ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 425–432

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ К ВИДУ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ

© 2022 г. В. В. Фомичев, Е. И. Атамась, А. И. Роговский

Рассматривается задача о приведении линейной дифференциальной управляемой системы с соизмеримыми запаздываниями с помощью невырожденной линейной замены выходов к системе, для которой определён вектор относительного порядка.

DOI: 10.31857/S0374064122030128, **EDN:** BZEAPQ

Обозначения. Далее будем придерживаться следующих обозначений:

если A – матрица, то через A_{i*} обозначается её i-я строка;

если $r \in \mathbb{N}^l$, то $\operatorname{ord}(r)$ – вектор, имеющий те же, что и r, компоненты, но упорядоченные по неубыванию;

если $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$, то $|r| = r_1 + r_2 + \ldots + r_l$;

если v_1, v_2, $\ldots$, v_p – строки одинакового размера, то $G[v_1, v_2, \ldots, v_p]$ обозначает определитель Грама указанных строк, т.е. $G[v_1, v_2, \ldots, v_p] = \det(v_i v_j^{\mathrm{т}})_{i,j=1}^p$.

Введение. Рассматривается линейная система управления с соизмеримыми запаздываниями. Такая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t - i\tau), \\ y = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_i x(t - i\tau), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t), u(t) \in \mathbb{R}^l$, матрицы A_i, B_i, C_i, $i = \overline{0, k}$, постоянны и имеют соответствующие размеры, $\tau = \mathrm{const} > 0$. Вводя оператор запаздывания $\delta : f(t) \to f(t - \tau)$ и заменяя его символом Δ (считаем, что $\delta^0 \equiv \mathrm{id}$), запишем систему (1) в алгебраической форме

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u, \\ y = C(\Delta)x. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$A(\Delta) = \sum_{i=0}^{k} A_i \Delta^i, \quad B(\Delta) = \sum_{i=0}^{k} B_i \Delta^i, \quad C(\Delta) = \sum_{i=0}^{k} C_i \Delta^i$$

– полиномиальные матрицы размеров $n \times n$, $n \times l$, $l \times n$ соответственно. Систему (2) для краткости будем иногда обозначать через $\{A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)\}$, поскольку она однозначно определяется своими матрицами. Далее символ Δ считаем комплексной переменной, $\Delta \in \mathbb{C}$. Исследованию систем с запаздываниями посвящено огромное число работ (см., например, [1–6] и приведённую в них библиографию). Важным понятием для таких систем является понятие относительного порядка (см. [7]):

Определение 1. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *относительного порядка* системы (2), если выполнены следующие условия:

1) $C_{i*}(\Delta)A^{r_i - 1}(\Delta)B(\Delta) \neq 0\,^{*)}$ и если $r_i > 1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta) = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$;

$^{*)}$ Т.е. указанная строка отлична от строки, целиком состоящей из нулевых полиномов.

2) определитель матрицы

$$H(\Delta) = \begin{pmatrix} C_{1*}(\Delta)A^{r_1-1}(\Delta)B(\Delta) \\ \cdots \\ C_{l*}(\Delta)A^{r_l-1}(\Delta)B(\Delta) \end{pmatrix}$$

является ненулевым полиномом. Если, кроме того, определитель $\det H(\Delta)$ обратим, т.е. является ненулевым числом, то относительный порядок называется *чистым*.

Сравним определение относительного порядка для систем с запаздыванием с аналогичным определением для линейных систем без запаздывания, т.е. систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{3}$$

где, как и ранее, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t), u(t) \in \mathbb{R}^l$, а A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров. Системы без запаздывания также однозначно определяются своими матрицами, поэтому систему (3) иногда будем обозначать через $\langle A, B, C\rangle$.

