ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 435–455

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929+519.216.8

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

© 2022 г. **Р. И. Кадиев, А. В. Поносов**

Изучается новый класс стохастических систем с запаздыванием, содержащий одновременно как компоненты с непрерывным, так и компоненты с дискретным временем. Для анализа различных видов устойчивости таких систем предложен и обоснован модифицированный метод регуляризации, основанный на выборе вспомогательного уравнения и применении теории положительно обратимых матриц. Разработка этого метода для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений осуществлена Н.В. Азбелевым и его учениками. Приводятся достаточные условия моментной устойчивости решений как в терминах положительной обратимости матриц, построенных по параметрам этих систем, так и в терминах коэффициентов. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных систем уравнений.

DOI: 10.31857/S037406412204001X, EDN: BZESBP

Светлой памяти нашего дорогого учителя
Николая Викторовича Азбелева (15.04.1922–03.11.2006),
выдающегося советского и российского математика,
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящают авторы эту работу

Введение. Непрерывно-дискретные системы уравнений, образующие важный подкласс так называемых “гибридных систем”, характеризуются наличием двух составляющих в пространстве состояний, а именно, компонент с непрерывным временем и компонент с дискретным временем. Интуитивно это означает, что динамика одной из компонент является чисто непрерывной, тогда как другая подвергается дополнительным воздействиям в определённые моменты времени. Такие системы естественным образом возникают в приложениях, например, в теории управления [1], экологических [2] или биологических [3] моделях.

Поведение многих реальных процессов в природе и технике определяется состоянием не только в текущий, но и в предшествующие моменты времени. Примерами могут служить динамические системы, управляемые на значительном расстоянии, а также системы с транспортным запаздыванием. Исследования показывают, что решения таких систем без учёта запаздывания, даже при малой его величине, могут существенно отличаться от решений тех же систем с запаздывающим аргументом. Это обстоятельство подчёркивает необходимость и принципиальную важность изучения систем с запаздыванием.

Одним из основных условий физической реализуемости процесса является его устойчивость. Поэтому изучение непрерывно-дискретных систем и их приложений естественным образом приводит к необходимости создания соответствующего направления в теории устойчивости. Систематическое изучение качественной теории детерминированных непрерывно-дискретных систем с запаздыванием, в том числе их устойчивости, начато в работах В.М. Марченко и его соавторов [4, 5] и продолжено в статье [6]. В этих работах непрерывно-дискретные системы называются “гибридными”, но, как справедливо указано в [5], в англоязычной литературе последний термин обычно используется в несколько ином контексте. Поэтому в данной статье мы называем подобные системы *непрерывно-дискретными*, что согласуется с более поздними публикациями по этой тематике, посвящёнными как общей теории таких систем, так и их приложениям (см., например, статью [7] и приведённые в ней ссылки).

Наконец, учёт стохастических эффектов – важная часть любого реалистичного подхода к моделированию. Например, в популяционной динамике демографическая и экологическая стохастичность возникают из-за изменения во времени факторов, внешних по отношению к системе, но влияющих на выживание популяции, а в теории управления случайные коэффициенты могут моделировать, например, неточности при измерениях. Поэтому изучение непрерывно-дискретных (гибридных) стохастических систем привлекает в последнее время внимание многих специалистов (см., например, [8] и использованные в ней ссылки).

Исследования устойчивости систем со случайными параметрами часто проводятся методом функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина [9, 10]. Однако, как отмечается в монографии [11], применение прямого метода Ляпунова и его стохастических аналогов для функционально-дифференциальных уравнений в многих случаях встречает серьёзные трудности. В частности, эффективные признаки устойчивости обычно удаётся доказывать этими методами лишь для сравнительно простых классов уравнений.

В данной статье изучается задача, которая ранее, по-видимому, не исследовалась – задача устойчивости линейных непрерывно-дискретных (гибридных) стохастических уравнений с запаздываниями. Главное отличие систем, рассматриваемых в статье, от стохастических систем, изученных в работе [8], заключается в наличии в нашем случае взаимозависимости компонент системы, что приводит к дополнительным трудностям в использовании функционалов Ляпунова–Красовского–Разумихина. Учитывая сложности, связанные с обоснованием и применением этой теории, алгоритм получения признаков устойчивости основан в настоящей работе на методе регуляризации, также известном как метод модельных (вспомогательных) уравнений или “ W-метод Азбелева” [11, 12]. Этот подход доказал свою эффективность как в теории стохастических дифференциальных уравнений [13], так и при исследовании стохастических разностных уравнений [14–16]. Суть метода заключается в том, что вместо функционала на пространстве траекторий решений рассматривается ”модельное” уравнение, которое обладает заданным свойством устойчивости и которое используется для регуляризации исходного уравнения. Проверка устойчивости последнего состоит в оценке нормы некоторого интегрального оператора или проверки положительной обратимости некоторой матрицы. Последняя версия W-метода разработана в публикациях [17, 18].

1. Постановка задачи. В статье систематически используются следующие обозначения:

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ – стохастический базис, где Ω – множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий на Ω, $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ – непрерывный справа поток σ-алгебр на Ω, P – полная вероятностная мера на $\mathcal{F}$;

E – символ математического ожидания на этом пространстве;

k^n – линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин;

$\mathcal{B}_i$ $(i=\overline{2,m})$ – независимые стандартные скалярные винеровские процессы;

D^n – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\infty)$, траектории которых почти наверное (п.н.) непрерывны справа и имеют пределы слева;

L^n – линейное пространство n-мерных случайных процессов на $(-\infty,0)$, которые не зависят от винеровских процессов $\mathcal{B}_i$ $(i=\overline{2,m})$ и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории;

$|\cdot|$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^n$;

$\|\cdot\|$ – норма $m\times n$-матриц, согласованная с нормой в $\mathbb{R}^n$;

$\bar{E}$ – единичная матрица порядка m;

e – n-мерный вектор-столбец, все элементы которого равны единице;

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_+=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$;

$\|\cdot\|_X$ – норма в нормированном пространстве X;

μ – мера Лебега на $[0,\infty)$;

$[t]$ – целая часть числа t;

$\gamma:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$ – некоторая положительная непрерывная функция;

$M_q^\gamma=\{x: x\in D^n,\ \|x\|_{M_q^\gamma}\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)x(t)|^q)^{1/q}<\infty\}$, $\quad M_q^1=M_q$ $\ (1\leqslant q<\infty)$;

$k_q^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, \ \|\alpha\|_{k_q^n} \overset{\text{def}}{=} (E|\alpha|^q)^{1/q} < \infty\} \ \ (1 \leqslant q < \infty);$

$L_q^n = \{\varphi : \varphi \in L^n, \ \|\varphi\|_{L_q^n} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma<0} (E|\varphi(\varsigma)|^q)^{1/q} < \infty\} \ \ (1 \leqslant q < \infty).$

В дальнейшем для описания класса непрерывно-дискретных систем будет зафиксировано натуральное число l $(1 \leqslant l < n)$ такое, что $x_1(t), \ \ldots, \ x_l(t)$ $(t \geqslant 0)$ – компоненты вектора состояний системы с непрерывным временем, тогда как $x_{l+1}(s), \ \ldots, \ x_n(s)$ $(s \in \mathbb{N}_+)$ – его компоненты с дискретным временем. В векторных обозначениях это будет записываться следующим образом: $\hat{x}(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_l(t))$ $(t \geqslant 0)$, $\tilde{x}(s) = \operatorname{col}(x_{l+1}(s), \ldots, x_n(s))$ $(s \in \mathbb{N}_+)$ и $x(t) = \operatorname{col}(\hat{x}(t), \tilde{x}([t])) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \ldots, x_n([t]))$ $(t \geqslant 0)$.

В статье для решений системы линейных дифференциальных и разностных уравнений Ито с последействием вида

$$d\hat{x}(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))\,dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))\,d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geqslant 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s} A_1(s,j)x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} A_i(s,j)x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh)) \quad (s \in \mathbb{N}_+) \quad (1)$$

исследуются вопросы моментной устойчивости по начальным данным

$$x(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \quad (\varsigma < 0), \qquad (1a)$$

$$x(0) = b. \qquad (1b)$$

Здесь:

$x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \ldots, x_n([t]))$ $(t \geqslant 0)$ – n-мерный неизвестный случайный процесс;

$A_{ij}(t)$ – $l \times n$-матрицы $(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,m_i})$, причём элементами матриц $A_{1j}(t)$, $j = \overline{1,m_1}$, являются прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы на интервале $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями, а элементами матриц $A_{ij}(t)$, $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, – прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы на $[0,\infty)$, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

$h_{ij}(t)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, – измеримые по Борелю функции, заданные на $[0,\infty)$ и такие, что $h_{ij}(t) \leqslant t$ $(t \geqslant 0)$ μ-почти всюду (п.в.), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$;

h – положительное действительное число;

$A_i(s,j)$ – $(n-l) \times n$-матрицы, элементами которых являются $\mathcal{F}_s$–измеримые скалярные случайные величины при $i = \overline{1,m}$, $s \in \mathbb{N}_+$, $j = \overline{-\infty, s}$;

$\varphi(\varsigma) = \operatorname{col}(\varphi_1(\varsigma), \ldots, \varphi_l(\varsigma), \varphi_{l+1}([\varsigma]), \ldots, \varphi_n([\varsigma]))$ $(\varsigma < 0)$ – $\mathcal{F}_0$–измеримый n-мерный случайный процесс с п.н. ограниченными в существенном траекториями;

$b = \operatorname{col}(b_1, \ldots, b_n)$ – $\mathcal{F}_0$–измеримая n-мерная случайная величина, т.е. $b \in k^n$.

Определение 1. Под *решением* задачи (1), (1a), (1b) понимается случайный процесс $x(t) = \operatorname{col}(x_1(t), \ldots, x_l(t), x_{l+1}([t]), \ldots, x_n([t]))$ $(t \in \mathbb{R})$, являющийся прогрессивно измеримым при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющий соотношениям

$$x(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \quad (\varsigma < 0), \qquad x(0) = \operatorname{col}(\hat{x}(0), \tilde{x}(0)) = b,$$

а также P-п.в. системе

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) - \sum_{j=1}^{m_1} \int_0^t A_{1j}(\varsigma)x(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} \int_0^t A_{ij}(\varsigma)x(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma) \quad (t \geqslant 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s} A_1(s,j)x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} A_i(s,j)x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i(sh)) \quad (s \in \mathbb{N}_+),$$

в которой первый интеграл – это интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито.

