ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 416–424

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.58

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

© 2022 г. М. С. Близорукова

Рассматривается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий системы нелинейных уравнений по неточным измерениям в дискретные моменты времени части фазовых состояний системы. Предполагается, что система функционирует на заданном конечном временно́м интервале. Эволюция её фазового состояния системы определяется неизвестным входом. Точное восстановление истинного, действующего на систему, входа, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Приводится алгоритм приближённого восстановления входа, основанный на комбинации динамических вариантов метода сглаживающего функционала и метода невязки и представляющий собой специальный регуляризирующий алгоритм для одного из вариантов обратной задачи динамики.

DOI: 10.31857/S0374064122030116, **EDN:** BYWHZD

Введение. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}(t) = f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta] \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in P$, $P \subset \mathbb{R}^r$, f_1 и f_{21} – липшицевы функции с константой Липшица L, u – возмущение, B – липшицева матрица соответствующей размерности, P – выпуклый компакт. Предполагается, что на систему (1) действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in P(\cdot) \equiv \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : u(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_{i,j} \in \Delta = \{\tau_{i,j}\}_{i\in[0:m],\ j\in[0:m^{(1)}]}$, где $\tau_{0,0} = 0$, $\tau_{m,m^{(1)}} = \vartheta$, $\tau_{i,j+1} = \tau_{i,j} + \delta_1$, $i \in [0 : m-1]$, $j \in [0 : m^{(1)} - 1]$, $\tau_{i,m^{(1)}} = \tau_{i+1,0}$, измеряется часть фазовых состояний системы (1), а именно состояния $x(\tau_{i,j}) = x(\tau_{i,j}; z_0, u(\cdot))$, где $z_0 = \{x_0, y_0\}$ – начальное состояние системы (1), $z(\cdot\,; z_0, u(\cdot)) = \{x(\cdot\,; z_0, u(\cdot)), y(\cdot\,; z_0, u(\cdot))\}$ – решение системы (1), отвечающее этому начальному состоянию и возмущению $u(\cdot)$. Результаты измерений – векторы $\xi^h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m-1]$, $j \in [0 : m^{(1)} - 1]$ – удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_{i,j}) - \xi^h_{i,j}|_n \leqslant h. \tag{2}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ – уровень погрешности измерений, через $|\cdot|_k$ обозначается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что начальное состояние системы (1) известно. Обсуждаемая задача состоит в построении алгоритма приближённого восстановления (реконструкции) неизвестного возмущения $u(\cdot)$ по результатам неточных измерений в дискретные моменты времени части $x(\cdot)$ состояний $z(\cdot)$.

Сформулированная задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Задачи такого типа в последние годы вызывают пристальное внимание исследователей (см., например, монографии [1–3]). Один из подходов к их решению развит в работах [4–12]. Этот подход основан на комбинации методов теории позиционного управления и теории некорректных задач. В работах [6–8, 10] приведены алгоритмы решения указанных задач, основанные на динамической модели метода сглаживающего функционала (метод Тихонова). При этом в работах [6, 10] изучалась линейная система и предполагалось отсутствие мгновенных ограничений на возмущения. Случай нелинейной системы рассматривался в работах [7, 8]. Алгоритмы решения задач динамической реконструкции при измерении части фазовых координат, основанные на других конструкциях, получены в [5, 9].

В настоящей работе найден алгоритм реконструкции, который основан на комбинации динамических вариантов метода сглаживающего функционала и метода невязки. В связи с неполнотой информации (а именно, с возможностью измерения в моменты $\tau_{i,j}$ не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_{i,j}), y(\tau_{i,j})\}$, а лишь его части – $x(\tau_{i,j})$), указанный алгоритм содержит два блока. Первый (вспомогательный) блок, основанный на методе сглаживающего функционала, используется для восстановления неизвестной координаты y. Второй блок, основанный на динамическом варианте метода невязки, применяется непосредственно к решению задачи восстановления неизвестного возмущения. При измерении всех координат аналогичный подход к решению задач реконструкции применялся в работах [4, 11, 12].

