ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 456–469

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925+517.93

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОРОЖДЁННОГО СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2022 г. А. М. Камачкин, Д. К. Потапов, В. В. Евстафьева

Рассматривается n-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом в правой части. Решение системы при определённых условиях задаёт отображение ограниченных множеств, принадлежащих поверхностям разрыва, в себя. Получены условия существования неподвижных точек отображения, единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений. Одному типу отображения отвечает один вид периодических орбит: или с двумя точками переключения (так называемые унимодальные орбиты), или с чётным числом точек переключения, большим двух. В случае унимодальных орбит приведены примеры существования орбит различных конфигураций.

DOI: 10.31857/S0374064122040021, EDN: BZFMBK

Введение. Постановка задачи. В теории нелинейных колебаний основными являются задача о существовании периодических режимов в нелинейных системах и задача построения орбит решений таких систем, т.е. установление их свойств, параметров и конфигураций в фазовом пространстве. Данная работа посвящена решению этих задач для многомерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих гистерезисные нелинейности.

Рассмотрим математические модели, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) + Kf(t) \tag{1}$$

(модель неавтономной системы) и

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma) \tag{2}$$

(модель автономной системы). Здесь $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы ($\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное евклидово пространство), A – постоянная ненулевая $n \times n$-матрица с вещественными элементами, B и K – ненулевые векторы из $\mathbb{R}^n$, $F(\sigma)$ – функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 $(l_1 < l_2)$ и значениями выхода m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$, $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – заданный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [1] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant l_2$ – равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$.

Таким образом, функция $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если либо $\sigma(t) < l_2$ при $t \in [t_1, t_2]$ (и тогда $F(\sigma(t_1)) = m_1$), либо $\sigma(t) > l_1$ при $t \in [t_1, t_2]$ (и тогда $F(\sigma(t_1)) = m_2$). В приложениях функцию $F(\sigma)$ называют *нелинейной характеристикой* системы [2, с. 43, 52]. Петля гистерезиса, описываемая в координатах (σ, F) уравнениями $\sigma = \sigma(t)$, $F = F(\sigma(t))$, обегается против хода часовой стрелки (см., например, рисунок в [3]). Функция $f(t)$ описывает внешнее воздействие на систему и может быть как периодической (т.е. $f(t) = f(t+T)$ для всех $t \geqslant 0$ и некоторого $T > 0$), так и непериодической, но в любом случае полагаем, что она непрерывная и ограниченная, т.е. $f \in C([0,\infty))$ и существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(t)| \leqslant M$ для любого $t \geqslant 0$.

Из последних работ по исследованию нелинейных систем, замкнутых обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом, отметим работы [4–15].

Уравнение $(\Gamma, X) = l_i$ $(i = 1, 2)$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость, которую называют *поверхностью разрыва* [16] или *поверхностью переключения*, так как на ней происходит склеивание кусков фазовых траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_i + Kf(t), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

или

$$\dot{X} = AX + Bm_i, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Таким образом, в силу решения систем (1) или (2) происходит отображение поверхностей переключения в себя или, по крайней мере, некоторого подмножества поверхности переключения в неё же. Обозначим поверхность переключения $(\Gamma, X) = l_i$ через L_i $(i = 1, 2)$.

Допустим нам удалось (аналитически или численно) найти хотя бы одну неподвижную точку такого отображения, т.е. построить соответствующую ей замкнутую траекторию в фазовом пространстве. Тогда возникают вопросы: является ли эта точка единственной или нет, сколько неподвижных точек может иметь система (1) или (2), другими словами, сколько периодических режимов существует у таких систем и при каких условиях на их параметры. Кроме того, важно выяснить конфигурации этих периодических режимов. Будем считать, что две орбиты имеют различные конфигурации, если одна орбита расположена в множестве

$$\{X \in \mathbb{R}^n : l_1 \leqslant (\Gamma, X) \leqslant l_2\},$$

т.е. не выходит из зоны неоднозначности релейного гистерезиса в фазовом пространстве, а другая орбита имеет части, принадлежащие множествам

$$\{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) \leqslant l_1\} \quad \text{и/или} \quad \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) \geqslant l_2\}.$$

Если рассматривать $u = F(\sigma)$ в качестве функции управления, то системы (1) или (2) описывают систему автоматического управления [17, с. 8–10], которая часто используется в приложениях и для которой сформулированные выше вопросы имеют первостепенное значение.

В силу сложной динамики, описываемой моделями (1) и (2), к настоящему времени окончательные ответы на поставленные вопросы не известны и исчерпывающие как аналитические, так и численные методы исследования таких систем не разработаны.

Вопросы точности и достоверности математического моделирования всегда актуальны. Практика требует применения таких моделей и методов решения, которые могут гарантировать надёжность результатов. Абсолютную надёжность обеспечивают аналитические методы. Применение только численных методов к системам вида (1) и (2) выявило присущие таким методам недостатки, к которым, в первую очередь, относится невозможность надёжной оценки расчётных результатов.

В данной статье для аналитического исследования нелинейных динамических систем вида (1) и (2) применяются топологические методы и результаты, связанные с понятием алгебраического числа неподвижных точек отображения [18–23].

1. Общая характеристика решений. В фазовом пространстве траектория любого решения систем (1) или (2) составлена из кусков траекторий систем (3) или (4) соответственно, склеивание которых происходит по непрерывности в точках, лежащих на поверхностях переключения. Периодическому решению систем (1) или (2) соответствует замкнутая ограниченная фазовая траектория. Очевидно, что точка переключения $X^* \in L_i$ периодического решения удовлетворяет равенствам

$$X^* = X(t_0) = X(t_0 + T_r), \quad (\Gamma, X^*) = l_i,$$

где t_0 – начальный момент времени, T_r – период времени, за который изображающая точка решения возвращается в начальную точку X^*.

Пусть система (1) или (2) не имеет положений равновесия. Тогда “рабочими” режимами системы будем считать её стационарные колебания, которым соответствуют в фазовом пространстве периодические траектории, составленные из конечного числа кусков траекторий в силу разных систем вида (3) или (4) соответственно. Число кусков траекторий совпадает с числом точек переключения за период T_r.