Используя метод сжимающих отображений, можно убедиться (см., например, [19]), что при сделанных предположениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение. В частности, при нулевых начальных условиях эта задача имеет только тривиальное (т.е. нулевое) решение.

Обозначим решение задачи (1), (1a), (1b) через $x(t,b,\varphi)$ $(t \in \mathbb{R})$. Очевидно, на интервале $[0,+\infty)$ выполнено соотношение $x(\cdot,b,\varphi) \in D^n$.

Пусть $1 \leqslant q < \infty$.

Определение 2. Систему (1) назовём:

q-устойчивой по начальным данным, если для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\epsilon) > 0$, что при всех $b \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$, для которых $\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\epsilon)$, выполняется неравенство $(E|x(t,b,\varphi)|^q)^{1/q} \leqslant \epsilon$ для любого $t \geqslant 0$;

асимптотически q-устойчивой относительно начальных данных, если оно q-устойчиво, и, кроме того, для всех $b \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$, для которых $\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta(\epsilon)$, выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty}(E|x(t,b,\varphi)|^q)^{1/q} = 0$;

экспоненциально q-устойчивой относительно начальных данных, если существуют положительные числа c и λ такие, что для решения $x(t,b,\varphi)$ $(t \in \mathbb{R})$ задачи (1), (1a), (1b) при всех $b \in k_q^n$ и $\varphi \in L_q^n$ выполняется неравенство

$$(E|x(t,b,\varphi)|^q)^{1/q} \leqslant c\exp\{-\lambda t\}(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}) \quad (t \geqslant 0).$$

В настоящей статье, в основном, изучается экспоненциальная q-устойчивость, однако используемый метод регуляризации применим в гораздо более общем контексте. Так как все виды устойчивости из определения 2 представляют практический интерес, метод исследования будет ниже изложен в максимально общем виде.

2. Метод регуляризации в задачах устойчивости. В этом пункте излагается основной метод исследования, применяемый в настоящей статье и адаптированный к непрерывно-дискретным стохастическим системам. Для этой цели свойства стохастической устойчивости из определения 2 будут переформулированы в более удобном виде.

Следующее свойство объединяет все виды стохастической устойчивости из определения 2. Пусть $1 \leqslant q < \infty$.

Определение 3. Систему (1) назовём *M_q^γ-устойчивой*, если при любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решения $x(t,b,\varphi)$ $(t \in \mathbb{R})$ задачи (1), (1a), (1b) на интервале $[0,\infty)$ выполняются соотношение $x(\cdot,b,\varphi) \in M_q^\gamma$ и неравенство $\|x(\cdot,b,\varphi)\|_{M_q^\gamma} \leqslant c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n})$ для некоторого положительного числа c.

Непосредственное сравнение определений 2 и 3 приводит к следующим очевидным выводам, на которых основан метод регуляризации (т.е. W-метод Азбелева) для непрерывно-дискретных стохастических систем:

– из M_q-устойчивости системы (1) следует q-устойчивость этой же системы относительно начальных данных;

– из M_q^γ-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ $(t \geqslant 0)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$) вытекает асимптотическая q-устойчивость этой же системы относительно начальных данных;

– из M_q^γ-устойчивости системы (1) (где $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$ $(t \geqslant 0)$, λ – некоторое положительное число) следует экспоненциальная q-устойчивость этой же системы по начальным данным.

Для дальнейшего описания метода регуляризации рассмотрим следующую вспомогательную ("модельную") непрерывно-дискретную систему линейных стохастических уравнений:

$$d\hat{x}(t) = (-B(t)\hat{x}(t) + f_1(t))\,dt + \sum_{i=2}^m f_i(t)\,d\mathcal{B}_i(t) \quad (t \geqslant 0),$$

$$\tilde{x}(s+1) = \tilde{x}(s) + (-\bar{B}(s)\tilde{x}(s) + g_1(s))h + \sum_{i=2}^m g_i(s)(\mathcal{B}_i((s+1)h) - \mathcal{B}_i((s+1)h)) \quad (s \in \mathbb{N}_+), \quad (2)$$

где $B(t)-$ $l\times l$-матрица, элементами которой являются прогрессивно измеримые случайные процессы на интервале $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями, $f_1(t)$ – l-мерный прогрессивно измеримый случайный процесс на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми траекториями, $f_i(t)$, $i=\overline{2,m}$, – l-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы на $[0,\infty)$ с п.н. локально суммируемыми с квадратом траекториями, $\bar B(s)$ – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, элементами которой являются $\mathcal{F}_s$-измеримые скалярные случайные величины $(s\in\mathbb{N}_+)$, $g_i(s)$, $i=\overline{1,m}$, – $(n-l)$-мерные $\mathcal{F}_s$-измеримые случайные величины $(s\in\mathbb{N}_+)$, $h>0$ – константа из уравнения (1).

Справедливость следующей леммы непосредственно вытекает из известных формул, дающих представления решений линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных и разностных уравнений. В случае обыкновенных линейных дифференциальных уравнений Ито доказательства аналога этой леммы можно найти в диссертации [19].

Лемма 1. *Для решения $x(t)$ системы (2) имеет место представление*

$$\hat x(t)=\hat X(t,0)\hat x(0)+\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)f(\varsigma)\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)f_i(\varsigma)\,dB_i(\varsigma)\quad(t\geqslant 0),$$

$$\tilde x(s)=\tilde X(s,0)\tilde x(0)+\sum_{\tau=0}^{s-1}\tilde X(s,\tau+1)g_1(\tau)h+\sum_{i=2}^m\sum_{\tau=0}^{s-1}\tilde X(s,\tau+1)g_i(\tau)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}dB_i(\varsigma)\quad(s\in\mathbb{N}_+),$$

где $\hat X(t,\varsigma)$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$ – $l\times l$-матрица, столбцы которой являются решениями системы $d\hat x(t)=-B(t)\hat x(t)\,dt$ $(t\geqslant 0)$, причём $\hat X(t,t)$ $(t\geqslant 0)$ – единичная матрица порядка l, а $\tilde X(s,\tau)$ $(s,\tau\in\mathbb{N}_+,\ 0\leqslant\tau\leqslant s)$ – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, столбцы которой являются решениями системы $\tilde x(s+1)=\tilde x(s)+\bar B(s)\tilde x(s)h$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, причём $\tilde X(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ – единичная матрица порядка $n-l$.

Используя вспомогательную систему (2) и лемму 1, запишем задачу (1), (1a), (1b) в эквивалентном виде

$$\bar x(t)=X(t)b+(\Theta\bar x)(t)+(K\varphi)(t)\quad(t\geqslant 0),\tag{3}$$

где $X(t)$ – блочно-диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят матрицы $\hat X(t,0)$ и $\tilde X([t],0)$, а вне неё – нулевые матрицы $\hat 0$ и $\tilde 0$ размеров $l\times(n-l)$ и $(n-l)\times l$ соответственно. Операторы Θ и K имеют следующее представление:

$$(\Theta\bar x)(t)=\operatorname{col}\biggl(\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)\biggl(B(\varsigma)\hat{\bar x}(\varsigma)-\sum_{j=1}^{m_1}A_{1j}(\varsigma)\bar x(h_{1j}(\varsigma))\biggr)\,d\varsigma+$$

$$+\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)A_{ij}(\varsigma)\bar x(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma),\ -\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde X([t],\tau+1)\biggl(\bar B(\tau)\tilde{\bar x}(\tau)-\sum_{j=0}^{\tau}A_1(\tau,j)\bar x(j)\biggr)h+$$

$$+\sum_{i=2}^m\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde X([t],\tau+1)\sum_{j=0}^{\tau}A_i(\tau,j)\bar x(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\zeta)\biggr),$$

$$(K\varphi)(t)=\operatorname{col}\biggl(-\sum_{j=1}^{m_1}\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)A_{1j}(\varsigma)\bar\varphi(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t\hat X(t,\varsigma)A_{ij}(\varsigma)\bar\varphi(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)-$$

$$-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde X([t],\tau+1)\sum_{j=-\infty}^{-1}A_1(\tau,j)\varphi(j)h+\sum_{i=2}^m\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde X([t],\tau+1)\sum_{j=-\infty}^{-1}A_i(\tau,j)\varphi(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\zeta)\biggr),$$

$\bar{x}(t) = \operatorname{col}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_l(t), \bar{x}_{l+1}([t]), \ldots, \bar{x}_n([t]))$ – неизвестный n-мерный случайный процесс на $\mathbb{R}$ такой, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t < 0$ и $\bar{x}(t) = x(t)$ при $t \geqslant 0$,

$$\hat{\bar{x}}(t) = \operatorname{col}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_l(t)), \quad \tilde{\bar{x}}(t) = \operatorname{col}(\bar{x}_{l+1}([t]), \ldots, \bar{x}_n([t])),$$

а $\bar{\varphi}(t)$ – известные n-мерные случайные процессы на $\mathbb{R}$, причём $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $\bar{\varphi}(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Этот способ представления решений систем с запаздыванием, заданных на $\mathbb{R}$ в виде уравнений на полуоси $[0, \infty)$, широко используется в теории функционально-дифференциальных уравнений [12].