1. Метод решения задачи. Перейдём к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Как было отмечено выше, алгоритм будет состоять из двух блоков.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксированы два семейства разбиений отрезка T: семейство

$$\Delta_{m_h} = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h) \quad \text{с шагом} \quad \delta(h) = \vartheta/m_h, \tag{3}$$

а также семейство

$$\Delta_{m_h,m_h^{(1)}} = \{\tau_{i,j,h}\}_{i\in[0:m_h],\quad j\in[0:m_h^{(1)}]}, \quad \tau_{i,0,h} = \tau_{i,h}, \quad i \in [0:m_h],$$

$$\tau_{i,j+1,h} = \tau_{i,j,h} + \delta_1(h) \quad \text{с шагом} \quad \delta_1(h) = \delta(h)/m_h^{(1)}.$$

При этом для второго семейства выполняются равенства $\tau_{i,m_h^{(1)},h} = \tau_{i+1,0,h} = \tau_{i+1,h}$. Ниже используем обозначение $\xi_i^h = \xi_{i,0}^h$. Заметим, что

$$\xi_{i,0}^h = \xi_{i-1,m_h^{(1)}}^h.$$

Первый (вспомогательный) блок содержит управляемую систему и закон формирования управления $v^h(\cdot)$ для неё по принципу обратной связи V. Динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_1^h(t) = v^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_1^h, v^h \in \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

с начальным условием $w_1^h(0) = x_0$. Здесь управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле

$$v^h(t) = v_{i,j}^h = V(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, w_1^h(\tau_{i,j})) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}), \quad \tau_{ij} = \tau_{i,j,h}$$

$$(i \in [0:m_h-1], \quad j \in [0:m_h^{(1)}-1]), \tag{5}$$

$\xi_{i,j}^h$ – результат измерения компоненты $x(\tau_{i,j})$ (см. неравенство (2)). При $i = j = 0$ полагаем $\xi_{0,0}^h = x_0$. Закон $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta_1(h)$ управление $v^h(\cdot)$, стоящее в правой части системы (4), позволяет с помощью некоторого отображения $U_1 : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ сконструировать функцию $u_1^h(\cdot)$, заданную правилом

$$u_1^h(t) = u_{1i,j}^h = U_1(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i+1,j}),$$

$$\tau_{ij} = \tau_{i,j,h} \quad (i \in [0:m_h-1], \quad j \in [0:m_h^{(1)}-1]), \tag{6}$$

являющуюся приближением (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемой части $y(\cdot)$ фазовой траектории.

Второй (основной) блок – блок динамической реконструкции неизвестного возмущения – состоит из функции $u^h(\cdot)$ и закона $U(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^r$, который конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров управление $u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, \xi_i^h, u_{1i,0}^h, u_{1i-1,0}^h, u_{1i-1,m_h^{(1)}-1}^h), \quad \tau_{i-1} = \tau_{i-1,h} \quad (i \in [0 : m_h - 1]),$$

$$\text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \tag{7}$$

аппроксимирует неизвестный вход.

Необходимо отметить, что одно и тоже решение системы (1) может порождаться не единственным возмущением. Пусть $U(z(\cdot))$ – множество всех возмущений, порождающих решение $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы (1), т.е.

$$U(z(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in P(\cdot) : \dot{y}(t) - f_{21}(t, x(t), y(t)) = B(t, x(t), y(t))\tilde{u}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

Через $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T; \mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $U(z(\cdot))$, порождающее решение $z(\cdot)$ системы (1), т.е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in U(z(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу, будем восстанавливать возмущение $u_*(\cdot)$.

2. Алгоритм решения. Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Возьмём некоторые семейства Δ_{m_h} и $\Delta_{m_h, m_h^{(1)}}$ вида (3), а также функцию $\alpha(h) : (0, 1) \to (0.1)$.

Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^N$ – области, в которых остаются соответственно первые n и последние N фазовых координат (вместе с их единичными окрестностями) решения системы (1), порождённого неизвестным возмущением $u(\cdot)$, т.е.

$$S_1(x(t)) \in M_1, \quad S_1(y(t)) \in M_2 \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Здесь через $S_1(a)$ обозначен единичный шар с центром в точке a в соответствующем пространстве.

В дальнейшем полагаем, что выполнено следующее

Условие. В области $T \times M_1$ функция $y \to F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную функцию $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой по совокупности переменных с постоянной Липшица L_y. Кроме того, функция f_1 имеет производные по каждому аргументу и для измеряемой части $x(\cdot)$ решения справедливо включение $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$.

Введём постоянные $c^0 > 0$, $d > 0$, $d_* > 0$, при которых выполняются неравенства

$$|f_{21}(t, x, y) + B(t, x, y)u|_N \leqslant c^0 \quad \text{для всех} \quad t \in T, \quad (x, y) \in M_1 \times M_2,$$

$$|\dot{y}(t)|_N \leqslant d_0, \quad |\ddot{x}(t)|_n \leqslant d_*, \quad |\dot{x}(t) - f_1(0, x_0, y_0)|_n \leqslant d \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{8}$$

Пусть $d(P) = \sup_{u \in P} |u|_r$, c_1^0 – постоянная Липшица функции $B(t, x, y)$ в области $T \times M_1 \times M_2$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$, число $\alpha = \alpha(h)$ и два семейства Δ_{m_h} и $\Delta_{m_h, m_h^{(1)}}$ разбиений интервала T.

Работу алгоритма разобьём на однотипные шаги. Управления в системе (4) будем корректировать в узлах разбиения $\Delta_{m_h, m_h^{(1)}}$. В течение j-го шага, осуществляемого на временно́м промежутке $\delta_{i,j} = [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}) \subset [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент $\tau_{i,j}$, вычисляются векторы $v_{i,j}^h$ и $u_{1i,j}^h$ по формулам (5) и (6), в которых

$$V(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, w_1^h(\tau_{i,j})) = -\alpha^{-1}[w_1^h(\tau_{i,j}) - \xi_{i,j}^h + \tau_{i,j} f_1(0, x_0, y_0)],$$

$$U_1(\tau_{i,j}, \xi^h_{i,j}, v^h_{i,j}) = f^{-1}_{1y}(\tau_{i,j}, \xi^h_{i,j}, v^h_{i,j} + f_1(0, x_0, y_0)). \tag{9}$$

Затем на вход системы (4) при всех $t \in \delta_{i,j}$, $j \in [0 : m^{(1)}_h - 1]$, подаётся управление $v^h(t)$ вида (5), (9). Под действием этого управления решение системы (4) переходит из состояния $w^h_1(\tau_{i,j})$ в состояние $w^h_1(\tau_{i+1,j})$. В моменты $\tau_i = \tau_{i-1,m^{(1)}_h}$ вычисляем управление u^h_i по формуле (7), полагая

$$U(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i,0}, u^h_{1i-1,0}, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1}) = \arg\min_{u\in P}\{|u|_r : u \in \Omega_{h,i}\}. \tag{10}$$

Здесь

$$\Omega_{h,i} = \{v \in P : |(u^h_{1i,0} - u^h_{1i-1,0})\delta^{-1} - [f_{21}(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1}) + B(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1})v]|_N \leqslant \sigma_h\},$$

$$\sigma_h = 2C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\delta^{-1}(h) +$$
$$+ (L + c^0_1 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}.$$

