ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 470–476

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

© 2022 г. А. В. Липницкий

В однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра, содержащих неправильные по Ляпунову системы с квазипериодическими коэффициентами, доказано наличие неустойчивых систем.

DOI: 10.31857/S0374064122040033, EDN: BZILIN

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных линейных дифференциальных систем
$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0 \tag{1_μ}$$
с матрицами $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\operatorname{diag}[1,-1], & 2k-2 \leqslant t < 2k-1, \\ (\mu + b_k)J, & 2k-1 \leqslant t < 2k, \end{cases}$ где $k \in \mathbb{N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и функции $d_k(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работе [1] доказано, что старший показатель Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемый как функция параметра μ, положителен на множестве положительной меры Лебега в случае, когда функции $d_k(\cdot)$ не зависят от μ, положительны и равномерно по $k \in \mathbb{N}$ отделены от нуля, т.е. если выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \geqslant d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. В доказательстве этого результата существенно используются комплексные матрицы специального вида. В [2] приводится другой способ доказательства теоремы из [1], основанный на применении равенства Парсеваля для тригонометрических сумм.

Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, – произвольные числа. Положим
$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}(2k-1)} := a_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Несложно убедиться, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(a_{k+1}-a_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ является равномерным по $t \geqslant 0$ пределом последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [3–5] (см. также [6]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

Предложенные в этих работах методы требуют получения оценок собственных значений и векторов матрицы Коши системы (1_μ). Критерий Барабанова [7] правильности линейной системы, состоящий в точности её сингулярных показателей, инициировал другой подход, состоящий в применении сингулярного представления матрицы Коши (см. формулу (5_n) ниже).

В работе [2] при выполнении условий (2), в которых $d(\mu) > 2^{20}$, и в случае непрерывной функции $d(\cdot)$ доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива. В настоящей работе аналогичный результат получен при любой непрерывной $d(\mu) > 0$.

Положим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) := 0$. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k \geqslant 1$ и ψ_k следующим образом. Обозначим $\xi_k := 2\psi_k + a_k + \mu$. Так как $\eta_k \geqslant 1$ и, следовательно, $\operatorname{sh}(2\ln\eta_k) \geqslant 0$, найдутся единственные $1 \leqslant \eta_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\varphi_k \in \in [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi)$ такие, что выполнены равенства

$$\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k|, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_k = (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k, \quad \text{если} \quad \sin\xi_k \neq 0, \quad \text{и} \quad \varphi_k = 0, \quad \text{если} \quad \sin\xi_k = 0. \tag{4}$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1} = \psi_k + \varphi_k/2 + \pi(1 - \operatorname{sgn}\cos\xi_k)/4$. В дальнейшем вместо ξ_k, φ_k и η_k, поскольку они зависят от μ, будем также писать $\xi_k(\mu)$, $\varphi_k(\mu)$ и $\eta_k(\mu)$ соответственно.

Лемма 1 [2]. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (2) имеет место представление*

$$Y_n := X_{A_\mu}(2^n - 1, 0) = U(\psi_n)\begin{pmatrix}\eta_n & 0\\ 0 & \eta_n^{-1}\end{pmatrix}U(\psi_n). \tag{5_n}$$

Пусть $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, где $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$, обозначает прямоугольник $\{(x, y) : \mathfrak{a} \leqslant x \leqslant \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \leqslant y \leqslant \mathfrak{d}\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Лемма 2 [8]. *Пусть $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ и $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ – непрерывные пути в $E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, удовлетворяющие условиям*

$$h_1(-1) = \mathfrak{a}, \quad h_1(1) = \mathfrak{b}, \quad u_2(-1) = \mathfrak{c}, \quad u_2(1) = \mathfrak{d}.$$

Тогда эти два пути пересекаются, т.е. $h(s) = u(t)$ для некоторых s, t из $[-1, 1]$.

Для любого множества $M \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\operatorname{int} M$ и $\operatorname{cl} M$ соответственно его внутренность и замыкание в $\mathbb{R}$, а через $\mathrm{C}(M)$ – множество всех непрерывных функций из M в $\mathbb{R}$ (топология в M индуцирована из $\mathbb{R}$).

Теорема. *Для любых $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и любой непрерывной функции $d(\cdot)$ при выполнении условий (2) найдётся $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что система (1_μ) неустойчива.*

Доказательство. Обозначим $\alpha_1 := 0$, $\beta_1 := \pi$, $V_1 := [0, \pi]$, $\tilde{V}_1 := V_1$, $\omega_1(\mu) := \mu$, $\mu \in V_1$; $\zeta_1(\nu) := \xi_1 \circ \omega_1^{-1}(\nu) - a_1$, $\nu \in [0, \pi]$.