Определение 1′. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{N}^l$ называется *вектором относительного порядка* системы (3), если выполнены следующие условия:

1′) $C_{i*}A^{r_i-1}B \neq 0$ и если $r_i > 1$, то $C_{i*}A^{j-1}B = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$;

2′) определитель матрицы

$$H = \begin{pmatrix} C_{1*}A^{r_1-1}B \\ \cdots \\ C_{l*}A^{r_l-1}B \end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

Как видим, определения 1 и 1′ схожи между собой, однако между ними есть и отличия. Для систем с соизмеримыми запаздываниями элементы строки $C_{i*}A^{r_i-1}B$ являются полиномами и условие $C_{i*}A^{r_i-1}B \neq 0$ означает, что, как отмечено в определении 1, в указанной строке имеется хотя бы один ненулевой полином, в то время как в случае систем без запаздывания строка $C_{i*}A^{r_i-1}B$ – элемент $\mathbb{R}^{1\times l}$ и указанное условие означает, что эта строка ненулевая.

Условие 2) отличия от нуля определителя матрицы $H(\Delta)$ можно понимать двумя разными способами. Можно считать, что определитель – отличный от нуля полином от Δ, а можно считать его отличной от нуля константой. В последнем случае говорят о *чистом относительном порядке*, в этом случае матрица $H(\Delta)$ обратима над кольцом полиномов от Δ.

Понятие относительного порядка играет важную роль в теории линейных систем. Например, если для системы выполняются условия относительного порядка (чистого относительного порядка для систем с запаздыванием), то её можно преобразовать к так называемой форме с выделением нулевой динамики [7], которая эффективно используется при решении различных задач управления (например, при решении задачи обращения [8; 9, гл. 2, § 2], наблюдения [10, гл. 5, § 5], стабилизации (см. [11]) и др. [12; 13, гл. 5, § 5]). Однако условия относительного порядка являются ограничительными и поэтому даже для линейных систем без запаздывания выполняются не всегда (см. [9, с. 69]). При этом эти условия, что важно в дальнейшем, не инвариантны по отношению к замене выходов. Покажем это на примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) + u_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2 = x_3(t) + u_1(t-\tau) + u_2(t-\tau), \\ \dot{x}_3 = u_2(t), \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Матрицы системы следующие:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Delta & \Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Проверим, выполняются ли условия относительного порядка: $C_{1*}B = (1,\ 1)$, $C_{2*}B = (\Delta,\ \Delta)$, поэтому требованию 1) определения 1 удовлетворяет вектор $r = (1,1)^{\text{т}}$. При этом матрица $H(\Delta)$, составленная из указанных строк, имеет нулевой определитель, а значит, условия относительного порядка не выполняются.

Сделаем замену выходов, положив

$$\tilde{y}_1(t) = y_1(t), \quad \tilde{y}_2(t) = y_2(t) - y_1(t-\tau). \tag{6}$$

Отметим, что замена обратима: $y_1(t) = \tilde{y}_1(t)$, $y_2(t) = \tilde{y}_2(t) - \tilde{y}_1(t-\tau)$. После преобразования система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) + u_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2 = x_3(t) + u_1(t-\tau) + u_2(t-\tau), \\ \dot{x}_3 = u_2(t), \\ y_1 = x_1(t), \\ y_2 = x_2(t) - x_1(t-\tau). \end{cases} \tag{7}$$

Матрицы A и B этой системы те же, что и в (5), а матрица C следующая:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Delta & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим для системы (7) условия относительного порядка: $C_{1*}B = (1,1)$ и $C_{2*}B = (0,0)$, $C_{2*}AB = (-\Delta^2, -\Delta^2+1)$. Поэтому условию 1) определения 1 удовлетворяет вектор $r = (1,2)^{\text{т}}$, а определитель матрицы $H(\Delta)$, как легко видеть, равен 1. Это означает, что преобразованная система имеет относительный порядок.

Таким образом, с помощью замены выходов нам удалось добиться выполнения условий относительного порядка. Это, однако, возможно не всегда, даже для линейных систем без запаздывания (см. [14]). Цель настоящей работы – выяснить, при каких условиях систему, не имеющую относительного порядка, можно с помощью замены выходов преобразовать к системе, для которой условия относительного порядка выполняются.