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant q < \infty$ *и существует система (2) такая, что при любых* $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$, $\bar{x} \in M_q^\gamma$ *для системы (3) на интервале* $[0, \infty)$ *справедливы оценки*

$$\|Xb\|_{M_q^\gamma} \leqslant c_1\|b\|_{k_q^n}, \quad \|\Theta\bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leqslant c_2\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma}, \quad \|K\varphi\|_{M_q^\gamma} \leqslant c_3\|\varphi\|_{L_q^n},$$

где c_1, c_2, c_3 *– некоторые положительные постоянные, причём* $c_2 < 1$. *Тогда система (1) является* M_q^γ*-устойчивой.*

Доказательство. Из представления (3) следует неравенство

$$\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leqslant \|Xb\|_{M_q^\gamma} + \|\Theta\bar{x}\|_{M_q^\gamma} + \|K\varphi\|_{M_q^\gamma},$$

из которого в силу предположений теоремы получаем, что

$$\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} \leqslant c_1\|b\|_{k_q^n} + c_2\|\bar{x}\|_{M_q^\gamma} + c_3\|\varphi\|_{L_q^n}.$$

Так как $c_2 < 1$ и $x(t, b, \varphi) = \bar{x}(t)$ при $t \geqslant 0$, то из предыдущего неравенства вытекает, что при любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решения $x(t, b, \varphi)$ $(t \in \mathbb{R})$ задачи (1), (1a), (1b) на интервале $[0, \infty)$ выполняются соотношение $x(\cdot, b, \varphi) \in M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|x(\cdot, b, \varphi)\|_{M_q^\gamma} \leqslant c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_p^n}),$$

где c – некоторая положительная постоянная. Значит, система (1) является M_q^γ-устойчивой, и теорема доказана.

Теорему 1 можно использовать для получения достаточных условий устойчивости системы (1) в терминах параметров этой системы, как это делается в классической версии W-метода [11]. Однако, как показано в работах [17, 18], такие условия получаются более точными, если использовать покомпонентные оценки решений. Поэтому ниже предлагается улучшенный метод регуляризации для случая непрерывно-дискретных стохастических систем с последействием.

Определение 4. Обратимая матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называется *положительно обратимой*, если все элементы матрицы B^{-1} положительны.

Согласно [20, гл. 16, с. 305] матрица B положительно обратима, если $b_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) все диагональные миноры матрицы B положительны;

2) существуют $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что $\xi_i b_{ii} > \sum_{j=1,\ i\neq j}^m \xi_j |b_{ij}|$, $i = \overline{1, m}$;

3) существуют $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, такие, что $\xi_j b_{jj} > \sum_{i=1,\ i\neq j}^m \xi_i |b_{ij}|$, $j = \overline{1, m}$.

В частности, если положить $\xi_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, то получим класс матриц со строгим диагональным преобладанием и неположительными внедиагональными элементами.

Для случайного процесса $\bar{x}(t) = \operatorname{col}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_l(t), \bar{x}_{l+1}([t]), \ldots, \bar{x}_n([t]))$ и константы $1 \leqslant q < \infty$ введём обозначение $\bar{x}^\gamma(q) = \operatorname{col}(\bar{x}_1^\gamma(q), \ldots, \bar{x}_n^\gamma(q))$, где $\bar{x}_i^\gamma(q) = \sup\limits_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)\bar{x}_i(t)|^q)^{1/q}$ при $i = \overline{1, l}$ и $\bar{x}_i^\gamma(q) = \sup\limits_{t\geqslant 0}(E|\gamma(t)\bar{x}_i([t])|^q)^{1/q}$ при $i = \overline{l+1, n}$.

Пусть для некоторых $1 \leqslant q < \infty$ и положительной непрерывной функции $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ нам удалось с помощью покомпонентных оценок решений системы (3) получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E}\bar{x}^\gamma(q) \leqslant C\bar{x}^\gamma(q) + \bar{c}\|b\|_{k_q^n} e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n} e, \tag{4}$$

где C – некоторая неотрицательная $n \times n$-матрица, а $\bar{c}$, $\hat{c}$ – некоторые неотрицательные постоянные. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть существует вспомогательная система (2) такая, что в неравенстве (4) матрица $\bar{E}-C$ является положительно обратимой. Тогда система (1) M_q^γ-устойчива.*

Доказательство. Пользуясь положительной обратимостью матрицы $\bar{E}-C$, запишем неравенство (4) в следующем виде:

$$\bar{x}^\gamma(q) \leqslant (\bar{E}-C)^{-1}(\bar{c}\|b\|_{k_q^n}e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}e),$$

откуда получаем, что

$$|\bar{x}^\gamma(q)| \leqslant c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}), \tag{5}$$

где $c = \|(\bar{E}-C)^{-1}\||e|\max\{\bar{c},\hat{c}\}$. Так как $x(t,b,\varphi)=\bar{x}(t)$ при $t \geqslant 0$ и $\|x(\cdot,b,\varphi)\|_{M_q^\gamma} \leqslant |\bar{x}^\gamma(q)|$, то из неравенства (5) следует, что при любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ для решений $x(t,b,\varphi)$ $(t \in \in \mathbb{R})$ задачи (1), (1a), (1b) на интервале $[0,\infty)$ выполняются соотношение $x(\cdot,b,\varphi) \in M_q^\gamma$ и неравенство

$$\|x(\cdot,b,\varphi)\|_{M_q^\gamma} \leqslant c(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}),$$

где c – некоторая положительная постоянная. Значит, система (1) является M_q^γ-устойчивой. Теорема доказана.

На основании теоремы 2 в п. 3 будут получены достаточные условия моментной устойчивости системы (1) по начальным данным в терминах параметров этой системы.

3. Достаточные условия M_q^γ-устойчивости. В этом пункте изучается задача устойчивости системы (1) в смысле определения 3. При этом пространства M_q^γ рассматриваются с весом и без него (т.е. $\gamma = 1$). В последнем случае система (1) будет устойчива в смысле определения 2, т.е. по начальным данным. Понятие M_q^γ-устойчивости с экспоненциальным весом γ используется в п. 4 для доказательства признаков экспоненциальной моментной устойчивости системы (1) по начальным данным. В дальнейшем считаем, что $1 \leqslant p < \infty$.

Сформулируем две леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $f(\varsigma)$ – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(\varsigma)$ на отрезке $[0,t]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\biggl(E\biggl|\int_0^t f(\varsigma)\,d\mathcal{B}(\varsigma)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant c_p\biggl(E\biggl(\int_0^t |f(\varsigma)|^2\,d\varsigma\biggr)^p\biggr)^{1/(2p)}, \tag{6}$$

где c_p – некоторая постоянная, зависящая от p.

Справедливость неравенства (6) следует из неравенства, приведённого в монографии [21, § 65], где указаны и конкретные оценки для c_p.

Лемма 3. *Пусть $g(\varsigma)$ – скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируем, а $f(\varsigma)$ – скалярный случайный процесс такой, что $\sup\limits_{\varsigma\geqslant 0}(E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/2p} < \infty$. Тогда справедливы неравенства*

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int_0^t g(\varsigma)f(\varsigma)\,d\varsigma\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\biggl(\int_0^t |g(\varsigma)|\,d\varsigma\biggr)\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}, \tag{7}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\int_0^t g(\varsigma)^2 f(\varsigma)^2\,d\varsigma\biggr|^{p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\biggl(\int_0^t g(\varsigma)^2\,d\varsigma\biggr)^{1/2}\sup_{\varsigma\geqslant 0}(E|f(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}. \tag{8}$$

Лемма 3 доказана в работе [13].

В дальнейшем используются обозначения, введённые в предыдущих пунктах. Кроме того, элементы матрицы $A_{ij}(t)$ из системы (1) обозначаются ниже $a_{kr}^{ij}(t)$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, при

$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $t\geqslant 0$, а элементы матрицы $A_i(s,j)$ из этой системы обозначаются $a^i_{kr}(s,j)$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, при $i=\overline{1,m}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s}$.

Для формулировки теоремы 3 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

a_1) существуют суммируемые функции $\bar a^{1j}_{kr}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $j=\overline{1,m_1}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, и суммируемые с квадратом функции $\bar a^{ij}_{kr}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, такие, что $|a^{ij}_{kr}(t)|\leqslant \bar a^{ij}_{kr}(t)$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$;

a_2) существуют неотрицательные числа $\bar a^i_{kr}(s,j)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s}$, такие, что $|a^i_{kr}(s,j)|\leqslant \bar a^i_{kr}(s,j)$ P-п.в. при $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s}$;

a_3) имеет место соотношение $\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\tau}\bar a^i_{kr}(\tau,j)<\infty$ при $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$.

Определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kr}=\sum_{j=1}^{m_1}\int\limits_0^{\infty}\bar a^{1j}_{kr}(\varsigma)\,d\varsigma+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\biggl(\int\limits_0^{\infty}\bar a^{ij}_{kr}(\varsigma)^2\,d\varsigma\biggr)^{1/2},\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},$$

$$c_{kr}=h\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\tau}\bar a^1_{kr}(\tau,j)+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\tau}\bar a^i_{kr}(\tau,j),\quad k=\overline{l+1,n},\quad r=\overline{1,n}.$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 3. *Если выполнены условия a_1)–a_3) и матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) M_{2p}-устойчива.*

Доказательство. Применим теорему 2 при $q=2p$ и $\gamma(t)\equiv 1$ $(t\geqslant 0)$. В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, у которой элементы матриц $B(t)$ и $\bar B(s)$ тождественно нулевые. В этом случае матрицы $\hat X(t,\varsigma)$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$ и $\tilde X(s,\tau)$ $(s,\tau\in\mathbb{N}_+,\ 0\leqslant\tau\leqslant s)$ являются единичными матрицами порядков l и $n-l$ соответственно. Представление (3) запишем в следующем виде:

$$\bar x_k(t)=b_k-\sum_{j=1}^{m_1}\biggl(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar x_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar x_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\biggr)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\biggl(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar x_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar x_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\biggr)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\biggl(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar\varphi_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar\varphi_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\biggr)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\biggl(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar\varphi_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar\varphi_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\biggr)\quad(t\geqslant 0),\quad k=\overline{1,l},$$

$$\bar x_k([t])=b_k-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\sum_{j=0}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a^1_{kr}(\tau,j)\bar x_r(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\sum_{j=0}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a^i_{kr}(\tau,j)\bar x_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma)-$$

$$-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{r=1}^{n}a^1_{kr}(\tau,j)\varphi_r(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{r=1}^{n}a^i_{kr}(\tau,j)\varphi_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma)\quad(t\geqslant 0),\quad k=\overline{l+1,n}.$$

Из этого представления, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также с учётом оценок

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \|b\|_{k_{2p}^n} \quad (k=\overline{1,n}), \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma<0}(E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} < \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \quad (r=\overline{1,n})$$

получаем

$$\bar{x}_k^1(2p) \leqslant \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr}\bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n c_{kr}\|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k=\overline{1,l},$$

$$\bar{x}_k^1(2p) \leqslant \|b\|_{k_{2p}^n} + \sum_{r=1}^n c_{kr}\bar{x}_k^1(2p) + \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr}\|\varphi\|_{L_{2p}^n}, \quad k=\overline{l+1,n},$$

где $\bar{c}_{kr} = h\sum_{\tau=0}^\infty\sum_{j=-\infty}^{-1}\bar{a}_{kr}^1(\tau,j) + c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^m\sum_{\tau=0}^\infty\sum_{j=-\infty}^{-1}\bar{a}_{kr}^i(\tau,j)$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$.