Рассмотрим условия на параметры системы, при которых стационарные колебания существуют, и дадим геометрическую интерпретацию этим условиям. Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда на поверхностях переключения можно выделить два выпуклых компактных множества, которые в силу решения системы (1) или (2) отображаются в себя (подробнее см. [15]). Это нетрудно показать с помощью некоторой положительно определённой квадратичной функции $V(X)$, поскольку нулевое решение системы $\dot{X} = AX$ является асимптотически устойчивым. Пусть выполняется неравенство

$$\|X\| > \|A\|^{-1}\left(\max_{i=1,2}|m_i|\cdot\|B\| + M\|K\|\right) \tag{5}$$

(константа M из неравенства $|f(t)| \leqslant M$). Тогда

$$(V(X))'_t < 0. \tag{6}$$

Уравнение вида

$$V(X) = C,$$

где C – постоянная, определяет в фазовом пространстве замкнутую поверхность. Очевидно, что существует минимальное значение C (обозначим $\min C$), для которого выполняются неравенства (5) и (6). Для того чтобы поверхность $V(X) = \min C$ пересекала поверхности переключения, необходимо, чтобы для системы (4) выполнялось равенство $\dot{X} = 0$ в точках $X_1 = -A^{-1}Bm_1$ и $X_2 = -A^{-1}Bm_2$, лежащих в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции $F(\sigma)$. Пересечение множества, заданного неравенством $V(X) \leqslant \min C$, с каждой поверхностью переключения даёт два выпуклых компактных множества S_1 и S_2 ($S_i \subset L_i$, $i = 1, 2$), которые описываются следующей системой:

$$(\Gamma, X) = l_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\|X\| \leqslant \|A\|^{-1}\left(\max_{i=1,2}|m_i|\cdot\|B\| + M\|K\|\right). \tag{7}$$

Множество S_i является пересечением ограниченного замкнутого множества из $\mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью L_i ($i = 1, 2$). Следовательно, множество S_i лежит в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. В таком пространстве ограниченные замкнутые множества компактны. Установлено [15], что изображающая точка любого решения системы (1) или (2) за конечное время попадает и остаётся в ограниченной области фазового пространства. Более того, при $(\Gamma, B) \neq 0$ получены достаточные условия, при выполнении которых в случае существования периодического решения с $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) изолированными точками переключения эти точки локально непрерывно зависят от параметров A, B, K, Γ, l_1, l_2, m_1, m_2 и параметров функции $f(t)$. Условие изолированности точек переключения периодического решения является необходимым условием этих результатов и существенно зависит от свойств функции $f(t)$. Общие результаты, относящиеся к свойству изолированности точек переключения, в случае неавтономной системы (1) пока не получены, но таковые имеются для автономной системы (2) (см. [24, 25]).

Орбита *изолирована* на множестве S_i ($i = 1, 2$) в том смысле, что в любой окрестности её точек переключения не существует точек переключения других орбит. Условие изолированности орбит на множестве S_i ($i = 1, 2$) тесно связано со свойством *трансверсальности*, согласно которому траектории систем вида (4) не касаются поверхностей переключения. Условия касания можно представить равенством

$$(\Gamma, AX + Bm_i) = 0 \quad \text{или} \quad (\Gamma, AX) = -m_i(\Gamma, B), \quad i = 1, 2.$$

Если $(\Gamma, B) \neq 0$, то в точках на поверхностях переключения нет одновременного касания в силу систем (4). Таким образом, получаем систему уравнений, которая определяет на L_i множество точек, удовлетворяющих равенству $(\Gamma, AX) = -m_i(\Gamma, B)$, а именно:

$$(\Gamma, X) = l_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(\Gamma, AX) = -m_i(\Gamma, B), \quad (\Gamma, B) \neq 0. \tag{8}$$

Следовательно, точки переключения орбиты не должны принадлежать множеству, описываемому системой (8). Последнее утверждение и есть условие трансверсальности для системы (2). Далее везде будем считать, что точки переключения не удовлетворяют системе (8).

В самом общем виде непрерывный оператор P, отображающий в силу решений системы (1) множество S_i $(i = 1, 2)$ в себя, можно представить следующим образом:

$$P(X_0, T(X_0)) = e^{A(T(X_0)-t_0)}\left(X_0 + \int\limits_{t_0}^{T(X_0)} e^{-A(\tau-t_0)}(BF(\sigma) + Kf(\tau))\,d\tau\right), \tag{9}$$

где $X_0 = X(t_0)$ – начальная точка отображения, $X_0 \in S_i$; $T(X_0)$ – время возврата изображающей точки по траектории, задаваемой системой (1), в множество S_i. Отметим, что точка X_0 может как принадлежать периодическому решению, так и не принадлежать ему.

В дальнейшем будем рассматривать только систему (2). Допустим, что существует хотя бы одно периодическое решение системы (2) с $2k$ $(k \in \mathbb{N})$ точками переключения. Пусть изображающая точка этого решения начинает своё движение в точке $X^1 \in L_1$ в момент $t_0 = 0$ и достигает L_2 в точке X^2 в момент t_1 в силу системы (2) при $m_i = m_1$. Затем она переходит на L_1 в точку X^3 в момент t_2 в силу системы (2) при $m_i = m_2$. Далее она достигает L_2 в точке X^4 в момент t_3 в силу (2) при $m_i = m_1$ и так далее. В момент времени t_{2k} изображающая точка возвращается на L_1 в начальную точку $X^1 = X^{2k+1}$ в силу (2) при $m_i = m_2$. Следовательно, $t_{2k} = T_r$, где T_r – период стационарных колебаний.