Сформулируем задачу формально. Заметим, что использованная в примере замена выходов (6) эквивалентна умножению матрицы C исходной системы на полиномиальную матрицу

$$T(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица является *унимодулярной* (т.е. её определитель равен ненулевой константе), что обеспечивает обратимость замены. Далее будем рассматривать только такие замены выходов (так как они являются обратимыми). Мы приходим к постановке задачи.

Задача. Дана система $\{A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)\}$, не имеющая относительного порядка. Требуется проверить, существует ли такая унимодулярная матрица $T(\Delta)$, что для системы $\{A(\Delta), B(\Delta), T(\Delta)C(\Delta)\}$ условия относительного порядка выполняются и, если существует, найти эту матрицу.

Обобщения относительного порядка. В работе [14] для решения аналогичной задачи для систем без запаздывания вводятся обобщения относительного порядка. Здесь мы распространим эти понятия на случай систем с запаздыванием. Для замкнутости изложения приведём определения обобщений относительного порядка для систем без запаздывания.

Так как условия относительного порядка являются ограничительными, ослабим их.

Определение 2′. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (3), если для него выполняется условие 1′) определения 1′, т.е. $C_{i*}A^{r_i-1}B \neq 0$ и если $r_i > 1$, то $C_{i*}A^{j-1}B = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$.

Определение 3′. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*) системы (3), если он является вектором НОП и для любых попарно различных индексов i_1, i_2, $\ldots$, i_q таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$ строки $\{C_{j*}A^{r_j-1}B\}_{j=1}^{q}$ линейно независимы.

Иначе говоря, в определении $3'$, в отличие от условия $2'$) определения $1'$, требуется линейная независимость не всех строк $C_{i*}A^{r_i-1}B$, а только тех, которые соответствуют одинаковым компонентам вектора НОП.

Распространим приведённые понятия на системы с запаздыванием.

Определение 2. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (2), если для него выполнено условие 1) определения 1, т.е. $C_{i*}(\Delta)A^{r_i-1}(\Delta)B(\Delta) \neq 0$ и если $r_i > 1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta) = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$.

В примере 1 система (4) не имеет относительного порядка, но для неё, как показано, определён вектор НОП $r = (1, 1)^{\text{т}}$.

Определение 3. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*) системы (2), если он является вектором НОП и для любых попарно различных индексов i_1, i_2, $\ldots$, i_q таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$, полином $G[C_{i_1*}A^{r_{i_1}-1}B, C_{i_2*}A^{r_{i_2}-1}B, \ldots, C_{i_q*}A^{r_{i_q}-1}B]$ ненулевой.

Замечание 1. В определении 3 требование к определителю Грама можно заменить требованием линейной независимости строк $\{C_{i_j*}(\Delta)A^{r_{i_j}-1}(\Delta)B(\Delta)\}_{j=1}^q$ (как элементов $\mathbb{R}^{1\times l}$) при всех Δ, за исключением, быть может, конечного числа значений.

Замечание 2. Определения 2 и 3 практически дословно повторяют соответственно определения $2'$ и $3'$ для систем без запаздывания. В частности, в определении 3, фактически, требуется линейная независимость строк $C_{i*}A^{r_i-1}B$, соответствующих равным компонентам вектора НОП, при этом допускается, чтобы эти строки были линейно зависимы при некоторых Δ, но таких значений должно быть лишь конечное число.

Замечание 3. Отметим, что если система (2) имеет вектор ГНОП r (т.е. условия определения 3 выполняются для полиномиальных матриц $A(\Delta)$, $B(\Delta)$, $C(\Delta)$), то это означает, что при каждом фиксированном Δ^*, кроме, быть может, конечного числа значений, линейная динамическая система без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ также имеет вектор ГНОП r (в смысле определения $3'$).

В примере 1 система (4) не имеет вектора ГНОП, поскольку при $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ для вектора НОП r этой системы справедливо $r_{i_1} = r_{i_2} = 1$, однако $G[C_{1*}B, C_{2*}B] = G[(1,1), (\Delta, \Delta)] = 0$.