Последнюю систему неравенств запишем в матричной форме

$$\bar{E}\bar{x}^1(2p) \leqslant C\bar{x}^1(2p) + \|b\|_{k_q^n}e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n}e,$$

где $\hat{c} = \max\{\sum_{r=1}^n c_{kr},\ k=\overline{1,l},\ \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr},\ k=\overline{l+1,n}\}$. Так как матрица $\bar{E}-C$ положительно обратима, то в силу теоремы 2 система (1) M_{2p}-устойчива. Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 4 предположим, что для системы (1) выполнены условия:

$b_1)$ справедливо равенство $h_{11}(t)=t$ $(t\geqslant 0)$;

$b_2)$ диагональные элементы матриц $A_{11}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $A_1(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ имеют вид $a_{kk}^{11}(t)+ +\lambda_k$ $(t\geqslant 0)$, $k=\overline{1,l}$, и $a_{kk}^1(s,s)+\lambda_k$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, $k=\overline{l+1,n}$, соответственно, где λ_k, $k=\overline{1,n}$, – некоторые положительные числа, причём $0<\lambda_k h<1$, $k=\overline{l+1,n}$;

$b_3)$ существуют неотрицательные числа $\bar{a}_{kr}^{ij}$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, такие, что $|a_{kr}^{ij}(t)|\leqslant\bar{a}_{kr}^{ij}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при всех этих индексах;

$b_4)$ существуют неотрицательные числа $\bar{a}_{kr}^i(s,j)$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in \in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s}$, такие, что $|a_{kr}^i(s,j)|\leqslant\bar{a}_{kr}^i(s,j)$ P-п.в. при всех этих индексах, причём $\sup\limits_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=-\infty}^\tau\bar{a}_{kr}^i(\tau,j)<\infty$ при $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$.

Определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{m_1}\bar{a}_{kr}^{1j} + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k=\overline{1,l}, \quad r=\overline{1,n},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=0}^{\tau}\bar{a}_{kr}^1(\tau,j) + \frac{c_p}{\lambda_k\sqrt{h}}\sum_{i=2}^m\sup_{\varsigma\geqslant 0}\sum_{j=0}^{\tau}\bar{a}_{kr}^i(\tau,j), \quad k=\overline{l+1,n}, \quad r=\overline{1,n}.$$

Тогда справедлива

Теорема 4. *Если выполнены условия $b_1)$–$b_4)$ и матрица $\bar{E}-C$ является положительно обратимой, то система (1) M_{2p}-устойчива.*

Доказательство. Снова воспользуемся теоремой 2 при $q=2p$ и $\gamma(t)\equiv 1$ $(t\geqslant 0)$. В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, у которой $B(t)$ и $\bar{B}(s)$ являются постоянными диагональными матрицами с диагональными элементами λ_k, $k=\overline{1,l}$, и λ_k, $k=\overline{l+1,n}$, соответственно. В этом случае $\hat{X}(t,\varsigma)$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$ и $\tilde{X}(s,\tau)$ $(s,\tau\in \in\mathbb{N}_+,\ 0\leqslant\tau\leqslant s)$ также являются диагональными матрицами с диагональными элементами $\hat{x}_k(t,\varsigma)=\exp\{-\lambda_k(t-\varsigma)\}$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$, $k=\overline{1,l}$, и $\tilde{x}_k(s,\tau)=(1-\lambda_k h)^{s-\tau}$ $(s,\tau\in\mathbb{N}_+,$ $0\leqslant\tau\leqslant s)$, $k=\overline{l+1,n}$, соответственно. Тогда систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_k(t) = \hat{x}_k(t,0)b_k - \sum_{j=1}^{m_1}\left(\sum_{r=1}^l\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{1j}(\varsigma)\bar{x}_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma + \sum_{r=l+1}^n\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{1j}(\varsigma)\bar{x}_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\right) +$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\Bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{ij}(\varsigma)\bar{x}_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{ij}(\varsigma)\bar{x}_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\Bigg)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\Bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\Bigg)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\Bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{ij}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)a_{kr}^{ij}(\varsigma)\bar{\varphi}_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\Bigg),$$

если $t\geqslant 0$, $k=\overline{1,l}$, и

$$\bar{x}_k([t])=\tilde{x}_k([t],0)b_k-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=0}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^{1}(\tau,j)\bar{x}_r(j)h+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=0}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^{i}(\tau,j)\bar{x}_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma)-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^{1}(\tau,j)\varphi_r(j)h+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{r=1}^{n}a_{kr}^{i}(\tau,j)\varphi_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma),$$

если $t\geqslant 0$, $k=\overline{l+1,n}$. Из этой системы, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также учитывая оценки

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)}\leqslant\|b\|_{k_{2p}^n}\quad(k=\overline{1,n}),\qquad \operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma<0}(E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)}<\|\varphi\|_{L_{2p}^n}\quad(r=\overline{1,n})$$

и равенства

$$\sup_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)\,d\varsigma=\frac{1}{\lambda_k},\quad \sup_{t\geqslant 0}\Bigg(\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)^2\,d\varsigma\Bigg)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}}\quad(k=\overline{1,l}),$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)=\sup_{t\geqslant 0}(1+(1-\lambda_k h)+\ldots+(1-\lambda_k h)^{[t]-1}=$$

$$=\sum_{\tau=0}^{\infty}(1-\lambda_k h)^{\tau}=\frac{1}{1-(1-\lambda_k h)}=\frac{1}{\lambda_k h}\quad(k=\overline{l+1,n}),$$

получаем, что

$$\bar{x}_k^1(2p)\leqslant\|b\|_{k_{2p}^n}+\sum_{r=1}^{n}c_{kr}\bar{x}_k^1(2p)+\sum_{r=1}^{n}c_{kr}\|\varphi\|_{L_{2p}^n},\quad k=\overline{1,l},$$

$$\bar{x}_k^1(2p)\leqslant\|b\|_{k_{2p}^n}+\sum_{r=1}^{n}c_{kr}\bar{x}_k^1(2p)+\sum_{r=1}^{n}\bar{c}_{kr}\|\varphi\|_{L_{2p}^n},\quad k=\overline{l+1,n},$$

где

$$\bar{c}_{kr}=\frac{1}{\lambda_k}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=-\infty}^{-1}\bar{a}_{kr}^{1}(\tau,j)+\frac{c_p}{\lambda_k\sqrt{h}}\sum_{i=2}^{m}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=-\infty}^{-1}\bar{a}_{kr}^{i}(\tau,j),\quad k=\overline{l+1,n},\quad r=\overline{1,n}.$$

Последнюю систему неравенств запишем в матричной форме

$$\bar{E}\bar{x}^1(2p) \leqslant C\bar{x}^1(2p) + \|b\|_{k_q^n} e + \hat{c}\|\varphi\|_{L_q^n} e,$$

где $\hat{c} = \max\{\sum_{r=1}^n c_{kr},\ k = \overline{1,l};\ \sum_{r=1}^n \bar{c}_{kr},\ k = \overline{l+1,n}\}$. Так как матрица $\bar{E}-C$ положительно обратима, то система (1) будет M_{2p}-устойчивой в силу теоремы 2. Теорема доказана.

В следующей теореме рассматривается M_{2p}^{γ}-устойчивость системы (1) с экспоненциальным весом $\gamma(t) = \exp\{\lambda t\}$ $(t \geqslant 0)$, где λ – некоторое положительное число. Эта теорема является главным источником признаков экспоненциальной $2p$-устойчивости системы (1) по начальным данным, которые будут установлены в следующем пункте работы. Как отмечается в [11], примеры показывают, что экспоненциальная устойчивость решений систем детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений, как правило, наблюдается только в случае ограниченных запаздываний. Это объясняет, в частности, первое из условий c_1), накладываемых на систему (1) в приводимой ниже теореме 5. Предположим, что:

c_1) существуют неотрицательные числа τ_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, такие, что $0 \leqslant t - h_{ij}(t) \leqslant \tau_{ij}$ $(t \geqslant 0)$ μ-п.в. при всех этих индексах;

c_2) существуют неотрицательные числа $\bar{a}_{kr}^{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, $k = \overline{1,l}$, $r = \overline{1,n}$, такие, что $|a_{kr}^{ij}(t)| \leqslant \bar{a}_{kr}^{ij}$ $(t \geqslant 0)$ $P \times \mu$-п.в. при всех этих индексах; кроме того, пусть существуют положительные числа λ_k, $k = \overline{1,n}$, для которых

c_3) диагональные элементы матрицы $A_1(s,s)$ $(s \in \mathbb{N}_+)$ имеют вид $a_{kk}^1(s,s) + \lambda_k$ $(s \in \mathbb{N}_+)$, $k = \overline{l+1,n}$;

c_4) справедливо неравенство $\sum_{j\in I_k} a_{kk}^{1j}(t) \geqslant \lambda_k$ $(t \geqslant 0)$ $P \times \mu$-п.в. при $k = \overline{1,l}$ для некоторых подмножеств $I_k \subset \{1,\ldots,m_1\}$, $k = \overline{1,l}$;

c_5) выполняются оценки $0 < \lambda_k h < 1$ при $k = \overline{l+1,n}$;

c_6) существуют $d_i \in \mathbb{N}_+$, $i = \overline{1,m}$, для которых:

элементы матриц $A_i(s,j)$ равны нулю P-п.в. при $s \in \mathbb{N}_+$, $j = \overline{-\infty, s-d_i-1}$, $i = \overline{1,m}$;

$|a_{kr}^i(s,j)| \leqslant \bar{a}_{kr}^i(s,j)$ P-п.в. при $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{l+1,n}$, $r = \overline{1,n}$, $s \in \mathbb{N}_+$, $j = \overline{s-d_i, s}$, причём для всех $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{l+1,n}$, $r = \overline{1,n}$

$$\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+} \sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau,j) < \infty,$$

где $\nu_i(\tau) = 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant d_i$ и $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$ при $\tau > d_i$.

