}\, y^2$. Несложно видеть, что она удовлетворяет условию (6) на множестве (4). Вариация этой функции в силу системы (1) имеет вид

$$\Delta V = -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}(x^2 + y^2).$$

Она неположительна. Выберем произвольно η, удовлетворяющее неравенствам $0 < \eta < H$, и оценим сверху вариацию ΔV в области $V(n,x,y) \geqslant \eta$. Геометрически эта область при любом

$n \in \mathbb{N}_0$ ограничена прямыми $|x| = -H$, $|x| = H$, эллипсом $x^2/\eta + \sqrt[4]{n+15}\, y^2/\eta = 1$ с центром в начале координат и полуосями $\sqrt{\eta}$ и $\sqrt{\eta}/\sqrt[8]{n+15}$. Любая точка (x, y) из множества

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant H, \quad \frac{x^2}{\eta} + \frac{\sqrt[4]{n+15}\, y^2}{\eta} \geqslant 1\right\}$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $|x| > \sqrt{\eta}/2$ или $|y| > \sqrt{\eta}/(2\sqrt[8]{n+15})$, или, что то же самое, $x^2 > \eta/4$, $y^2 > \eta/(4\sqrt[4]{n+15})$. Подставляя эти значения в ΔV, получаем

$$\Delta V = -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}(x^2 + y^2) < -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}} \min\left\{\frac{1}{4}\eta, \frac{\eta}{4\sqrt[4]{n+15}}\right\} = -\frac{\eta}{4\sqrt[4]{(n+15)(n+16)}}.$$

Итак, если в качестве $m_\eta(n)$ взять $m_\eta(n) = \eta/(4\sqrt[4]{(n+15)(n+16)})$, то, как показано, выполняется условие (15). Нетрудно убедиться, что справедливо и условие (16).

Таким образом, все условия теоремы 5 выполнены; следовательно, нулевое решение системы разностных уравнений (17) эквиасимптотически x-устойчиво.

Теорема 6. *Если для системы (1) существует функция $V(n, z)$, непрерывная по z, удовлетворяющая в области (4) условию*

$$V(n, z) \geqslant \vartheta(n) a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \tag{18}$$

с некоторой монотонно возрастающей к бесконечности последовательностью $\{\vartheta(n)\}$, $\vartheta(0) = 1$, а вариация ΔV в силу системы (1) неположительна, то нулевое решение системы (1) эквиасимптотически устойчиво относительно x.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ можно указать $\delta(n_0)$ такое, что из включения $z_0 \in B_\delta$ следует неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$ при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Обозначим $\mu(n_0) = \sup\limits_{z_0 \in B_\delta} V(n_0, z_0)$. Так как $\Delta V \leqslant 0$, то $V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_0)$, и из оценки (18) следует, что

$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant \frac{V(n, z(n, n_0, z_0))}{\vartheta(n)} \leqslant \frac{V(n_0, z_0)}{\vartheta(n)}. \tag{19}$$

Пусть $\theta(t)$ – монотонно возрастающая функция такая, что $\theta(n) = \vartheta(n)$, а ε – произвольное положительное число ($\varepsilon < H$; число H – из задания области (4)). Обозначим $N(\varepsilon, n_0) = \theta^{-1}(\mu(n_0)/a(\varepsilon))$, где θ^{-1} – функция, обратная к функции θ. Так как θ^{-1} монотонно возрастает, то при $n > N(\varepsilon, n_0)$ выполняется неравенство $\theta(n) \geqslant \mu(n_0)/a(\varepsilon)$, и в силу оценки (19) имеем

$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant \frac{V(n_0, z_0)}{\mu(n_0)} a(\varepsilon) < a(\varepsilon).$$

Так как $a \in \mathcal{K}$, то отсюда следует, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ при всех $z_0 \in B_\delta$, $n > n_0 + N(\varepsilon, n_0)$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть для системы (1) существует функция $V(n, z)$, непрерывная по z, удовлетворяющая в области (4) условию (6), такая, что $\Delta V(n, z) \leqslant -c\|x\|^p$, где p и c – положительные константы. Тогда нулевое решение системы (1) l_p-устойчиво относительно x.*

Доказательство. Согласно теореме 2 решение (2) системы (1) слабо асимптотически устойчиво. В частности, из его устойчивости следует, что при любых $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$, если $z_0 \in B_\delta$. Рассмотрим функцию

$$G(n) = \begin{cases} V(n, z(n)) + c \displaystyle\sum_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p & \text{при } n > n_0, \\ V(n_0, z_0) & \text{при } n = n_0, \end{cases}$$

где $z(n) = z(n, n_0, z_0)$. Тогда $\Delta G(n) = G(n+1) - G(n) = \Delta V(n, z(n)) + c\|x(n, n_0, z_0)\|^p \leqslant 0$. Следовательно, $G(n) \leqslant G(n_0) = V(n_0, z_0)$ и

$$0 \leqslant G(n) = V(n, z(n, n_0, z_0)) + c \sum_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p \leqslant V(n_0, z_0),$$