Так как мы рассматриваем задачу приведения системы к виду с относительным порядком с помощью замены выходов, выделим класс систем, для которых наличие вектора НОП инвариантно по отношению к замене выходов.

Далее, поскольку речь будет идти исключительно о системе (2), аргумент Δ в её матрицах A, B и C, а также в матрице T линейного преобразования будем, как правило, опускать.

Определение 4. Систему $\{A, B, C\}$ назовём *слабо приводимой*, если при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП.

Сформулируем критерий слабой приводимости.

Лемма 1. *Система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой тогда и только тогда, когда матрица $V(\Delta) = [CB, CAB, \ldots, CA^{n-1}B]$ имеет полный ранг l при всех Δ за исключением, быть может, конечного числа значений.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой, но $\operatorname{rank} V(\Delta) < l$ для всех $\Delta \in D$, причём D – счётное множество. Найдётся такая унимодулярная матрица T, что матрица $\tilde{V} = TV$ имеет ступенчатую форму (см. [15, с. 140]). Заметим, что последняя строка $\tilde{V}_{l*}$ матрицы $\tilde{V}$ состоит из нулевых полиномов. В самом деле, согласно определению ступенчатой формы, матрица $V(\Delta) \in \mathbb{R}^{l\times nl}$ имеет полный ранг, если она не содержит нулевых строк. Если все строки матрицы V содержат хотя бы один ненулевой полином, то, поскольку такой полином может обращаться в нуль лишь для конечного числа значений Δ, эта матрица будет иметь полный ранг при всех Δ, за исключением конечного их числа. Однако по предположению $\operatorname{rank} V(\Delta) < l$ для всех $\Delta \in D$, где D – счётное множество. Таким образом,

$$V_{l*}(\Delta) = (T_{l*}CB, T_{l*}CAB, \ldots, T_{l*}CA^{n-1}B) = 0 \quad \text{для любого} \quad \Delta. \tag{8}$$

При этом, согласно теореме Гамильтона–Кели, из предыдущего равенства следует, что

$$T_{l*}CA^{j-1}B = 0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

В самом деле, при произвольном фиксированном Δ^* все степени матрицы $A(\Delta^*)$ линейно выражаются через её первые n степеней (начиная с нулевой), поэтому

$$T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{j-1}(\Delta^*)B(\Delta^*) = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{q-1}(\Delta^*)B(\Delta^*).$$

При этом произведения $T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{q-1}(\Delta^*)B(\Delta^*)$, $q=\overline{1,n}$, являются нулевыми строками, согласно (8) (как элементы нулевой строки V_{l*}). Таким образом, для любого $j\in\mathbb{N}$ имеем равенство $T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{j-1}(\Delta^*)B(\Delta^*)=0$. В силу произвольности Δ^* получаем (9).

Рассмотрим систему $\{A,B,\tilde{C}\}$, где $\tilde{C}=TC$. Согласно предположению эта система имеет вектор НОП r. Заметим, что $\tilde{C}_{l*}=T_{l*}C$, поэтому, согласно (9), система $\{A,B,\tilde{C}\}$ не имеет вектора НОП. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть матрица V имеет полный ранг при всех Δ, за исключением, возможно, конечного числа значений. Тогда тем же свойством обладает и матрица $\tilde{V}=TV$, где T – произвольная унимодулярная матрица. Рассмотрим систему $\{A,B,\tilde{C}\}$, где $\tilde{C}=TC$. Согласно сказанному выше матрица $\tilde{V}$ не имеет строк, целиком состоящих из нулевых полиномов. Так как строка $\tilde{V}_{i*}$ этой матрицы состоит из строк $\tilde{C}_{i*}A^{j-1}B$, найдётся номер q, для которого $\tilde{C}_{i*}A^{q-1}B\neq 0$. Это означает, что система $\{A,B,C\}$ имеет вектор НОП. В силу произвольности матрицы T отсюда следует, что система $\{A,B,C\}$ является слабо приводимой. Достаточность, а вместе с нею и лемма, доказаны.