Элементы $n \times n$-матрицы C определим следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{1}{\lambda_k}\Biggl(\sum_{j\in I_k} \bar{a}_{kk}^{1j}\Biggl(\sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1\nu}\tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu}\sqrt{\tau_{1j}}\Biggr) + \sum_{\substack{j=1\\ j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_k}}^{m_1} \bar{a}_{kk}^{1j}\Biggr) + \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}_{kk}^{ij}, \quad k = \overline{1,l},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k}\Biggl(\sum_{j\in I_k} \bar{a}_{kr}^{1j}\Biggl(\sum_{\nu=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1\nu}\tau_{1j} + c_p \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i} \bar{a}_{kr}^{i\nu}\sqrt{\tau_{1j}}\Biggr) + \sum_{j=1}^{m_1} \bar{a}_{kr}^{1j}\Biggr) +$$
$$+ \frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}_{kr}^{ij}, \quad k = \overline{1,l}, \quad r = \overline{1,n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kr} = \frac{1}{\lambda_k h}\Biggl(h \sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau} \bar{a}_{kr}^1(\tau,j) + c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}_{kr}^i(\tau,j)\Biggr), \quad k = \overline{1,l}, \quad r = \overline{1,n}.$$

Тогда справедлива

Теорема 5. *Если выполнены условия* c_1)*–*c_6) *и матрица* $\bar{E}-C$ *является положительно обратимой, то система (1)* M^{γ}_{2p}*-устойчива с экспоненциальным весом* $\gamma(t)=\exp\{\lambda t\}$ $(t\geqslant 0)$, *где*

$$0<\lambda<\min\{\lambda_i,\ i=\overline{1,l};\ -\ln(1-\lambda_i h),\ i=\overline{l+1,n}\}. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $q=2p$ и воспользуемся схемой доказательства двух предыдущих теорем. В качестве вспомогательной системы (2) возьмём систему, где $B(t)$ и $\bar{B}(s)$ являются диагональными матрицами с диагональными элементами $\sum_{j\in I_k}a^{1j}_{kk}(t)$, $k=\overline{1,l}$, и λ_k, $k=\overline{l+1,n}$, соответственно. В этом случае $\hat{X}(t,\varsigma)$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$ и $\tilde{X}(s,\tau)$ $(s,\tau\in\mathbb{N}_+,\ 0\leqslant\tau\leqslant s)$ также являются диагональными матрицами с диагональными элементами $\hat{x}_k(t,\varsigma)=\exp\{-\int_\varsigma^t\sum_{j\in I_k}a^{1j}_{kk}(\varsigma)\,d\varsigma\}$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varsigma\leqslant t)$, $k=\overline{1,l}$, и $\tilde{x}_k(s,\tau)=(1-\lambda_k h)^{s-\tau}$ $(s,\tau\in\mathbb{N}_+,\ 0\leqslant\tau\leqslant s)$, $k=\overline{l+1,n}$, соответственно. Тогда систему (3) можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_k(t)=\hat{x}_k(t,0)b_k+\sum_{j\in I_k}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{1j}_{kk}(\varsigma)\int\limits_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}d\bar{x}_k(\zeta)-\sum_{j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_k}a^{1j}_{kk}(t)\bar{x}_k(h_{1j}(t))-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\bigg(\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{l}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar{x}_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{1j}_{kr}(\varsigma)\bar{x}_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\bigg)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar{x}_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{ij}_{kr}(\varsigma)\bar{x}_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\bigg)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m_1}\bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{1j}_{kr}(\varsigma)\chi_{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{1j}(\varsigma))\,d\varsigma+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{1j}_{kr}(\varsigma)\chi_{1j}(\varsigma)\bar{\varphi}_r([h_{1j}(\varsigma)])\,d\varsigma\bigg)+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bigg(\sum_{r=1}^{l}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{ij}_{kr}(\varsigma)\chi_{ij}(\varsigma)\bar{\varphi}_r(h_{ij}(\varsigma))\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)+\sum_{r=l+1}^{n}\int\limits_0^t\hat{x}_k(t,\varsigma)a^{ij}_{kr}(\varsigma)\chi_{ij}(\varsigma)\bar{\varphi}_r([h_{ij}(\varsigma)])\,d\mathcal{B}_i(\varsigma)\bigg),$$

если $t\geqslant 0$, $k=\overline{1,l}$, и

$$\bar{x}_k([t])=\tilde{x}_k([t],0)b_k-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{r=1}^{n}a^1_{kr}(\tau,j)\bar{x}_r(j)h+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\sum_{r=1}^{n}a^i_{kr}(\tau,j)\bar{x}_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma)-$$

$$-\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=-d_1}^{-1}\sum_{r=1}^{n}\chi_1(\tau)a^1_{kr}(\tau,j)\varphi_r(j)h+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\sum_{j=-d_i}^{-1}\sum_{r=1}^{n}\chi_i(\tau)a^i_{kr}(\tau,j)\varphi_r(j)\int\limits_{\tau h}^{(\tau+1)h}d\mathcal{B}_i(\varsigma),$$

если $t \geqslant 0$, $k = \overline{l+1,n}$. Здесь $\chi_{ij}(\varsigma)$ – характеристическая функция отрезка $[0, \tau_{ij}]$ при $\varsigma \geqslant 0$ для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$, а $\chi_i(\tau)$ – характеристическая функция множества $0 \leqslant \tau \leqslant d_i$ при $\tau \in \mathbb{N}_+$ для $i = \overline{1,m}$, $\nu_i(\tau) = 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant d_i$, $\nu_i(\tau) = \tau - d_i$ при $\tau > d_i$ для $i = \overline{1,m}$.

Пусть $\bar{h}_{ij}$ – измеримая по Борелю функция, заданная на $\mathbb{R}$ и такая, что $\bar{h}_{ij}(t) = h_{ij}(t)$ при $t \geqslant 0$ и $\bar{h}_{ij}(t) = 0$ при $t < 0$ для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$. Из предыдущей системы, условий теоремы и неравенств (6)–(8), а также учитывая, что

$$d\bar{x}_k(\zeta) = -\sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}^{1\nu}(\zeta)(\bar{x}_r(h_{1\nu}(\zeta)) + \chi_{1j}(\zeta)\bar{\varphi}_r(h_{1\nu}(\zeta)))d\zeta +$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}^{i\nu}(\zeta)(\bar{x}_r(h_{i\nu}(\zeta)) + \chi_{i\nu}(\zeta)\bar{\varphi}_r(h_{i\nu}(\zeta)))\,d\mathcal{B}_i(\zeta),$$

$$(E|b_k|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \|b\|_{k_{2p}^n} \quad (k = \overline{1,n}),$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\varsigma<0}(E|\varphi_r(\varsigma)|^{2p})^{1/(2p)} \leqslant \|\varphi\|_{L_{2p}^n} \quad (r = \overline{1,n}),$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_0^t \hat{x}_k(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1}\,d\varsigma \leqslant \frac{1}{\lambda_k - \lambda},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(\int_0^t (\hat{x}_k(t,\varsigma)\gamma(t)\gamma(\varsigma)^{-1})^2\,d\varsigma\biggr)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}} \quad (k = \overline{1,l}),$$

$$\chi_{ij}(\varsigma)\gamma(\varsigma) \leqslant \gamma(\tau_{ij}) \quad (\varsigma \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m_i}),$$

$$\chi_i(\tau)\gamma(\tau+1) \leqslant \gamma(d_i+1) \quad (\tau \in \mathbb{N}_+, \quad i = \overline{1,m}),$$

$$\lambda < \max\{\lambda_i,\ i = \overline{1,l};\ -\ln(1-\lambda_i h),\ i = \overline{l+1,n}\},$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\biggl(\gamma(t)\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\gamma(\tau+1)^{-1}\biggr) =$$

$$= \sup_{t\geqslant 0}(1 + \exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\} + \ldots + \exp\{[t](\ln(1-\lambda_k h)+\lambda)\}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty}\exp\{\tau(\ln(1-\lambda_k h)+\lambda)\} = \frac{1}{1-\exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\}}, \quad k = \overline{l+1,n},$$

$$\gamma(t)\gamma(\bar{h}_{ij}(t))^{-1} \leqslant \gamma(\tau_{ij}) \quad (t \geqslant 0), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m_i},$$

$$\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\gamma(\tau+1)\gamma(j)^{-1}\hat{a}_{kr}^{i}(\tau,j) \leqslant \gamma(d_i+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\hat{a}_{kr}^{i}(\tau,j),$$