Оказывается, что при определённом согласовании величин h, $\delta(h)$, $\delta_1(h)$ и $\alpha(h)$ функция $u^h(\cdot)$ представляет собой аппроксимацию возмущения $u_*(\cdot)$. Именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $\alpha(h)m_h \to 0$, $h\alpha^{-1}(h)m_h \to 0$, $m^{(1)}_h\alpha(h) \to \infty$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $\alpha(h) \to 0$, $\delta_1(h) \to 0$, $(h + \delta_1(h))\alpha^{-1}(h) \to$ $\to 0$ при $h \to 0$, то существует такое число $h_0 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_0)$ верна оценка

$$\sup_{t\in T} |u^h_1(t) - y(t)|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)), \tag{11}$$

здесь $\nu(h, \alpha, \delta_1) = \alpha + (h + \delta_1)\alpha^{-1}$, $C_0 = L_y(c_* + c_{**})$, где $c_* = \max\{15 + 24d + 2\max\{1, d\}; d_*\}$, $c_{**} = L_y\{1 + d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n\}$. Действительно, пусть

$$\dot X(t) = \dot x(t) - f_1(0, x_0, y_0), \quad X(0) = x_0. \tag{12}$$

Функция, стоящая в правой части (12), является дифференцируемой, её производная суммируема с квадратом евклидовой нормы. В нуле эта функция обращается в нуль. Кроме того,

$$X(\tau_{i,j}) = x(\tau_{i,j}) - \tau_{i,j} f_1(0, x_0, y_0).$$

Согласно [13, теорема 5] найдётся $h^{(1)} \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, h^{(1)})$ выполняется неравенство

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |v^h(t) - \dot X(t)|_n \leqslant c_*\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)).$$

В свою очередь в силу условия 1 имеем

$$y(t) = f^{-1}_{1y}(t, x(t), \dot x(t)), \tag{13}$$

$$|f^{-1}_{1y}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - f^{-1}_{1y}(t, x(t), \dot x(t))|_N \leqslant L_y c_*\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)). \tag{14}$$

Заметим, что

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |\dot x(t)|_n \leqslant d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n. \tag{15}$$

В таком случае при п.в. $t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}]$ получаем

$$|f^{-1}_{1y}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - u^h_1(t)|_N =$$

$$= |f_{1y}^{-1}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0))| - f_{1y}^{-1}(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h + f_1(0, x_0, y_0))|_N \leqslant$$

$$\leqslant L_y\Bigg(|t - \tau_{i,j}| + |x(\tau_{i,j}) - \xi_{i,j}^h|_n + \int\limits_{\tau_{i,j}}^{\tau_{i,j+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt\Bigg) \leqslant c_{**}(h + \delta_1(h)). \tag{16}$$

Из соотношений (13)–(16) вытекает, что

$$\sup_{t\in T} |u_1^h(t) - y(t)|_N \leqslant L_y\{c_*\nu(h, \alpha_1(h), \delta_1(h)) + c_{**}(h + \delta_1(h))\}. \tag{17}$$

В силу равенства $u_{1ij}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h + f_1(0, x_0, y_0))$ из (16), (17) следует оценка (11), справедливая при всех $h \in (0, h_0)$, $h_0 = h^{(1)}$.

Далее, имеет место оценка

$$J_1(t) \equiv |f_{21}(t, x(t), y(t)) - f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})| \leqslant L(|t - \tau_i| + I_1 + I_2), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \tag{18}$$

в которой $I_1 = |x(t) - \xi_i^h|_n$, $I_2 = |y(t) - u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}|_N$.