Отметим некоторые свойства вектора ГНОП.

Лемма 2. *Пусть система $\{A,B,C\}$ является слабо приводимой. Тогда найдётся такая унимодулярная матрица T, что система $\{A,B,TC\}$ имеет вектор ГНОП.*

Доказательство. Приведём алгоритм нахождения матрицы T.

Шаг 0. Положим $A^0=A$, $B^0=B$, $C^0=C$ и перейдём к следующему шагу.

Шаг $p+1$. На предыдущем шаге получена система $\{A^p,B^p,C^p\}$. Если она имеет вектор ГНОП, то алгоритм останавливается. Предположим, что у неё нет вектора ГНОП. Тогда в силу слабой приводимости этой системы для неё определён вектор НОП r^p. При этом найдутся такие попарно различные индексы i_1, i_2, $\ldots$, i_q, что полином

$$G[C^p_{i_1*}(A^p)^{r^*-1}B^p, C^p_{i_2*}(A^p)^{r^*-1}B^p,\ldots,C^p_{i_q*}(A^p)^{r^*-1}B^p]$$

нулевой, причём $r^*=r^p_{i_1}=\ldots=r^p_{i_q}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $i_j=j$, $j=\overline{1,q}$ (этого всегда можно добиться, переставив строки матрицы C^p с помощью умножения её на соответствующую унимодулярную матрицу).

Рассмотрим матрицу

$$V=\begin{pmatrix} C^p_{1*}(A^p)^{r^*-1}B^p\\ C^p_{2*}(A^p)^{r^*-1}B^p\\ \ldots\\ C^p_{q*}(A^p)^{r^*-1}B^p\end{pmatrix}.$$

Известно (см., например, [15, с. 140]), что найдётся такая унимодулярная матрица $\tilde{T}^p$, что матрица $\tilde{T}^pV$ имеет ступенчатую форму. При этом последняя строка матрицы TV нулевая, иначе, согласно определению ступенчатой формы матрицы, ранг матрицы $\tilde{T}^pV$ равен q при почти всех Δ.

Определим матрицу T^p равенством

$$T^p=\begin{pmatrix}\tilde{T}^p & 0\\ 0 & I_{l-q}\end{pmatrix}.$$

Положим $A^{p+1}=A^p$, $B^{p+1}=B^p$, $C^{p+1}=T^pC^p$ и рассмотрим систему $\{A^{p+1},B^{p+1},C^{p+1}\}$. Заметим, что для вектора НОП этой системы справедливо неравенство $|r^{p+1}|>|r^p|$. Действительно, учитывая вид матрицы T^p, заключаем, что последние $l-q$ строк матрицы C^p такие же, как и у матрицы C^{p+1}, поэтому $r_j^{p+1} = r_j^p$, $j = \overline{q+1, l}$. Покажем, что $r_j^{p+1} \geqslant r_j^p$, $j = \overline{1, q}$. В самом деле, учитывая вид матрицы T^p, получаем

$$C_{i*}^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p, \quad i = \overline{1, q},$$

откуда

$$C_{i*}^{p+1}(A^{p+1})^{j-1}B^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p (A^p)^{j-1} B^p. \tag{10}$$

В силу определения НОП и того, что $r* = r_1^p = \ldots = r_q^p$, верны равенства $C_{i*}^p(A^p)^{j-1}B^p = 0$, $j = \overline{1, r^* - 1}$, $i = \overline{1, q}$, из которых, согласно (10), вытекает, что $C_{i*}^{p+1}(A^{p+1})^{j-1}B^{p+1} = 0$, $j = \overline{1, r^* - 1}$, $i = \overline{1, q}$, т.е. $r_j^{p+1} \geqslant r_j^p$, $j = \overline{1, q}$.