В этом случае условие, что для системы (4) выполняется равенство $\dot{X} = 0$ в точке $X_i = -A^{-1}Bm_i$ $(i = 1, 2)$, лежащей в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции $F(\sigma)$, принимает вид неравенств

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \tag{10}$$

Описанный процесс может быть формализован в виде системы равенств относительно точек и моментов переключения:

$$X^2 = e^{At_1}X^1 + \int\limits_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bm_1\,d\tau, \quad (\Gamma, X^1) = l_1,$$

$$X^3 = e^{A(t_2-t_1)}X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)}Bm_2\,d\tau, \quad (\Gamma, X^2) = l_2,$$

$$X^4 = e^{A(t_3-t_2)}X^3 + \int\limits_{t_2}^{t_3} e^{A(t_3-\tau)}Bm_1\,d\tau, \quad (\Gamma, X^3) = l_1,$$

$$\cdots$$

$$X^{2k+1} = X^1 = e^{A(t_{2k}-t_{2k-1})}X^{2k} + \int\limits_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k}-\tau)}Bm_2\,d\tau, \quad (\Gamma, X^{2k}) = l_2. \tag{11}$$

Аналогично можно описать процесс отображения множества S_i $(i = 1, 2)$ в себя в силу систем (4) для любого $k \in \mathbb{N}$, не полагая, что точка X^j, $j = \overline{1, 2k+1}$, принадлежит периодическому решению. Тогда в системе (11) моменты переключения t_1, t_2, $\ldots$, t_{2k} можно рассматривать как функции начальных точек X^1, X^2, $\ldots$, X^{2k} соответственно. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем отображение с оператором вида (9). Если отображение S_i в себя имеет два перехода в силу систем (4), то обозначим оператор P через P_2, если четыре перехода, то через P_4 и т.д. В результате приходим к семейству операторов $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждый из которых соответствует отображению множества S_i в себя.

Для того чтобы воспользоваться топологическими результатами, покажем, что семейство $\mathcal{P}$ – это семейство определённых на некотором пространстве непрерывных вещественных функций, которое решает задачу топологического вложения пространства в куб [19, с. 157]. Кубы играют роль стандартных пространств, и мы хотим описать топологическое пространство, гомеоморфное подпространствам кубов. Далее понадобится лемма о вложении [19, с. 158], приведём её формулировку в обозначениях данной статьи.

Лемма. *Пусть $\mathcal{P}$ – семейство, произвольный элемент которого P_{2k} есть непрерывное отображение топологического пространства Y в некоторое топологическое пространство $Y_{P_{2k}}$. Тогда*

1) отображение вычисления e является непрерывным отображением пространства Y в пространство произведения $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$;

2) если семейство $\mathcal{P}$ различает точки и замкнутые множества, то отображение e является открытым отображением пространства Y на пространство $e[Y]$;

3) отображение e взаимно однозначно в том и только в том случае, когда семейство $\mathcal{P}$ различает точки.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть система (2) удовлетворяет предположениям, сделанным относительно её правой части, собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (10). Тогда семейство операторов $\mathcal{P}$ удовлетворяет лемме.*

Доказательство. Семейство $\mathcal{P}$ – это семейство отображений, определённых на одном и том же ограниченном замкнутом множестве S_i, $i = 1, 2$, из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ со значениями в этом же множестве. Пространство значений отображения $P_{2k} \in \mathcal{P}$ обозначим через $Y_{P_{2k}}$. Тогда множество S_i отображается в произведение $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$, т.е. точка $X \in S_i$ переходит при этом отображении в элемент произведения, P_{2k}-я координата которого и есть значение функции P_{2k} (это так называемое отображение вычисления e). Если $k = 1$, то P_2 – отображение множества S_i в себя с двумя переходами. При $k \geqslant 2$ получаем последовательность отображений $\{P_{2k}\}_{k=2}^{\infty}$, являющихся последовательными суперпозициями непрерывных отображений вида $P_2(X)$. Следовательно, функция $e(X)$ является непрерывным отображением S_i в пространство произведения $\Pi\{Y_{P_{2k}} : P_{2k} \in \mathcal{P}\}$. Утверждение 1) леммы справедливо.

Семейство $\mathcal{P}$ отображений множества S_i различает точки, т.е. для каждой пары различных точек X' и X'' найдётся элемент $P_{2k} \in \mathcal{P}$ такой, что $P_{2k}(X') \neq P_{2k}(X'')$. Это очевидно, например, при $k = 1$. Каждое отображение из семейства $\mathcal{P}$ обладает тем свойством, что для любого замкнутого подмножества $S \subset S_i$ и каждой точки $X \in S_i \setminus S$ значение $P_{2k}(X)$ не принадлежит замыканию множества $P_{2k}(S)$. Действительно, отображение P_{2k} переводит каждое замкнутое подмножество $S \subset S_i$ в замкнутое ограниченное множество $P_{2k}(S)$. Между множествами S и $P_{2k}(S)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Пусть $X \in S_i \setminus S$. Если $P_{2k}(X) \in P_{2k}(S)$, то точка X должна принадлежать множеству S, что противоречит включению $X \in S_i \setminus S$. Следовательно, семейство $\mathcal{P}$ различает точки и замкнутые множества. Утверждение 2) леммы выполнено. Из утверждения 2) леммы следует, что отображение $e(X)$ взаимно однозначное (см. утверждение 3) леммы). Теорема доказана.

Замечание 1. Лемма о вложении утверждает, что отображение вычисления $e(X)$ является гомеоморфизмом.

2. Неподвижные точки отображения. Как и в работе [23], исходная задача свелась к задаче существования неподвижных точек соответствующего отображения. Далее перейдём к нахождению условий существования неподвижных точек отображения $e(X)$. Снача-

ла рассмотрим примеры исследования фазового пространства систем вида (2) для отображения $P_2(X)$. Исследования в следующих далее примерах проведены численно.

Система уравнений (11) при $k = 1$ принимает вид

$$X^2 = e^{At_1}X^1 + \int\limits_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bm_1\,d\tau, \quad X^3 = X^1 = e^{A(t_2-t_1)}X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)}Bm_2\,d\tau,$$

$$(\Gamma, X^i) = l_i, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1, \quad l_2 = 1, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 1.$$

Петля гистерезиса симметричная.