Вследствие неравенства (15) имеем

$$I_1 \leqslant h + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt \leqslant h + (d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h). \tag{19}$$

В свою очередь при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $h \in (0, h_0)$ в силу оценки (11) получаем

$$I_2 \leqslant |y(\tau_{i-1,m_h^{(1)}-1}) - u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}|_N + |y(\tau_{i-1,m_h^{(1)}-1}) - y(t)|_N \leqslant$$

$$\leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\dot{y}(t)|_N\,dt \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + \delta(h)d_0. \tag{20}$$

Из соотношений (18)–(20) вытекает справедливое при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ неравенство

$$J_1(t) \leqslant L\{C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + h + (d + 1 + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h)\}. \tag{21}$$

Кроме того, при этих же t для всех $u \in P$ имеет место неравенство

$$J_2(t) \equiv |B(t, x(t), y(t))u - B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)-1}})u|_N \leqslant c_1^0(|t - \tau_i| + I_1 + I_2)d(P).$$

Аналогично (21) при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ получаем

$$J_2(t) \leqslant c_1^0\{C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + h + (d + 1 + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h)\}d(P). \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) следует оценка

$$J_3(t) \equiv |[f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u] - [f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})u]|_N \leqslant$$

$$\leqslant (L + c_1^0 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}, \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \tag{23}$$

из которой вытекает, что

$$\Bigg|\delta^{-1} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u_*(t)]\,dt -$$

$$- \delta^{-1}[f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})] \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt\Big|_N \leqslant$$

$$\leqslant (L + c_1^0 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}. \tag{24}$$

Теперь учтём, что первое слагаемое в неравенстве (24) под знаком нормы $|\cdot|_N$, равное, очевидно, $(y(\tau_i) - y(\tau_{i-1}))\delta^{-1}$, отклоняется от величины $(u^h_{1i,0} - u^h_{1i-1,0})\delta^{-1}$ не более, чем на $2C_0(h, \alpha(h), \delta_1(h))\delta^{-1}(h)$. Отсюда в силу оценки (23) заключаем, что

$$\delta^{-1}(h) \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt \in \Omega_{h,i} \quad \text{при} \quad h \in (0, h_0), \quad i \in [1 : m_h]. \tag{25}$$

Введём вспомогательную систему

$$\dot{w}_2^h(t) = f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})u_i^h$$

$$\text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in [1 : m_h - 1]) \tag{26}$$

с начальным состоянием

$$w_2^h(\tau_1) = y_0.$$

Проверим равномерную сходимость решений $w_2^h(\cdot)$ системы (26) к функции $y(\cdot)$ при выполнении условий (7), (10). Очевидно, что для этого достаточно установить оценку

$$|y(\tau_i) - w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant \nu(h), \quad i \in [1 : m_h], \tag{27}$$

где $\nu(h) \to 0$ при $h \to 0$.

При $i = 1$ с учётом соотношений (5) и (8) имеем

$$|y(\tau_1) - w_2^h(\tau_1)|_N = |y(\tau_1) - y_0|_N \leqslant d_0\delta. \tag{28}$$

Пусть $i \in [2 : m_h - 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$|y(\tau_i) - w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant |y(\tau_1) - w_2^h(\tau_1)|_N +$$

$$+ \Big|\sum_{j=2}^{i}\{(y(\tau_j) - y(\tau_{j-1})) - (w_2^h(\tau_j) - w_2^h(\tau_{j-1}))\}\Big|_N \leqslant d_0 h + I_i^{(1)} + I_i^{(2)}, \tag{29}$$

где

$$I_i^{(1)} = \Big|\sum_{j=2}^{i}\{(u^h_{1j,0} - u^h_{1j-1,0}) - (w_2^h(\tau_j) - w_2^h(\tau_{j-1}))\}\Big|_N,$$

$$I_i^{(2)} = \sum_{j=2}^{i}\{|u^h_{1j,0} - y(\tau_j)|_N + |u^h_{1j-1,0} - y(\tau_{j-1})|_N\}.$$

Вследствие условий (7), (10) имеет место неравенство

$$I_i^{(1)} \leqslant \sum_{j=2}^{i} \delta\sigma_h = \vartheta\sigma_h. \tag{30}$$

В свою очередь в силу оценки (11) получаем

$$|u^h_{1j,0} - y(\tau_j)|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)), \quad |u^h_{1j-1,0} - y(\tau_{j-1})|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)).$$

Поэтому
$$I_i^{(2)} \leqslant 2\vartheta C_0\delta^{-1}(h)\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)). \tag{31}$$

Из неравенств (28)–(31) следует, что
$$|y(\tau_i)-w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant \nu(h)=d_0\delta(h)+\vartheta\sigma_h+2\vartheta C_0\delta^{-1}(h)\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)). \tag{32}$$

Утверждение теоремы вытекает из включения (25) и неравенства (27) и проверяется аналогично [2, с. 34, 35]. Теорема доказана.