откуда вытекает неравенство

$$\sum_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p \leqslant \frac{1}{c} V(n_0, z_0),$$

и устремляя n к бесконечности, получаем

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \|x(j, n_0, z_0)\|^p < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 8. *Пусть для системы разностных уравнений (1) существуют две функции $V : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$ и $W : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$, непрерывные по второму аргументу, такие, что для некоторых функций $a, b, c \in \mathcal{K}$ и любых $(n, z) \in \mathbb{N}_0 \times B_H$ выполняются условия (6) и условия*

$$W(n, z) \geqslant b(\|x\|), \quad W(n, 0) = 0, \tag{20}$$

$$\Delta V \leqslant -c(W(n, z)). \tag{21}$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически x-устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 1 нулевое решение системы (1) x-устойчиво. Следовательно, для $H > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\delta = \delta(n_0, H) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$, если $z_0 \in B_\delta$. Покажем, что нулевое решение системы (1) x-притягивающее. Для этого докажем, что $W(n, z(n, n_0, z_0)) \to 0$ при $n \to +\infty$. Предположим противное. Это возможно только в том случае, если существуют $\sigma > 0$ и последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = +\infty$ и $W(n_i, z(n_i, n_0, z_0)) \geqslant \sigma$. В силу оценки (21) это означает выполнение неравенств

$$\Delta V(n_i, z(n_i, n_0, z_0)) \leqslant -c(\sigma) < 0, \quad V(n_i + 1, z(n_i + 1, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_0) - ic(\sigma),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} V(n_i + 1, z(n_i + 1, n_0, z_0)) = -\infty$, что противоречит условию (6). Полученное противоречие доказывает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} W(n, z(n, n_0, z_0)) = 0$, откуда в силу оценки (20) имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x(n, n_0, z_0)\| = 0$. Это доказывает x-притяжение решения (2) системы (1).

Полагая в доказанной теореме $W(n, z) = \|x\|$, получаем

Следствие. *Если для системы разностных уравнений (1) существует такая функция $V : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$, что для некоторых функций $a, c \in \mathcal{K}$ и любых $(n, z) \in \mathbb{N}_0 \times B_H$ выполняются условия (6) и неравенство $\Delta V(n, z) \leqslant -c(\|x\|)$, то её нулевое решение асимптотически x-устойчиво.*

Заключение. В работе для общей системы разностных (дискретных) уравнений получен ряд достаточных условий, при выполнении которых её нулевое решение обладает свойством устойчивости относительно части переменных или некоторыми модификациями этого свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., 1990.
2. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев, 1989.
3. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М., 1991.
4. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. New York, 1998.
5. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
6. *Мартышенко Ю.Г., Воротников В.И.* Частичная устойчивость, детектируемость и управление: некоторые задачи. Нижний Тагил, 2016.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. Т. 4. С. 9–16.
8. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35. № 1. С. 147–152.
9. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36. № 2. С. 364–384.
10. *Игнатьев А.О.* Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Математика. 1991. Т. 345. № 2. С. 55–60.
11. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3–59.
12. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. № 2. С. 253–259.
13. *Ignatyev O.A.* On the partial asymptotic stability in nonautonomous differential equations // Differ. and Integral Equat. 2006. V. 19. P. 831–839.
14. *Андреев А.С., Павликов С.В.* Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. № 1. С. 3–12.
15. *Bernfeld S.R, Corduneanu C., Ignatyev A.O.* On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlin. Anal. 2003. V. 55. P. 641–656.
16. *Corduneanu C., Ignatyev A.O.* Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlin. Funct. Anal. & Appl. 2005. V. 10. № 1. P. 11–24.
17. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 63–71.
18. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. V. 44. № 6. С. 75–79.
19. *Ignatyev O.A.* Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Statistics & Prob. Letters. 2009. V. 79. № 5. P. 597–601.
20. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 1217–1225.
21. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. Springer, New York, 2005.
22. *Elaydi S., Sacker R.J.* Global stability of periodic orbits of non-autonomous difference equations and population biology // J. Differ. Equat. 2005. V. 208. P. 258–273.
23. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability in periodic and almost periodic difference systems // J. of Math. Anal. and Appl. 2006. V. 313. № 2. P. 678–688.
24. *Lakshmikantham V., Trigiante D.* Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. New York, 2002.
25. *Kalman R.E., Bertram J.E.* Control System Analysis and Design Via the “Second Method” of Lyapunov. II Discrete-Time Systems // Transact. of the ASME. Ser. D. J. Basic Engrg. 1960. V. 82. P. 394–400.
26. *Игнатьев А.О.* Об устойчивости нулевого решения почти периодической системы разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 98–103.
27. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* Quadratic forms as Lyapunov functions in the study of stability of solutions to difference equations // Electr. J. Differ. Equat. 2011. V. 19. P. 1–21.
28. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

Институт прикладной математики и механики,
г. Донецк

Поступила в редакцию 06.08.2021 г.
После доработки 23.02.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.