Проверим выполнение условий теоремы 1. Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_{2,3} = -1 \pm 10i$ (i – мнимая единица) с отрицательными вещественными частями, $(\Gamma, B) = -16/3 \neq 0$. Точка $X_j = -A^{-1}Bm_j$ $(j = 1, 2)$ лежит в фазовом пространстве вне зоны неоднозначности функции $F(\sigma)$, так как выполняются неравенства (10). Действительно, $-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) = -272/101 < -1 = l_1$ и $-(\Gamma, A^{-1}Bm_1) = 272/101 > 1 = l_2$. Значит, изображающая точка решения за конечное время попадёт в ограниченную область фазового пространства и останется в ней.

Чтобы найти моменты и точки переключения орбит с двумя переходами, решаем систему (12). Получаем моменты $t_1 \approx 0.7027$, $t_2 = 2t_1$ и точки переключения первой орбиты (далее – орбиты I) $X_{\mathrm{I}}^1 = -X_{\mathrm{I}}^2 \approx (0.1438, 0.0059, 0.6752)^{\mathrm{т}}$, а также моменты $t_1 \approx 0.2452$, $t_2 = 2t_1$ и точки переключения второй орбиты (далее – орбиты II) $X_{\mathrm{II}}^1 = -X_{\mathrm{II}}^2 \approx (0.6469, 0.3651, 0.2440)^{\mathrm{т}}$. Здесь и ниже символом ^{т} обозначается операция транспонирования.

Обе унимодальные орбиты симметричные, орбита I асимптотически устойчивая, орбита II неустойчивая. Действительно, если взять начальную точку из окрестности орбиты II, то при $t \to \infty$ решение, соответствующее орбите II, стремится к решению, соответствующему орбите I. Обе орбиты являются изолированными (выполняется условие трансверсальности) и не выходят за пределы зоны неоднозначности. На множестве S_i $(i = 1, 2)$ в некоторых окрестностях точек X_{I}^i, X_{II}^i меняется направление поля касательных.

Отметим, что пример 1 рассматривался в [25], но в данной работе исследование проведено полнее, с большей степенью детализации.

В следующих примерах условия теоремы 1 также выполняются, упоминание о них далее опускаем.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.13 \\ 2.9 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -3.5, \quad l_2 = 3.5, \quad m_1 = -1.4024, \quad m_2 = 1.4024.$$

Петля гистерезиса симметричная. Для орбиты I находим точки переключения

$$X_{\mathrm{I}}^1 = -X_{\mathrm{I}}^2 \approx (1.798912, -1.951576, -1.294381)^{\mathrm{т}},$$

а для орбиты II ими будут точки

$$X_{\mathrm{II}}^1 = -X_{\mathrm{II}}^2 \approx (-1.992098, -4.359154, -1.402307)^{\mathrm{т}}.$$

Точки переключения каждой из двух периодических орбит являются симметричными в фазовом пространстве. В окрестностях этих точек на поверхностях переключения поле касательных не перпендикулярно вектору Γ, т.е. условие трансверсальности выполняется. Орбиты асимптотически устойчивые, не выходят из зоны неоднозначности и на каждом множестве S_i $(i = 1, 2)$ в некоторых окрестностях точек X^i_{I}, X^i_{II} меняется направление поля касательных.

Пример 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1.15 \\ -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1, \quad l_2 = 2, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 1.$$

Петля гистерезиса несимметричная. Орбита – с двумя несимметричными точками переключения

$$X^1 \approx (-0.1724, 1.3361, 0.4502, 0.4722)^{\mathrm{т}} \quad \text{и} \quad X^2 \approx (1.8114, 0.1384, -0.9452, -0.7440)^{\mathrm{т}}.$$

Орбита не выходит из зоны неоднозначности и является асимптотически устойчивой. На множестве S_i $(i = 1, 2)$ в некоторой окрестности точки X^i меняется направление поля касательных.

Пример 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1.5, \quad l_2 = 1.5, \quad m_1 = -10, \quad m_2 = 10.$$

Петля гистерезиса симметричная. Орбита содержит симметричные точки переключения

$$X^1 = -X^2 \approx (10.2201, -1.5000, 0.4810)^{\mathrm{т}}.$$

Орбита симметричная, асимптотически устойчивая и с симметричным выходом из зоны неоднозначности. При этом на множестве S_i $(i = 1, 2)$ в некоторой окрестности точки X^i не меняется направление поля касательных. Именно, оба вектора $AX^1 + Bm_2$ и $AX^1 + Bm_1$ направлены в противоположную сторону по сравнению с вектором Γ относительно S_1, а векторы $AX^2 + Bm_2$ и $AX^2 + Bm_1$, наоборот, направлены в одну сторону с вектором Γ относительно S_2.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -1, \quad l_2 = 1, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 2.$$

Петля гистерезиса симметричная. Орбита – с двумя точками переключения

$$X^1 = -X^2 \approx (0.0673, 0.0589, 0.4937)^{\mathrm{т}}.$$

Орбита симметричная, без выхода из зоны неоднозначности и асимптотически устойчивая, т.е. эта орбита имеет такие же свойства, что и орбиты в примере 2.

Аналогичные исследования проводились авторами и других работ. Например, в работе [24] рассматривались системы с симметричной петлёй гистерезиса: в одном примере указаны две

изолированные симметричные орбиты с разными периодами, а в другом – две орбиты с равными периодами и перестановочными точками переключения.