3. Оценка скорости сходимости алгоритма. При некоторых дополнительных условиях может быть записана оценка скорости сходимости алгоритма. Для этого нам понадобится следующая доказанная в [2, с. 29]

Лемма. *Пусть* $u(\cdot)\in L_\infty(T_*;\mathbb{R}^n)$, $v(\cdot)\in W(T_*;\mathbb{R}^n)$, $T_*=[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$,
$$\bigg|\int\limits_a^t u(\tau)\,d\tau\bigg|_n \leqslant \varepsilon, \quad |v(t)|_n\leqslant K \quad \textit{для всех} \quad t\in T_*.$$

Тогда при любом $t\in T_*$ *верно неравенство*
$$\bigg|\int\limits_a^t (u(\tau),v(\tau))\,d\tau\bigg| \leqslant \varepsilon(K+\operatorname{var}(T_*;v(\cdot))).$$

Здесь $\varepsilon, K=\mathrm{const}\in(0,+\infty)$, через $\operatorname{var}(T_*;v(\cdot))$ обозначается вариация функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а через $W(T_*;\mathbb{R}^n)$ – множество функций $y(\cdot):T_*\to\mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Теорема 2. *Пусть* $u_*(\cdot)$ *– функция ограниченной вариации,* $B(t,x,y)=B$ *– постоянная матрица,* $N\geqslant r$, $\operatorname{rank} B=r$. *Пусть также выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех* $h\in(0,h_0)$ *верно неравенство*
$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau)-u_*(\tau)|_r^2\,d\tau \leqslant C_*(h+\delta(h)+\nu(h)),$$

где C_* *– положительная постоянная, не зависящая от* h, m_h, $m_h^{(1)}$ *и* α. *Число* h_0 *таково, что при всех* $h\in(0,h_0)$ *выполнена оценка (11), величина* $\nu(h)$ *определена в (32).*

Доказательство. Учитывая липшицевость функции f_{21}, а также теорему 1, заключаем, что для любых $t_1,t_2\in T$, $t_1<t_2$, справедливо неравенство
$$\bigg|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t)-u_*(t)\}\,dt\bigg|_N = \bigg|\int\limits_{t_1}^{t_2}[\dot w_2^h(\tau)-\dot y(\tau)-f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),u_1^h(\tau))+f_{21}(\tau,x(\tau),y(\tau))]\,d\tau\bigg|_N \leqslant$$
$$\leqslant |\mu_h(t_2)-\mu_h(t_1)|_N + c_1\bigg\{\int\limits_{t_1}^{t_2}\{|\xi^h(\tau)-x(\tau)|_n+|\tilde u_1^h(\tau)-y(\tau)|_N\}\,d\tau+\delta(h)\bigg\}, \tag{33}$$

где $\mu_h(t)=w_2^h(t)-y(t)$, $f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),\tilde u_1^h(\tau))=f_{21}(\tau_i,\xi_i^h,u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})$, $\xi^h(\tau)=\xi_i^h$, $\tilde u_1^h(\tau)=$ $=u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}$ при п.в. $\tau\in[\tau_i,\tau_{i+1})$. При $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ имеем
$$|\xi^h(t)-x(t)|_n=|\xi_i^h-x(t)|_n\leqslant|\xi_i^h-x(\tau_i)|_n+|x(\tau_i)-x(t)|_n\leqslant$$

$$\leqslant h + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt \leqslant c_2(h+\delta(h)), \tag{34}$$

$$|\tilde{u}^h(t) - y(t)|_N \leqslant |u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1} - y(\tau_i - \delta_1(h))|_N + |y(\tau_i - \delta_1(h)) - y(t)|_N \leqslant$$
$$\leqslant C_0\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)) + c_3(\delta(h)+\delta_1(h)) \leqslant C_0\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)) + c_4\delta(h). \tag{35}$$