Покажем теперь, что $r_q^{p+1} > r_q^p$. Вследствие сказанного выше строка q матрицы T^pV является нулевой, т.е.

$$C_{q*}^{p+1}(A^{p+1})^{r^*-1}B^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p (A^p)^{r^*-1} B^p = 0.$$

Последнее равенство означает, что $r_q^{p+1} > r_q^p$. При этом имеет место покомпонентная “монотонность”, т.е. каждая компонента вектора не уменьшилась. Таким образом, получили систему $\{A^{p+1}, B^{p+1}, C^{p+1}\}$, для которой $|r^{p+1}| > |r^p|$. Перейдём к следующему шагу.

Покажем, что приведённый алгоритм обязательно остановится на каком-то шаге. Заметим, что для вектора НОП r любой системы (2) справедливы неравенства $r_i \leqslant n$, $i = \overline{1, l}$. В самом деле, если $r_i > n$, то $C_{i*}A^{j-1}B = 0$, $j = \overline{1, n}$, а это, согласно теореме Гамильтона–Кели, означает, что $C_{i*}A^{j-1}B = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, т.е. вектор НОП для системы не определён. Таким образом, $r_i \leqslant n$, $i = \overline{1, l}$, и $|r| \leqslant nl$.

Так как на каждом шаге алгоритма “длина” $|\cdot|$ вектора НОП построенной системы увеличивается, то на некотором шаге алгоритм остановится, а получившаяся система будет иметь вектор ГНОП. Лемма доказана.

Далее неравенства между векторами одинаковой размерности понимаем покомпонентно, а i-ю компоненту вектора v обозначаем через v_i.

Лемма 3. *Пусть r – вектор ГНОП слабо приводимой системы $\{A, B, C\}$. Тогда при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП $\tilde{r}$, причём выполняется неравенство* $\operatorname{ord}(r) \geqslant \operatorname{ord}(\tilde{r})$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. существует такая унимодулярная матрица T, что

$$(\operatorname{ord}(r))_i < (\operatorname{ord}(\tilde{r}))_i \tag{11}$$

для некоторого индекса i. Заметим, что при всех Δ, кроме, быть может, конечного числа значений, для системы без запаздывания $\langle A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)\rangle$ определён вектор ГНОП, совпадающий с r. Также при всех Δ, кроме, быть может, конечного числа значений, для системы без запаздывания $\langle A(\Delta), B(\Delta), T(\Delta)C(\Delta)\rangle$ определён вектор НОП, совпадающий с $\tilde{r}$ (см. Замечание 3). Таким образом, найдётся Δ^*, при котором для линейных систем без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ и $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$ определены векторы ГНОП r и НОП $\tilde{r}$ соответственно.

Известно (см. [14, 16]), что если r – вектор ГНОП линейной системы без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$, а $\tilde{r}$ – вектор НОП системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$, то справедливо неравенство $\operatorname{ord}(r) \geqslant \operatorname{ord}(\tilde{r})$. Но это неравенство противоречит (11). Лемма доказана.

Следствие. *Вектор ГНОП системы (2) определён однозначно с точностью до порядка его компонент.*

Основной результат. Приведённые выше свойства обобщений относительного порядка позволяют сформулировать и доказать основной результат работы.

Теорема. *Пусть для системы $\{A, B, C\}$ определён вектор ГНОП, причём для этой системы не выполняются условия определения 1. Тогда при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ условия определения 1 также не выполняются.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. r – вектор ГНОП системы $\{A, B, C\}$, и для этой системы не выполняются условия определения 1, однако существует такая унимодулярная матрица T, что для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор относительного порядка $\tilde{r}$. Не ограничивая общности, считаем, что векторы r и $\tilde{r}$ упорядочены по невозрастанию (этого всегда можно добиться перестановкой выходов). Тогда $r = \tilde{r}$ по следствию из леммы 3. При этом, согласно определению, найдётся такое число Δ^*, что для систем без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ и $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$ определены векторы ГНОП r и ОП $\tilde{r}$ соответственно. Однако, в силу известного свойства [17] линейных систем без запаздывания, если для одной системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ не выполнены условия ОП, то и для любой другой системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$, вектор НОП которой совпадает с вектором НОП исходной, также не выполнены условия ОП. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 2. Рассмотрим систему $\{A, B, C\}$ с матрицами