Естественно возникают вопросы: во-первых, если по крайней мере одно периодическое решение найдено, то как искать другое решение; во-вторых, если другое периодическое решение существует, будет ли отличаться его конфигурация от конфигурации первого решения. Далее дадим ответы на поставленные вопросы. Справедлива

Теорема 2. *Пусть для системы (2) выполнены условия теоремы 1. Тогда отображение $P_2(X)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку X_{fp}. Если, кроме того, $n \geqslant 3$ и для отображения $P_2(X)$ отлично от нуля число $\Lambda(P_2)$, определяемое равенством*

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2}\operatorname{sign} J_{P_2}(X_{fp}),$$

где $J_{P_2}(X_{fp})$ – якобиан отображения $P_2(X)$, вычисленный в точке X_{fp}, то существует по крайней мере ещё одна неподвижная точка X, отличная от X_{fp}. В противном случае, когда $\Lambda(P_2) = 0$, точка X_{fp} единственная.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 получаем два выпуклых компактных множества S_1 и S_2 [15]. Каждое множество S_i лежит на гиперплоскости L_i, которая, напомним, определяется уравнением $(\Gamma, X) = l_i$, $i = 1, 2$. Эти множества описываются системой (7). Каждое множество S_i в силу фазовых траекторий непрерывно отображается в себя. Следовательно, выполнены условия теоремы Шаудера [26] о существовании хотя бы одной неподвижной точки. Таким образом, отображение $P_2(X)$ имеет на множестве S_i неподвижную точку, если множество S_i имеет пустое пересечение со всеми множествами, которые определяются системой уравнений (8).

Если это не так, то рассмотрим непрерывное поле касательных к фазовым траекториям в точках множества S_i. Множеству S_i принадлежат точки, которые удовлетворяют одному из условий:

$$(\Gamma, AX + Bm_i) < 0, \quad (\Gamma, AX + Bm_i) = 0, \quad (\Gamma, AX + Bm_i) > 0.$$

Однако $(\Gamma, B) \neq 0$, поэтому равенства $(\Gamma, AX + Bm_1) = 0$ и $(\Gamma, AX + Bm_2) = 0$ не могут иметь место одновременно в какой-либо точке на одном множестве $S_i \subset L_i$. Предположим для определённости, что если фазовая траектория системы (4) с $i = 1$ пересекает последовательно поверхности L_1 и L_2, то выполняется неравенство $(\Gamma, AX + Bm_1) > 0$. Тогда для траектории системы (4) с $i = 2$, которая пересекает последовательно поверхности L_2 и L_1, имеет место неравенство $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$. Рассмотрим, например, множество S_2. Ему обязательно принадлежат точки X, в которых $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$, а также могут принадлежать точки, в которых $(\Gamma, AX + Bm_2) \geqslant 0$. Пересечение множества точек X, для которых $(\Gamma, AX + Bm_2) < 0$, с поверхностью L_2 и множеством S_2 также является выпуклым множеством. Обозначим его S_2^-. Аналогично, при условиях $(\Gamma, AX + Bm_2) > 0$ и $(\Gamma, AX + Bm_2) = 0$ определим соответственно выпуклые множества S_2^+ и S_2^0. Очевидно, что для множества S_1 можно построить множества S_1^-, S_1^+ и S_1^0 с аналогичными свойствами.

Решение $X(t)$ системы (2) отображает замкнутое выпуклое множество $\hat{S}_2 = S_2^- \bigcup S_2^0$ в себя и является функцией, непрерывной по $X_0 \in \hat{S}_2$, где $X_0 = X(t_0)$. Точно так же функция $X(t)$ ведёт себя и на множестве $\hat{S}_1 = S_1^+ \bigcup S_1^0$, которое является выпуклым замкнутым множеством. Это решение $X(t)$ является конкретной реализацией оператора (9) в случае, когда фазовая траектория состоит только из двух кусков траекторий систем (4). Ранее такое отображение мы обозначили через $P_2(X)$. Отсюда по теореме Шаудера следует существование по крайней мере одной неподвижной точки отображения $P_2(X)$ и, следовательно, периодического решения системы (2) с двумя точками переключения, расположенными на гиперплоскостях L_1 и L_2. Первое утверждение доказано.

Итак, мы установили, что в любом случае отображение $P_2(X)$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку X_{fp}. Выясним, когда на указанных выше множествах могут существовать другие неподвижные точки отображения $P_2(X)$.

Например, множества S_2 и $\hat{S}_2$ обладают одинаковыми свойствами, а именно, являются ограниченными замкнутыми выпуклыми множествами из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Эти множества можно рассматривать как полные метрические пространства размерности $n-1$ (см. [27,

с. 64]). Воспользуемся известным из топологии [20, с. 252] фактом: пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ с выколотой точкой гомотопически эквивалентно сфере S^{n-2}. Здесь размерности соответствуют поставленной задаче. Рассмотрим случай $n \geqslant 3$. Пусть известна неподвижная точка $X_{fp} \in \in S_2$ (или $\hat{S}_2$). Тогда множество с выколотой точкой $S_2 \setminus \{X_{fp}\}$ является гомотопически эквивалентным сфере S^{n-2}. Теперь продолжим рассмотрение отображения на сфере S^{n-2}. Согласно теореме Лефшеца о неподвижной точке (см., например, [18, с. 419] или [21, с. 257]), если отображение $f : X \to X$, где X – некоторое пространство, имеет ненулевое число Лефшеца $\Lambda(f)$, то f имеет неподвижную точку. Другими словами, неравенство $\Lambda(f) \neq 0$ является достаточным условием существования неподвижной точки. По теореме Лефшеца для всякого отображения $f : S^n \to S^n$ имеет место равенство

$$\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f, \tag{13}$$

где $\deg f$ – топологическая степень непрерывного отображения f. Как известно, целое число $\deg f$ однозначно определено. Следовательно, применительно к поставленной задаче из формулы (13) следует, что

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \deg P_2(X)$$

и, если $\Lambda(P_2) \neq 0$, то существует ещё одна неподвижная точка отображения $P_2(X)$ на множестве $S_2 \setminus \{X_{fp}\}$ (или $\hat{S}_2 \setminus \{X_{fp}\}$).

Известно [22, с. 94–95], что степень отображения определяется знаком якобиана отображения. В нашем случае якобиан $J_{P_2}(X)$ отображения $P_2(X)$ отличен от нуля в каждой точке S_i. Множество S_i (как и $\hat{S}_i$) не только замкнуто, но и связно. Следовательно, степень отображения $P_2(X)$ будет одинаковой на всём множестве. Тогда достаточно вычислить $J_{P_2}(X_{fp})$. Окончательно получаем, что число Лефшеца вычисляется по формуле

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \operatorname{sign} J_{P_2}(X_{fp}) \tag{14}$$

и, если оно не равно нулю, то существует по крайней мере ещё одна неподвижная точка X отображения P_2 и $X \neq X_{fp}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Процесс поиска неподвижных точек способом, изложенным в доказательстве теоремы 2, может быть продолжен.