где $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{l+1,n}$, $r = \overline{1,n}$, и, наконец,

$$\sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int_{h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} d\bar{x}_k(\zeta)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} = \sup_{\varsigma\geqslant 0}\biggl(E\biggl|\gamma(\varsigma)\int_{\bar{h}_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\biggl(-\sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}^{1\nu}(\zeta)(\bar{x}_r(h_{1\nu}(\zeta)) +$$

$$+\chi_{1\nu}(\zeta)\bar{\varphi}_r(h_{1\nu}(\zeta)))d\zeta + \sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n} a_{kr}^{i\nu}(\zeta)(\bar{x}_r(h_{i\nu}(\zeta)) + \chi_{i\nu}(\zeta)\bar{\varphi}_r(h_{i\nu}(\zeta)))\,d\mathcal{B}_i(\zeta)\biggr)\biggr|^{2p}\biggr)^{1/(2p)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(E\left|\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{kr}^{1\nu}(\zeta)(\bar x_r(h_{1\nu}(\zeta))+\chi_{1\nu}(\zeta)\bar\varphi_r(h_{1\nu}(\zeta)))d\zeta\right|^{2p}\right)^{1/(2p)}+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(E\left|\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma} a_{kr}^{i\nu}(\zeta)(\bar x_r(h_{i\nu}(\zeta))+\chi_{i\nu}(\zeta)\bar\varphi_r(h_{i\nu}(\zeta)))\,d\mathcal{B}_i(\zeta)\right|^{2p}\right)^{1/(2p)}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{1\nu}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-1}\gamma(\zeta)\gamma(\bar h_{1\nu}(\zeta))^{-1}d\zeta\right)\bar x_r^{\gamma}(2p)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{1\nu}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(\gamma(\varsigma)\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-1}\gamma(\zeta)\chi_{1\nu}(\zeta)d\zeta\right)\|\varphi\|_{L_{2p}^n}+$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{i\nu}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(\gamma(\varsigma)^2\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-2}\gamma(\zeta)^2\gamma(\bar h_{i\nu}(\zeta))^{-2}d\zeta\right)^{1/2}\bar x_r^{\gamma}(2p)+$$

$$+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{i\nu}\sup_{\varsigma\geqslant 0}\left(\gamma(\varsigma)^2\int\limits_{\bar h_{1j}(\varsigma)}^{\varsigma}\gamma(\zeta)^{-2}\gamma(\zeta)^2\chi_{i\nu}(\zeta)^{-2}d\zeta\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L_{2p}^n}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{m_1}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{1\nu}\gamma(\tau_{1j})\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{i\nu}\bar x_r^{\gamma}(2p)\gamma(\tau_{1j})\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\right)(\bar x_r^{\gamma}(2p)+\|\varphi\|_{L_{2p}^n})=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\gamma(\tau_{1j})\left(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar a_{kr}^{1\nu}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar a_{kr}^{i\nu}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\right)(\bar x_r^{\gamma}(2p)+\|\varphi\|_{L_{2p}^n}),$$

где $k=\overline{1,l},\ \ j\in I_k,$ получаем

$$\bar x_k^{\gamma}(2p)\leqslant\|b\|_{k_{2p}^n}+\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j\in I_k}\bar a_{kk}^{1j}\sum_{r=1}^{n}\gamma(\tau_{1j})\left(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar a_{kr}^{1\nu}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar a_{kr}^{i\nu}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\right)\bar x_r^{\gamma}(2p)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j\in\{1,\dots,m_1\}/I_k}\bar a_{kk}^{1j}\gamma(\tau_{1j})\bar x_k^{\gamma}(2p)+\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{r=1,r\neq k}^{n}\bar a_{kr}^{1j}\gamma(\tau_{1j})\bar x_r^{\gamma}(2p)+$$

$$+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{r=1}^{n}\bar a_{kr}^{ij}\gamma(\tau_{ij})\bar x_r^{\gamma}(2p)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j\in I_k}\bar a_{kk}^{1j}\sum_{r=1}^{n}\gamma(\tau_{1j})\left(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar a_{kr}^{1\nu}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar a_{kr}^{i\nu}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\right)\|\varphi\|_{L_{2p}^n}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=1}^{m_1}\bar a_{kr}^{1j}\gamma(\tau_{1j})+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar a_{kr}^{ij}\gamma(\tau_{ij})\right)\|\varphi\|_{L_{2p}^n},\quad k=\overline{1,l},$$

$$\bar x_k^{\gamma}(2p)\leqslant\|b\|_{k_{2p}^n}+\sup_{t\geqslant 0}\left(\gamma(t)\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde x_k([t],\tau+1)\gamma(\tau+1)^{-1}\right)\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{r=1}^{n}\Bigg(h\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\gamma(\tau+1)\gamma(j)^{-1}\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\gamma(\tau+1)\gamma(j)^{-1}\bar{a}^i_{kr}(\tau,j)\Bigg)\Bigg)\bar{x}^{\gamma}_r(2p)+$$

$$+\sup_{t\geqslant 0}\Bigg(\gamma(t)\sum_{\tau=0}^{[t]-1}\tilde{x}_k([t],\tau+1)\gamma(\tau+1)^{-1}\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{r=1}^{n}\Bigg(h\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\gamma(d_1+1)\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\gamma(d_i+1)\bar{a}^i_{kr}(\tau,j)\Bigg)\Bigg)\|\varphi\|_{L^n_{2p}}\leqslant$$

$$\leqslant\|b\|_{k^n_{2p}}+\frac{1}{1-\exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\}}\Bigg(\sum_{r=1}^{n}\Bigg(h\gamma(d_1+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)+$$

$$+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\gamma(d_i+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}^i_{kr}(\tau,j)\Bigg)\Bigg)\bar{x}^{\gamma}_r(2p)+$$

$$+\frac{1}{1-\exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\}}\Bigg(\sum_{r=1}^{n}\Bigg(h\gamma(d_1+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)+$$

$$+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\gamma(d_i+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}^i_{kr}(\tau,j)\Bigg)\Bigg)\|\varphi\|_{L^n_{2p}},\quad k=\overline{l+1,n}.$$

В матричной форме последняя система неравенств принимает вид

$$\bar{E}\bar{x}^{\gamma}(2p)\leqslant C(\lambda)\bar{x}^{\gamma}(2p)+\|b\|_{k^n_{2p}}e+\hat{c}(\lambda)\|\varphi\|_{L^n_{2p}},$$

где $C(\lambda)=(c_{ij}(\lambda))^n_{i,j=1}$ – $n\times n$-матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{kk}(\lambda)=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\Bigg(\sum_{j\in I_k}\bar{a}^{1j}_{kk}\gamma(\tau_{1j})\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar{a}^{1\nu}_{kk}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar{a}^{i\nu}_{kr}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\Bigg)+$$

$$+\sum_{j=1,j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_k}^{m_1}\bar{a}^{1j}_{kk}\gamma(\tau_{1j})\Bigg)+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}^{ij}_{kk}\gamma(\tau_{ij}),\quad k=\overline{1,l},$$

$$c_{kr}(\lambda)=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\Bigg(\sum_{j\in I_k}\bar{a}^{1j}_{kk}\gamma(\tau_{1j})\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar{a}^{1\nu}_{kk}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar{a}^{i\nu}_{kr}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\Bigg)+\sum_{j=1}^{m_1}\bar{a}^{1j}_{kk}\gamma(\tau_{1j})\Bigg)+$$

$$+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}^{ij}_{kk}\gamma(\tau_{ij}),\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kr}(\lambda)=\frac{1}{1-\exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\}}\Bigg(h\gamma(d_1+1)\quad\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)+$$

$$+c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\gamma(d_i+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}^i_{kr}(\tau,j)\Bigg),\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n},$$

а компоненты зависящего от параметра λ вектора $\hat{c}(\lambda)=\operatorname{col}\{v_1(\lambda),\ldots,v_n(\lambda)\}$ задаются равенствами

$$v_k(\lambda)=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j\in I_k}\bar{a}^{1j}_{kk}\sum_{r=1}^{n}\gamma(\tau_{1j})\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar{a}^{1\nu}_{kr}\gamma(\tau_{1\nu})\tau_{1j}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar{a}^{i\nu}_{kr}\gamma(\tau_{i\nu})\sqrt{\tau_{1j}}\Bigg)+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=1}^{m_1}\bar{a}_{kr}^{1j}\gamma(\tau_{1j})+\frac{c_p}{\sqrt{2(\lambda_k-\lambda)}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar{a}_{kr}^{ij}\gamma(\tau_{ij})\right),\quad k=\overline{1,l},$$

$$v_k(\lambda)=\frac{1}{1-\exp\{\ln(1-\lambda_k h)+\lambda\}}\left(\sum_{r=1}^{n}\left(h\gamma(d_1+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_1(\tau)}^{\tau}\bar{a}_{kr}^{1}(\tau,j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,c_p\sqrt{h}\sum_{i=2}^{m}\gamma(d_i+1)\sup_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}_{kr}^{i}(\tau,j)\right)\right),\quad k=\overline{l+1,n}.$$

В силу условий теоремы матрица $\bar{E}-C$ является положительно обратимой, причём $C(0)=$ $=C$. Следовательно, при достаточно малых λ матрица $\bar{E}-C(\lambda)$ также будет положительно обратимой, а значит, в силу теоремы 2, система (1) M_{2p}^{γ}-устойчива с показателем λ, удовлетворяющим оценкам $0<\lambda<\min\{\lambda_i,\ i=\overline{1,l};\ -\ln(1-\lambda_i h),\ i=\overline{l+1,n}\}$. Теорема доказана.

4. Признаки экспоненциальной моментной устойчивости. В этом пункте предполагается, что $\gamma(t)=\exp\{\lambda t\}$ $(t\geqslant 0)$, где λ – некоторое положительное число.

Для формулировки предложения 1 предположим, что для системы (1) выполняются следующие условия:

$d_1)$ элементы матриц $A_{ij}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-п.в.;

$d_2)$ элементы матриц $A_i(s,j)$ $(s\in\mathbb{N}_+, j=\overline{-\infty,s})$, $i=\overline{2,m}$, равны нулю P-п.в.;

$d_3)$ существуют неотрицательные числа τ_{1j}, $j=\overline{1,m_1}$, такие, что $0\leqslant t-h_{1j}(t)\leqslant\tau_{1j}$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в. при $j=\overline{1,m_1}$;

$d_4)$ существуют неотрицательные числа $\bar{a}_{kr}^{1j}$, $j=\overline{1,m_1}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, такие, что $|a_{kr}^{1j}(t)|\leqslant\bar{a}_{kr}^{1j}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $j=\overline{1,m_1}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$;

$d_5)$ существуют положительные числа λ_k, $k=\overline{1,n}$, для которых:

диагональные элементы матрицы $A_1(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ имеют вид $a_{kk}^{1}(s,s)+\lambda_k$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, $k=\overline{l+1,n}$;

справедливо неравенство $\sum_{j\in I_k}a_{kk}^{1j}(t)\geqslant\lambda_k$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$ для некоторых подмножеств $I_k\subset\{1,\ldots,m_1\}$, $k=\overline{1,l}$;

выполняются оценки $0<\lambda_k h<1$ при $k=\overline{l+1,n}$;

$d_6)$ существует $d_1\in\mathbb{N}_+$, для которого:

элементы матрицы $A_1(s,j)$ равны нулю P-п.в. при $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s-d_1-1}$;

имеет место неравенство $|a_{kr}^{1}(s,j)|\leqslant\bar{a}_{kr}^{1}$ P-п.в. при $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{s-d_1,s}$, для некоторых неотрицательных чисел $\bar{a}_{kr}^{1}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$.