$$A(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для этой системы не определён относительный порядок, так как $C_{1*}B = (\Delta, 0)$ и $C_{2*}B = (0, 0)$, $C_{2*}AB = (\Delta^2, 0)$, но определён вектор ГНОП $r = (1, 2)^{\mathrm{т}}$. Согласно доказанной теореме это означает, что с помощью замены выходов нельзя преобразовать систему к форме с относительным порядком. Установим это утверждение явно. Пусть в системе сделана замена выходов $\tilde{y} = T(\Delta)y$, где $T(\Delta) = T_{ij}(\Delta)_{i,j=1}^2$ – унимодулярная матрица. Рассмотрим систему $\{A(\Delta), B(\Delta), \tilde{C}(\Delta)\}$, где $\tilde{C} = TC$. Матрица выходов этой системы имеет вид

$$\tilde{C}(\Delta) = T(\Delta)C(\Delta) = \begin{pmatrix} T_{11}(\Delta) & T_{12}(\Delta) & 0 & 0 \\ T_{21}(\Delta) & T_{22}(\Delta) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{C}_{1*}B = (T_{11}(\Delta)\Delta, 0), \quad \tilde{C}_{1*}AB = (T_{12}(\Delta)\Delta^2, 0), \\ &C_{2*}B = (T_{21}(\Delta)\Delta, 0), \quad C_{2*}AB = (T_{22}(\Delta)\Delta^2, 0). \end{aligned} \tag{12}$$

Так как матрица $T(\Delta)$ унимодулярна, то хотя бы один из полиномов T_{11} или T_{12} отличен от нулевого, и то же самое справедливо и для полиномов T_{21}, T_{22}. Таким образом, матрица H из определения 1 будет составлена из каких-то строк (12). Это означает, что определитель этой матрицы будет нулевым полиномом при любой унимодулярной матрице T, т.е. исходную систему с помощью линейных невырожденных замен выходов нельзя преобразовать к системе с относительным порядком.

Лемма 3 и теорема работы получены авторами при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288). Остальные результаты, включая примеры, получены Атамасем Е.И. и Роговским А.И. при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных-кандидатов наук (МК-4905.2021.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В.* Обращение гипервыходных систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 5. С. 538–541.
2. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
3. *Villasana M., Radunskaya A.* A delay differential equation model for tumor growth // J. of Math. Biology. 2003. V. 47. № 3. C. 270–294.

4. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. on Automatic Contr. 1986. V. 31. № 6. P. 543–550.
5. *Bodnar M., Forys U., Poleszczuk Jan.* Analysis of biochemical reactions models with delays // J. of Math. Anal. and Appl. 2011. V. 376. № 1. P. 74–83.
6. *Zhu Y., Krstic M.* Adaptive and robust predictors for multi-input linear systems with distributed delays // SIAM J. on Contr. and Optimization. 2020. V. 58. № 6. P. 3457–3485.
7. *Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В.* О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 11–15.
8. *Атамась Е.И.* Алгоритмы обращения динамических систем с запаздыванием: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2009.
9. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
10. *Фомичев В.В., Коровин С.К.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределённостью. М., 2007.
11. *Wang L., Isidori A., Su H.* Global stabilization of a class of invertible MIMO nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Contr. 2015. V. 60. № 3. P. 616–631.
12. *Isidori A.* The zero dynamics of a nonlinear system: from the origin to the latest progresses of a long successful story // Proceed. of the 30th Chinese Control Conf. 2011. P. 18–25.
13. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
14. *Краев А.В., Роговский А.И., Фомичев В.В.* К обобщению относительного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128–1132.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1966.
16. *Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И.* О приведении гипервыходных систем к форме с относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1503–1515.
17. *Краев А.В.* Некоторые свойства относительного порядка линейных стационарных динамических систем // Нелинейная динамика и управление: сб. ст. / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М., 2013. Т. 8. С. 105–112.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский центр
“Курчатовский институт”, г. Москва

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 02.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.