Замечание 3. Из формулы (14) вытекает, что если $\deg P_2(X) = \operatorname{sign} J_{P_2}(X_{fp}) = 1$ и $n = = 3$, то $\Lambda(P_2) = 0$ и не существует других неподвижных точек, отличных от X_{fp}. Однако если $\deg P_2(X) = 1$ и $n = 4$, то $\Lambda(P_2) = 2 \neq 0$, а это означает, что существует неподвижная точка X, отличная от X_{fp}.

Замечание 4. Ниже в формулировке следствия 1 под *автоколебанием* понимается орбитально асимптотически устойчивая замкнутая фазовая траектория, состоящая из двух кусков в силу разных систем (4).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и равенство* $A^{\mathrm{T}}\Gamma = \alpha\Gamma$, *где постоянная* $\alpha \neq 0$, $\Gamma = \sum_k \Gamma_k$ $(k \leqslant n)$, Γ_k *– собственный вектор матрицы* A^{T}, *который отвечает вещественному собственному значению* α *матрицы* A. *Тогда отображение* $P_2(X)$ *имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует автоколебание с областью притяжения, совпадающей со всем фазовым пространством.*

Доказательство. Умножим уравнение (2) слева на вектор Γ. Получим

$$\dot{\sigma} = (\Gamma, AX) + (\Gamma, B)F(\sigma) = (A^{\mathrm{T}}\Gamma, X) + (\Gamma, B)F(\sigma).$$

Если $A^{\mathrm{T}}\Gamma = \alpha\Gamma$, то приходим к уравнению

$$\dot{\sigma} = \alpha\sigma(t) + (\Gamma, B)F(\sigma) \tag{15}$$

относительно функции $\sigma(t)$. Так как $\alpha < 0$ (по предположению теоремы 1 все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части), то уравнение (15) имеет

периодическое решение. Отсюда следует, что периодическое решение системы (2) имеет траекторию, не выходящую из зоны неоднозначности функции $F(\sigma)$. При этом единственность такого решения не гарантирована.

Возьмём две точки X_0^1 и X_0^2 в множестве $\hat{S}_1$ (или $\hat{S}_2$), и пусть X_0^1 принадлежит периодической траектории. Поскольку траектории, определяемые уравнениями (4), имеют ограниченную кривизну, построим гиперплоскость $(\Gamma, X) = l$ для $l \in (l_1, l_2)$ так, что точки пересечения выходящих из X_0^1 и X_0^2 траекторий с $(\Gamma, X) = l$ можно представить следующим образом:

$$\hat{X}^1 = X_0^1 + t_1 A X_0^1 + o(t_1) \quad \text{и} \quad \hat{X}^2 = X_0^2 + t_2 A X_0^2 + o(t_2).$$

Примем t_2 за текущее время t. Тогда величина t_1 зависит от t, т.е.

$$t_1 = (\Gamma, AX_0^2)(\Gamma, AX_0^1)^{-1} t = \omega t.$$

Введём расстояние между точками $\hat{X}^1$ и $\hat{X}^2$ равенством

$$\rho(\hat{X}^1, \hat{X}^2) = (\hat{X}^1(\omega t) - \hat{X}^2(t))^{\mathrm{T}} V (\hat{X}^1(\omega t) - \hat{X}^2(t)),$$

где V – некоторая симметричная положительно определённая матрица.

Рассмотрим на S_1 (или S_2), т.е. при $t = 0$, производную

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = (\Delta X)^{\mathrm{T}}(W + \dot{V})\Delta X + 2(\omega - 1)(X_0^1)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} V \Delta X, \tag{16}$$

где $\Delta X = X_0^1 - X_0^2$, $W = A^{\mathrm{T}} V + VA$. Аналогично $\dot{\rho}$ можно найти на любой гиперплоскости $(\Gamma, X) = l$, где $l \in (l_1, l_2)$. Если в качестве текущего времени взять t_1, то в равенстве (16) следует $\omega - 1$ заменить на $1 - \omega^{-1}$, а X_0^1 на вектор X_0^2. При условии, что $A^{\mathrm{T}}\Gamma = \alpha\Gamma$, получаем

$$\dot{\rho} = (\Delta X)^{\mathrm{T}}(W + \dot{V})\Delta X.$$

Так как все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то существует постоянная положительно определённая матрица V такая, что $\dot{\rho} < 0$. Геометрически это означает, что по любому направлению, ортогональному вектору Γ, решение исходной системы осуществляет сжатие относительно траектории периодического решения. Следствие доказано.

3. Степень и якобиан отображения. В доказательстве теоремы 2 мы использовали понятие степени отображения. Степень отображения зависит от знака якобиана отображения. Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для вычисления степени отображения $P_2(X)$ достаточно определить знак якобиана этого отображения хотя бы в одной точке множества $\hat{S}_1$ (или $\hat{S}_2$).*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 для $X \in \hat{S}_1$ (или $X \in \hat{S}_2$) исследуем якобиан $J_{P_2}(X)$. Рассмотрим отображение $P_2(X)$ в виде (12). Время t_1 перехода с L_1 на L_2 зависит от выбранной начальной точки X^1. В свою очередь, время t_2 возврата на L_1 зависит от точки $X^2 = X(t_1)$. Таким образом, время t_1 является функцией точки X^1.