Элементы $n\times n$-матрицы C определим следующим образом:

$$c_{kk}=\frac{1}{\lambda_k}\left(\sum_{j\in I_k}\bar{a}_{kk}^{1j}\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar{a}_{kk}^{1\nu}\tau_{1j}+\sum_{\substack{j=1\\ j\in\{1,\ldots,m_1\}/I_k}}^{m_1}\bar{a}_{kk}^{1j}\right),\quad k=\overline{1,l},$$

$$c_{kr}=\frac{1}{\lambda_k}\left(\sum_{j\in I_k}\bar{a}_{kk}^{1j}\sum_{\nu=1}^{m_1}\bar{a}_{kr}^{1\nu}\tau_{1j}+\sum_{j=1}^{m_1}\bar{a}_{kr}^{1j}\right),\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kr}=\frac{(d_1+1)\bar{a}_{kr}^{1}}{\lambda_k},\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n}.$$

Тогда справедливо следующее следствие из теоремы 5.

Предложение 1. *Если выполнены условия $d_1)$–$d_6)$ и матрица $\bar{E}-C$ является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально $2p$-устойчива по начальным данным (т.е. в смысле определения 2), причём для показателя λ справедлива оценка (9).*

Замечание. Если при выполнении условий предложения 1 элементы матриц $A_{1j}(t)$ $(t\geqslant 0,\ \ j=\overline{1,m_1})$ являются измеримыми локально суммируемыми функциями, а элементы матрицы $A_1(s,j)$ $(s\in\mathbb{N}_+,\ j=\overline{s-d_1,s})$ – действительные числа, то система (1) является детерминированной гибридной системой линейных дифференциальных и разностных уравнений с ограниченными запаздываниями в смысле статьи [5], и эта система будет экспоненциально устойчива по начальным данным.

Для формулировки предложения 2 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

$e_1)$ элементы матриц $A_{1j}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $j=\overline{2,m_1}$, и $A_{ij}(t)$ $(t\geqslant 0)$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, равны нулю $P\times\mu$-п.в., а элементы матриц $A_i(s,j)$ $(s\in\mathbb{N}_+,\ j=\overline{-\infty,s})$, $i=\overline{2,m}$, равны нулю P-п.в.;

$e_2)$ существует неотрицательное число τ_{11} такое, что $0\leqslant t-h_{11}(t)\leqslant\tau_{11}$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в.;

$e_3)$ существуют неотрицательные числа $\bar{a}^{11}_{kr}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, такие, что $|a^{11}_{kr}(t)|\leqslant\bar{a}^{11}_{kr}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$;

$e_4)$ существуют положительные числа λ_k, $k=\overline{1,n}$, для которых:

диагональные элементы матрицы $A_1(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ имеют вид $a^1_{kk}(s,s)+\lambda_k$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, $k=\overline{l+1,n}$;

$e_5)$ справедливо неравенство $a^{11}_{kk}(t)\geqslant\lambda_k$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$;

$e_6)$ выполняются оценки $0<\lambda_k h<1$ при $k=\overline{l+1,n}$;

$e_7)$ существует $d_1\in\mathbb{N}_+$, для которого:

элементы матрицы $A_1(s,j)$ равны нулю P-п.в. при $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s-d_1-1}$;

для некоторых неотрицательных чисел $\bar{a}^1_{kr}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, имеют место оценки $|a^1_{kr}(s,j)|\leqslant\bar{a}^1_{kr}$ P-п.в. при $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{s-d_1,s}$.

Элементы $n\times n$-матрицы C определим следующим образом:

$$c_{kk}=\frac{(\bar{a}^{11}_{kk})^2\tau_{11}}{\lambda_k},\quad k=\overline{1,l},\quad c_{kr}=\frac{\bar{a}^{11}_{kk}\bar{a}^{11}_{kr}\tau_{11}+\bar{a}^{11}_{kR}}{\lambda_k},\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kr}=\frac{(d_1+1)\bar{a}^1_{kr}}{\lambda_k},\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n}.$$

Тогда в силу предложения 1 справедливо

Предложение 2. *Если выполняются условия $e_1)$–$e_7)$ и матрица $\bar{E}-C$ является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально $2p$-устойчива по начальным данным, причём для показателя λ справедлива оценка (9).*

Для формулировки предложений 3 и 4 предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

$f_1)$ $m_1=1$;

$f_2)$ существуют неотрицательные числа τ_{11} и τ_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, такие, что $0\leqslant t-h_{11}(t)\leqslant\tau_{11}$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в., $0\leqslant t-h_{ij}(t)\leqslant\tau_{ij}$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в. при $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$;

$f_3)$ существуют неотрицательные числа $\bar{a}^{11}_{kr}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, $\bar{a}^{ij}_{kr}$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, для которых $|a^{11}_{kr}(t)|\leqslant\bar{a}^{11}_{kr}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, $|a^{ij}_{kr}(t)|\leqslant\bar{a}^{ij}_{kr}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$;

$f_4)$ существуют положительные числа λ_k, $k=\overline{1,n}$, для которых:

диагональные элементы матрицы $A_1(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ имеют вид $a^1_{kk}(s,s)+\lambda_k$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, $k=\overline{l+1,n}$;

справедливо неравенство $\sum_{j\in I_k}a^{1j}_{kk}(t)\geqslant\lambda_k$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$;

выполняются оценки $0<\lambda_k h<1$ при $k=\overline{l+1,n}$;

$f_5)$ существуют числа $d_i\in\mathbb{N}_+$, $i=\overline{1,m}$, для которых:

элементы матрицы $A_i(s,j)$ равны нулю P-п.в. при $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s-d_i-1}$, $i=\overline{1,m}$;

для некоторых неотрицательных чисел $\bar{a}^i_{kr}$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, выполняются оценки $|a^i_{kr}(s,j)|\leqslant\bar{a}^i_{kr}$ P-п.в. при $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{s-d_i,s}$;

имеет место соотношение $\sup\limits_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar{a}^1_{kr}(\tau,j)<\infty$, где $\nu_i(\tau)=0$ при $0\leqslant\tau\leqslant d_i$, $\nu_i(\tau)=\tau-d_i$ при $\tau>d_i$ для $i=\overline{1,m}$.

Определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kk}=\frac{\bar a^{11}_{kk}}{\lambda_k}\left(\bar a^{11}_{kk}\tau_{11}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar a^{i\nu}_{kr}\sqrt{\tau_{11}}\right)+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar a^{ij}_{kk},\quad k=\overline{1,l},$$

$$c_{kr}=\frac{1}{\lambda_k}\left(\bar a^{11}_{kr}\left(\bar a^{11}_{kr}\tau_{11}+c_p\sum_{i=2}^{m}\sum_{\nu=1}^{m_i}\bar a^{i\nu}_{kr}\sqrt{\tau_{11}}\right)+\bar a^{11}_{kr}\right)+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar a^{ij}_{kr},\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kr}=\frac{(d_1+1)\bar a^{1}_{kr}}{\lambda_k}+\frac{c_p}{\lambda_k\sqrt{h}}\sum_{i=2}^{m}(d_i+1)\bar a^{i}_{kr},\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n}.$$

Тогда имеют место

Предложение 3. *Если выполнены условия f_1)–f_5) и матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально $2p$-устойчива по начальным данным, причём для показателя λ справедлива оценка (9).*

Предложение 4. *Пусть в системе (1) $n=2$, $l=1$ и для этих значений выполнены все условия предложения 3. Пусть, далее, для c_{ij}, $i,j=1,2$, справедливы неравенства $1-c_{11}>0$ и $(1-c_{11})(1-c_{22})>c_{12}c_{21}$. Тогда система (1) является экспоненциально $2p$-устойчивой по начальным данным, причём для показателя λ имеет место оценка (9), где $n=2$, $l=1$.*

Справедливость предложения 4 следует из предложения 3 и из того, что при данных предположениях 2×2-матрица $\bar E-C$ будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

Для формулировки двух последних предложений предположим, что для системы (1) выполнены следующие условия:

g_1) $m_1=1$;

g_2) справедливо равенство $h_{11}(t)=t$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в.;

g_3) существуют неотрицательные числа τ_{ij}, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, такие, что $0\leqslant t-h_{ij}(t)\leqslant\tau_{ij}$ $(t\geqslant 0)$ μ-п.в. при $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$;

g_4) существуют неотрицательные числа $\bar a^{11}_{kr}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, $\bar a^{ij}_{kr}$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, такие, что $|a^{11}_{kr}(t)|\leqslant\bar a^{11}_{kr}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$, $|a^{ij}_{kr}(t)|\leqslant\bar a^{ij}_{kr}$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, $k=\overline{1,l}$, $r=\overline{1,n}$;

g_5) существуют положительные числа λ_k, $k=\overline{1,n}$, для которых:

диагональные элементы матрицы $A_1(s,s)$ $(s\in\mathbb{N}_+)$ имеют вид $a^1_{kk}(s,s)+\lambda_k$ $(s\in\mathbb{N}_+)$, $k=\overline{l+1,n}$;

справедливо неравенство $a^{11}_{kk}(t)\geqslant\lambda_k$ $(t\geqslant 0)$ $P\times\mu$-п.в. при $k=\overline{1,l}$;

выполняются оценки $0<\lambda_k h<1$ при $k=\overline{l+1,n}$;

g_6) существуют числа $d_i\in\mathbb{N}_+$, $i=\overline{1,m}$, для которых:

элементы матрицы $A_i(s,j)$ равны нулю P-п.в. при $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{-\infty,s-d_i-1}$, $i=\overline{1,m}$;

для некоторых чисел $\bar a^i_{kr}$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, выполняются оценки $|a^i_{kr}(s,j)|\leqslant\bar a^i_{kr}$ P-п.в. при $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{l+1,n}$, $r=\overline{1,n}$, $s\in\mathbb{N}_+$, $j=\overline{s-d_i,s}$;

имеет место соотношение $\sup\limits_{\tau\in\mathbb{N}_+}\sum_{j=\nu_i(\tau)}^{\tau}\bar a^1_{kr}(\tau,j)<\infty$, где $\nu_i(\tau)=0$ при $0\leqslant\tau\leqslant d_i$ и $\nu_i(\tau)=\tau-d_i$ при $\tau>d_i$ для $i=\overline{1,m}$.

Определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kk}=\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar a^{ij}_{kk},\quad k=\overline{1,l},$$

$$c_{kr}=\frac{\bar a^{11}_{kr}}{\lambda_k}+\frac{c_p}{\sqrt{2\lambda_k}}\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\bar a^{ij}_{kr},\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kr}=\frac{(d_1+1)\bar a^1_{kr}}{\lambda_k}+\frac{c_p}{\lambda_k\sqrt{h}}\sum_{i=2}^m(d_i+1)\bar a^i_{kr},\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n}.$$

Тогда в силу предложения 3 справедливы следующие

Предложение 5. *Если выполнены условия g_1)–g_6) и матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (1) экспоненциально $2p$-устойчива по начальным данным, причём для показателя λ справедлива оценка (9).*

Предложение 6. *Пусть в системе (1) $n=2$, $l=1$ и для этих значений выполнены все условия предложения 5. Пусть, далее, для c_{ij}, $i,j=1,2$, справедливы неравенства $1-c_{11}>0$ и $(1-c_{11})(1-c_{22})>c_{12}c_{21}$. Тогда система (1) является экспоненциально $2p$-устойчивой по начальным данным, причём для показателя λ имеет место оценка (9), где $n=2$, $l=1$.*

Справедливость предложения 6 следует из предложения 5 и из того, что в этих предположениях 2×2-матрица $\bar E-C$ будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

5. Примеры. Рассмотрим непрерывно-дискретную систему стохастических уравнений с постоянными коэффициентами и ограниченными запаздываниями

$$d\hat x(t)=-\sum_{j=1}^{m_1}A_{1j}x(t-h_{1j})\,dt+\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}A_{ij}x(t-h_{ij})\,d\mathcal{B}_i(t)\quad (t\geqslant 0),$$

$$\tilde x(s+1)=\tilde x(s)-A_1\sum_{j=s-d_1}^{s}x(j)h+\sum_{i=2}^m A_i\sum_{j=s-d_i}^{s}x(j)(\mathcal{B}_i((s+1)h)-\mathcal{B}_i(sh))\quad (s\in\mathbb{N}_+),\qquad (10)$$

где $A_{ij}=(a^{ij}_{kr})^{l,n}_{k,r=1}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, – $l\times n$-матрицы и $A_i=(a^i_{kr})^n_{k=l+1,\ r=1}$, $i=\overline{1,m}$, – $(n-l)\times n$-матрицы, элементами которых являются действительные числа, h_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m_i}$, – неотрицательные действительные числа, h – достаточно малое положительное действительное число. Положим также $\sum_{j=1}^{m_1}a^{1j}_{kk}=a_k$, $k=\overline{1,l}$, и определим элементы $n\times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kk}=\frac{1}{a_k}\sum_{j=1}^{m_1}|a^{1j}_{kk}|\biggl(\sum_{\nu=1}^{m_1}|a^{1\nu}_{kk}|h_{1j}+c_p\sum_{i=2}^m\sum_{\nu=1}^{m_i}|a^{i\nu}_{kr}|\sqrt{h_{1j}}\biggr)+\frac{c_p}{\sqrt{2a_k}}\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}|a^{ij}_{kk}|,\quad k=\overline{1,l},$$

$$c_{kr}=\frac{1}{a_k}\biggl(\sum_{j=1}^{m_1}|a^{1j}_{kr}|\biggl(\sum_{\nu=1}^{m_1}|a^{1\nu}_{kr}|h_{1j}+c_p\sum_{i=2}^m\sum_{\nu=1}^{m_i}|a^{i\nu}_{kr}|\sqrt{h_{1j}}\biggr)+\sum_{j=1}^{m_1}|a^{1j}_{kr}|\biggr)+$$
$$+\frac{c_p}{\sqrt{2a_k}}\sum_{i=2}^m\sum_{j=1}^{m_i}|a^{ij}_{kr}|,\quad k=\overline{1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r,$$

$$c_{kk}=\frac{c_p(d_i+1)}{a^1_{kk}\sqrt{h}}\sum_{i=2}^m|a^i_{kk}|,\quad k=\overline{1+1,l},$$

$$c_{kr}=\frac{(d_1+1)|a^1_{kr}|}{a^1_{kk}}+\frac{c_p(d_i+1)}{a^1_{kk}\sqrt{h}}\sum_{i=2}^m|a^i_{kr}|,\quad k=\overline{1+1,l},\quad r=\overline{1,n},\quad k\neq r.$$

Тогда имеет место

Предложение 7. *Если $a_k>0$, $k=\overline{1,l}$, $a^1_{kk}>0$, $k=\overline{l+1,n}$, а матрица $\bar E-C$ является положительно обратимой, то система (10) экспоненциально $2p$-устойчива по начальным данным.*

Справедливость утверждения следует из теоремы 5, в которой в данном случае $I_k=\{1,\ldots,m_1\}$ для всех $k=\overline{1,l}$.

Следствие 1. *Пусть в системе (10)* $n = 2$, $l = 1$ *и для этих значений выполнены все условия предложения 7. Пусть, далее, для* c_{ij}, $i, j = 1, 2$, *выполнены неравенства:* $1 - c_{11} > 0$ *и* $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$. *Тогда система (10) экспоненциально 2p-устойчива по начальным данным.*

Справедливость следствия вытекает из предложения 7 и из того, что при предположениях следствия 2×2-матрица $\bar{E} - C$ будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

Определим теперь элементы $n \times n$-матрицы C следующим образом:

$$c_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{11}} \sum_{j=2}^{m_1} |a_{kk}^{1j}| + \frac{c_p}{\sqrt{2a_k}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kk}^{ij}|, \quad k = \overline{1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{1}{a_{kk}^{11}} + \sum_{j=1}^{m_1} |a_{kr}^{1j}| + \frac{c_p}{\sqrt{2a_k}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{kr}^{ij}|, \quad k = \overline{1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r,$$

$$c_{kk} = \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^{1}\sqrt{h}} \sum_{i=2}^{m} |a_{kk}^{i}|, \quad k = \overline{1 + 1, l},$$

$$c_{kr} = \frac{(d_1 + 1)|a_{kr}^{1}|}{a_{kk}^{1}} + \frac{c_p(d_i + 1)}{a_{kk}^{1}\sqrt{h}} \sum_{i=2}^{m} |a_{kr}^{i}|, \quad k = \overline{1 + 1, l}, \quad r = \overline{1, n}, \quad k \neq r.$$

Тогда справедливо

Предложение 8. *Если* $h_{11} = 0$, $a_{kk}^{11} > 0$, $k = \overline{1, l}$, $a_{kk}^{1} > 0$, $k = \overline{l + 1, n}$, *а матрица* $\bar{E} - C$ *является положительно обратимой, то система (10) экспоненциально 2p-устойчива по начальным данным.*

Справедливость утверждения следует из теоремы 5, в которой в данном случае $I_k = \{1\}$ для всех $k = \overline{1, l}$.

Следствие 2. *Пусть в системе (10)* $n = 2$, $l = 1$ *и для этих значений выполнены все условия предложения 8. Пусть, далее, для* c_{ij}, $i, j = 1, 2$, *выполнены неравенства:* $1 - c_{11} > 0$ *и* $(1 - c_{11})(1 - c_{22}) > c_{12}c_{21}$. *Тогда система (10) экспоненциально 2p-устойчива по начальным данным.*

Справедливость следствия вытекает из предложения 8 и из того, что при предположениях следствия 2×2-матрица $\bar{E} - C$ будет положительно обратимой, поскольку её диагональные миноры положительны.

Заключение. В статье изложен метод регуляризации для анализа вопросов моментной устойчивости систем стохастических уравнений, содержащих компоненты как с непрерывным, так и с дискретным временем. В качестве вспомогательной, т.е. регуляризирующей, системы используется сравнительно простая система линейных дифференциальных и разностных уравнений, для которой легко проверяются необходимые для применения метода свойства устойчивости. Отметим, однако, что для получения более тонких признаков устойчивости необходимо выбирать более сложные регуляризирующие системы линейных дифференциальных и разностных уравнений с последействием, так как в этом случае также имеют место аналоги леммы 1 и теорем 1 и 2 настоящей статьи. Эти исследования планируется провести в будущем.

Авторы выражают благодарность рецензенту работы, предложения которого способствовали существенному улучшению её изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.М.* Вполне регулярные системы с последействием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 7. С. 97–104.
2. *Singh A., Nisbet R.M.* Semi-discrete host-parasitoid models // J. of Theor. Biology. 2007. V. 247. P. 733-742.
3. *Mailleret L., Lemsle V.* A note on semi-discrete modeling in the life sciences // Phil. Trans. R. Soc. A. 2009. V. 367. P. 4779–4799.

4. *Марченко В.М., Поддубная О.Н.* Представление решений гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 741–755.
5. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728–740.
6. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестн. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2013. Т. 13. № 4. С. 34–37.
7. *Chudov A., Maksimov V.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Funct. Differ. Equat. 2012. V. 19. № 1–2. C. 49–62.
8. *Li X., Mao X.* Stabilization of highly nonlinear hybrid stochastic differential delay equations by delay feedback control // Automatica. 2020. V. 12. № 108657.
9. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
10. *Mao X.R.* Stochastic Differential Equations and Applications. Oxford; Cambridge; Philadelphia; New Delhi, 1997.
11. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of Differential Equations With Aftereffect. London, 2002.
12. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatulina L.F.* Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications. Hindawi; New York, 2007.
13. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Anal. and Appl. 2012. V. 389. № 2. P. 1239–1250.
14. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений линейных разностных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 293–301.
15. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений систем линейных разностных уравнений Ито с последействием относительно начальных данных // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 842–850.
16. *Kadiev R., Ponosov A.* Exponential stability of Ito-type linear functional difference equations // Comput. and Math. with Appl. 2013. V. 66. № 11. P. 2295–2306.
17. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 53. № 5. С. 579–590.
18. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и экспоненциальная устойчивость импульсных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 8. С. 18–35.
19. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Махачкала, 2000.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
21. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М., 1986.

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет, г. Махачкала,
Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
После доработки 07.02.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.