Здесь и далее через $c_1,\ c_2,\ \ldots$ обозначаются постоянные, которые можно записать явно. Из неравенств (33)–(35) следует, что

$$\bigg|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t) - u_*(t)\}\,dt\bigg|_N \leqslant |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + c_5(t_2-t_1)(h+\delta(h)+\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h))). \tag{36}$$

Кроме того, в силу оценки (27) при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],\ \ i \in [1 : m_h - 1],$ верно неравенство

$$|\mu_h(t)|_N \leqslant |\mu_h(\tau_i)|_N + c_6\delta(h) \leqslant \nu(h) + c_6\delta(h),$$

учитывая которое и неравенство (36), получаем, что

$$\bigg|\int\limits_{t_1}^{t_2} \{u^h(t) - u(t)\}\,dt\bigg|_r \leqslant c_7\bigg|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t) - u(t)\}\,dt\bigg|_N \leqslant c_8(h+\nu(h)+\delta(h)). \tag{37}$$

Вследствие включения (25) имеем

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u^h(t)|_r^2\,dt = \delta(h)|u_i^h|_r^2 \leqslant \bigg|\delta^{-1}(h)\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt\bigg|_n^2 \delta(h) \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{-2}(h)\bigg(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r^2\,dt\bigg)\delta^2(h) = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r^2\,dt. \tag{38}$$

Тогда, учитывая (38), выводим оценку

$$\int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2\,d\tau = \int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_r^2\,d\tau - 2\int\limits_0^{\vartheta} (u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau + \int\limits_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\,d\tau - 2\int\limits_0^{\vartheta}(u^h(\tau), u(\tau))\,d\tau = 2\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau, \quad t \in T.$$

В силу леммы 1 и оценки (37) получаем

$$\sup_{t\in T}\bigg|\int\limits_0^t (u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau\bigg| \leqslant c_9(h+\delta(h)+\nu(h)).$$

Таким образом, при всех $h \in (0, h_0)$ и $t \in T$ верно неравенство

$$\int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u(\tau)|_N^2\,d\tau \leqslant c_{10}(h+\delta(h)+\nu(h)),$$

из которого и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
4. *Близорукова М.С.* О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. математика и информатика. 2000. № 5. С. 105–115.
5. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О одном алгоритме динамической реконструкции входных воздействий при измерении части координат // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 6. С. 1007–1017.
6. *Blizorukova M., Maksimov V.* On one algorithm for reconstruction of a disturbance in a linear system of ordinary differential equations // Arch. of Contr. Sci. 2020. V. 30. № 4. P. 757–773.
7. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Устойчивое решение обратных задач динамики управляемых систем. Оптимальное управление и дифференциальные игры // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1988. Т. 185. С. 126–146.
8. *Kryazimskii A.V., Osipov Yu.S.* On positional calculation of normal controls in dynamical systems // Probl. Control and Inform. Theory. 1984. V. 13. № 6. P. 425–436.
9. *Мартьянов А.С.* О реконструкции управлений по измерению части координат нелинейной динамической системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. Т. 4. С. 52–60.
10. *Maksimov V.I.* On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. V. 26. № 3. P. 395–410.
11. *Maksimov V.I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. V. 25. № 3. P. 465–481.
12. *Сурков П.Г.* Применение метода невязки в задаче восстановления правой части для системы дробного порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 11. С. 1846–1855.
13. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.
После доработки 02.09.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.