Первое уравнение системы (11) представим в виде

$$X^2 = X^1 + \int_0^{t_1} (AX(\tau) + Bm_1)\, d\tau, \tag{17}$$

где $t_1 = t_1(X^1)$. Из равенства (17) следует, что

$$l_2 = l_1 + \int_0^{t_1} (\Gamma, AX(\tau) + Bm_1)\, d\tau = l_1 + (\Gamma, B)m_1 t_1 + \int_0^{t_1} (\Gamma, AX(\tau))\, d\tau. \tag{18}$$

Продифференцируем (18) по параметру X. Получим

$$0 = (\Gamma, B)m_1(t_1)'_X + \int\limits_0^{t_1} A^{\mathrm{T}}\Gamma\, d\tau + (t_1)'_X \cdot (\Gamma, AX(t_1)).$$

При этом $X(t_1) = X^2 \in L_2$, т.е.

$$0 = (\Gamma, B)m_1(t_1)'_X + A^{\mathrm{T}}\Gamma t_1 + (t_1)'_X(\Gamma, AX^2).$$

Отсюда выражаем вектор-строку $(t_1)'_X$. Имеем

$$(t_1)'_X = -\frac{(A^{\mathrm{T}}\Gamma)^{\mathrm{T}} t_1}{(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)}. \tag{19}$$

Эта производная существует, если

$$(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2) \neq 0 \quad \text{для любых} \quad X^2 \in L_2.$$

Последнее выражение равно нулю, когда либо $X^2 = -A^{-1}Bm_1$, либо $(\Gamma, AX^2 + Bm_1) = 0$, но эти условия мы ранее исключили.

Теперь второе уравнение системы (11) представим в виде

$$X^1 = X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} (AX(\tau) + Bm_2)\, d\tau.$$

Тогда

$$l_1 = l_2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} ((\Gamma, AX(\tau)) + (\Gamma, B)m_2)\, d\tau = l_2 + (\Gamma, B)m_2(t_2 - t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} (\Gamma, AX(\tau))\, d\tau. \tag{20}$$

Продифференцируем (20) по параметру X. Получим

$$0 = (\Gamma, B)m_2((t_2)'_X - (t_1)'_X) + A^{\mathrm{T}}\Gamma(t_2 - t_1) + (t_2)'_X(\Gamma, AX^1) - (t_1)'_X(\Gamma, AX^2),$$

где $X^1 = X(t_2)$, $X^2 = X(t_1)$. Откуда, учитывая равенство (19), находим

$$(t_2)'_X = -\frac{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^2)}{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)} \frac{(A^{\mathrm{T}}\Gamma)^{\mathrm{T}} t_1}{(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)} - \frac{(A^{\mathrm{T}}\Gamma)^{\mathrm{T}}(t_2 - t_1)}{(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)}. \tag{21}$$

Выражения $(\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1)$ и $(\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2)$ в формуле (21) не могут обращаться в нуль в силу сделанных ранее предположений, в том числе предположения о трансверсальности траекторий. Функции $t_1(X)$ и $t_2(X)$ являются непрерывными как для $X \in \hat{S}_1$, так и для $X \in \hat{S}_2$. Следовательно, функции $(t_1)'_X$ и $(t_2)'_X$ также являются непрерывными на этих множествах. Действительно, мы рассматривали пространственные окрестности точек из множества $\hat{S}_i$ $(i = 1, 2)$, но всё остаётся в силе, если начальный вектор X меняется только на множестве $\hat{S}_i$ $(i = 1, 2)$.

Найдём якобиан отображения $P_2(X)$, заданного системой уравнений (11). Подставим первое уравнение во второе. Получим

$$X^1 = e^{A(t_2 - t_1)}\left(e^{At_1}X^1 + \int\limits_0^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)}Bm_1\, d\tau\right) + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2 - \tau)}Bm_2\, d\tau. \tag{22}$$

Обозначим X^1 через X. После интегрирования выражений в представлении (22) приходим к равенству

$$X = e^{At_2}X + e^{A(t_2-t_1)}(-A^{-1}Bm_1 + A^{-1}e^{At_1}Bm_1) + (-A^{-1}Bm_2 + A^{-1}e^{A(t_2-t_1)}Bm_2),$$

откуда

$$X = -A^{-1}Bm_2 + e^{At_2}(X + A^{-1}Bm_1) + e^{A(t_2-t_1)}A^{-1}B(m_2 - m_1). \tag{23}$$

Обозначим правую часть равенства (23) через $G(X)$ (это вектор-функция) и найдём её якобиан. Полная производная функции $G(X)$ имеет вид

$$G'(X) = (e^{At_2})'_X(X + A^{-1}Bm_1) + e^{At_2} + (e^{A(t_2-t_1)})'_X A^{-1}B(m_2 - m_1). \tag{24}$$

Воспользуемся формулами (19) и (21) для $(t_1)'_X$ и $(t_2)'_X$ соответственно. После подстановки их в (24) будем иметь

$$G'(X) = e^{At_2} - Ae^{At_2}\frac{(\Gamma, B)(m_2 - m_1)t_1 + ((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))t_2}{((\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1))((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))}(A^{\mathrm{T}}\Gamma)^{\mathrm{T}}(X + A^{-1}Bm_1) +$$

$$+ Ae^{A(t_2-t_1)}\frac{((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^1))t_1 - ((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))t_2}{((\Gamma, B)m_2 + (\Gamma, AX^1))((\Gamma, B)m_1 + (\Gamma, AX^2))}(A^{\mathrm{T}}\Gamma)^{\mathrm{T}}A^{-1}B(m_2 - m_1). \tag{25}$$

Следовательно,

$$J_{P_2}(X) = \det G'(X).$$

Виртуальные особые точки системы (2) находятся вне зоны неоднозначности и условие трансверсальности выполняется, поэтому $J_{P_2}(X) \neq 0$ в каждой точке множества $\hat{S}_1$ (аналогично для $\hat{S}_2$).

Как отмечалось выше, степень отображения зависит от знака якобиана $J_{P_2}(X)$. Тогда в силу связности и замкнутости $\hat{S}_1$ (или $\hat{S}_2$) заключаем, что степень отображения одинакова на всём множестве. Значит, чтобы найти степень $\deg P_2(X)$ отображения достаточно определить знак $J_{P_2}(X)$ хотя бы в одной точке множества $\hat{S}_1$ (или $\hat{S}_2$). Это мы и сделали в доказательстве теоремы 2, вычислив $\operatorname{sign} J_{P_2}(X)$ в неподвижной точке X_{fp}. Теорема доказана.

Замечание 5. Чтобы вычислить $\operatorname{sign} J_{P_2}(X_{fp})$, следует в представление (25) вместо X и X^1 подставить X_{fp}, а X^2 заменить согласно первой формуле в (11). Это означает, что нам должны быть известны точки переключения X^1 и X^2 периодической орбиты, а также моменты переключения t_1 и t_2.

Следствие 2. *Достаточным условием отсутствия неподвижных точек отображения $P_2(X)$ является условие $(X, G(X)) = 0$ для любого $X \in \hat{S}_i$ $(i = 1, 2)$.*

Доказательство. Если в некоторой точке $X \in \hat{S}_i$ $(i = 1, 2)$ выполняется равенство $(X, G(X)) = 0$, то $G(X) \neq X$. Отсюда следует отсутствие неподвижной точки X. Докажем это утверждение от противного. Пусть X – неподвижная точка. Тогда $G(X) = X$. Отсюда вытекает, что $(X, G(X)) = (X, X) \neq 0$ при любом $X \neq 0$. Пришли к противоречию. Следствие доказано.

Рассмотрим вопрос о существовании неподвижных точек отображения $P_{2k}(X)$ при $k > 1$. Справедлива

Теорема 4. *Пусть для системы (2) с $n \geqslant 3$ выполнены условия теоремы 1, отображение $P_2(X)$ имеет единственную неподвижную точку X_{fp} и для отображения $P_4(X)$ отлично от нуля выражение*

$$\Lambda(P_4) = 1 + (-1)^{n-2}\operatorname{sign} J_{P_4}(X_{fp}),$$

где $J_{P_4}(X_{fp})$ – якобиан отображения $P_4(X)$, вычисленный в точке X_{fp}. Тогда существует по крайней мере одна неподвижная точка $X \neq X_{fp}$ отображения $P_4(X)$. Более того, если

$\Lambda(P_4) = 0$, *то отображение* $P_4(X)$ *не имеет неподвижных точек, отличных от* X_{fp}, *и следует рассматривать отображение* $P_6(X)$ *и т.д.*

Доказательство. Пусть $X = X_{fp}$ – единственная неподвижная точка отображения $P_2(X)$ и число $\Lambda(P_4)$ не равно нулю. Тогда с точностью до обозначений можно повторить ту часть доказательства теоремы 2, в которой установлено достаточное условие существования второй неподвижной точки отображения $P_2(X)$, если заменить в доказательстве отображение $P_2(X)$ на отображение $P_4(X)$.

Далее рассмотрим отображение $P_{2k}(X)$ для $k = 3$. Ранее мы установили, что существуют единственные неподвижные точки для отображений $P_2(X)$ и $P_4(X)$, поэтому для $P_6(X)$ строим новое множество, которое не содержит эти точки, но является связным замкнутым выпуклым и лежит в $\hat{S}_i$ $(i = 1, 2)$. Для $k > 3$ построения следует продолжить по аналогии. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 4 описан процесс последовательного поиска неподвижных точек отображения $P_{2k}(X)$, где $k > 1$. Ниже приведём численный пример, иллюстрирующий, что отображение $P_{2k}(X)$ при $k > 1$ может иметь несовпадающие неподвижные точки, которые также не совпадают с неподвижными точками отображения $P_2(X)$.

Пример 6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1.000 & 0.999 & -0.045 \\ -0.999 & -0.004 & -0.089 \\ -0.045 & -0.089 & -1.996 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.000 \\ -1.087 \\ -1.953 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9029 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = -2, \quad l_2 = 5, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 4.$$

Петля гистерезиса несимметричная. Система имеет по крайней мере три несимметричные орбиты: орбита I – с 2-мя, орбита II – с 4-мя, а орбита III – с 6-ю точками переключения. При этом точки переключения орбиты II и орбиты III не совпадают между собой и с точками переключения орбиты I. Дальнейший численный поиск затруднён из-за невозможности отделить области притяжения различных периодических решений.

Заключение. Доказана теорема существования периодических решений (и соответственно периодических орбит в фазовом пространстве) n-мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом в правой части. Установлены условия, при выполнении которых периодическое решение является единственным, и условия, при которых существует второе решение с подобной конфигурацией. Наряду с унимодальными орбитами рассмотрены решения с бóльшим чётным числом точек переключения и приведён пример существования таких решений. В доказательствах применялась известная из алгебраической топологии теорема Лефшеца о неподвижной точке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покровский А.В.* Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.
2. *Петров В.В., Гордеев А.А.* Нелинейные сервомеханизмы. М., 1979.
3. *Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equat. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.
4. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Contr. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
5. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
6. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Contr. Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
7. *Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O, Popov M.A., Kabulova E.G.* Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems // Proc. Engin. 2017. V. 201. P. 578–583.

8. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
9. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информ. Проц. управ. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
10. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
11. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
12. *Евстафьева В.В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
13. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
14. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
15. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
16. *Уткин В.И., Орлов Ю.В.* Системы управления с векторным реле // Автоматика и телемеханика. 2019. № 9. С. 143–155.
17. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М., 1974.
18. *Лефшец С.* Алгебраическая топология. М., 1949.
19. *Келли Дж.Л.* Общая топология. М., 1968.
20. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М., 1971.
21. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
22. *Понтрягин Л.С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М., 1976.
23. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Положительные решения суперлинейных эллиптических задач с разрывными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 2. С. 95–112.
24. *Varigonda S., Georgiou T.T.* Dynamics of relay relaxation oscillators // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46. № 1. P. 65–77.
25. *Камачкин А.М.* Периодические орбиты одного класса релейных свободных осцилляторов // Уч. зап. Петрозавод. гос. ун-та. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2014. № 2 (139). С. 113–117.
26. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen // Stud. Math. 1930. V. 2. № 1. P. 171–180.
27. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.
После доработки 26.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.