Зафиксируем какое-либо $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, в случае $k = 1$ выполняются сравнение

$$\zeta_k \circ \omega_k(\mu) \equiv (\xi_k(\mu) - a_k)(\operatorname{mod}\pi), \quad \mu \in V_k, \tag{6_k}$$

равенство

$$\zeta_k(\alpha_k) = -\pi + \zeta_k(\beta_k) \tag{7_k}$$

и включения

$$\zeta_k \in \mathrm{C}(\tilde{V}_k), \tag{8_k}$$

$$\eta_k \circ \omega_k^{-1} \in \mathrm{C}(\tilde{V}_k). \tag{9_k}$$

Предположим, что существуют множество $V_k \subset \mathbb{R}$, числа $\alpha_k < \beta_k \in \mathbb{R}$, биекция $\omega_k(\cdot) : V_k \to \tilde{V}_k := [\alpha_k, \beta_k]$ и функция $\zeta_k(\cdot) : \tilde{V}_k \to \mathbb{R}$ такие, что справедливы включения (8_k), (9_k) и соотношения (6_k), (7_k). Предположим также, что для любого $\mu \in V_k$ справедливо неравенство

$$\operatorname{sh}\ln\eta_k(\mu) \geqslant \varkappa_k := (\sqrt{2})^{k-1}\min_{\mu\in[0,\pi]}\operatorname{sh} e^{d(\mu)}. \tag{10_k}$$

Пусть $n_{k,\mu} \in \mathbb{Z}$ таково, что $\tilde{\xi}_k(\mu) := \xi_k(\mu) + n_{k,\mu}\pi \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Возьмём произвольное $\mu \in V_k,$ для которого выполняется условие

$$|\varphi_k(\mu) + \tilde{\xi}_k(\mu)| < \pi/2. \tag{11}$$

В силу соотношений (4) φ_k и $\tilde{\xi}_k$ одного знака. Поэтому

$$|\varphi_k(\mu)| + |\tilde{\xi}_k(\mu)| = |\varphi_k(\mu) + \tilde{\xi}_k(\mu)| \overset{(11)}{<} \pi/2. \tag{12}$$

Тогда вследствие монотонного возрастания функции $\operatorname{tg}(\cdot)$ на промежутке $[0, \pi/2)$ имеем в случае $\tilde{\xi}_k(\mu) \neq 0$ оценки

$$|\operatorname{tg}\varphi_k(\mu)| = \operatorname{tg}|\varphi_k(\mu)| \overset{(12)}{<} \operatorname{tg}(\pi/2 - |\tilde{\xi}_k(\mu)|) = \operatorname{ctg}|\tilde{\xi}_k(\mu)| = |\operatorname{ctg}\tilde{\xi}_k(\mu)|. \tag{13}$$

Таким образом, для любого $\mu \in V_k,$ удовлетворяющего условию (11) и неравенству $\varphi_k(\mu) \neq 0,$ справедливы неравенства

$$|\operatorname{tg}\xi_k(\mu)| \overset{(13)}{<} |\operatorname{ctg}\varphi_k(\mu)| \overset{(4)}{=} (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k(\mu)))|\operatorname{ctg}\xi_k(\mu)|, \tag{14}$$

откуда следуют соотношения

$$\cos^{-2}\xi_k = 1 + \operatorname{tg}^2\xi_k \overset{(14)}{<} 1 + \operatorname{ch}(2\ln\eta_k) = 2\operatorname{ch}^2\ln\eta_k. \tag{15}$$

Тогда выполняются оценки

$$\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} \overset{(3)}{=} (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k| \overset{(15)}{>} \frac{\operatorname{sh}(2\ln\eta_k)}{\sqrt{2}|\operatorname{ch}\ln\eta_k|} = \sqrt{2}\operatorname{sh}\ln\eta_k, \quad \text{если} \quad \varphi_k(\mu) \neq 0. \tag{16_k}$$

Если же $\tilde{\xi}_k(\mu) = 0,$ то $\cos\xi_k = 1,$ поэтому в силу равенства (3) справедливы соотношения $\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1} \overset{(3)}{=} (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k| = 2\operatorname{sh}\ln\eta_k\operatorname{ch}\ln\eta_k > \sqrt{2}\operatorname{sh}\ln\eta_k.$ Отсюда и из неравенства $(16_k),$ применяя оценку $(10_k),$ получаем для всех $\mu \in V_k,$ удовлетворяющих условию (11), неравенства

$$\operatorname{sh}\ln\eta_{k+1}(\mu) \overset{(16_k)}{>} \sqrt{2}\operatorname{sh}\ln\eta_k(\mu) \overset{(10_k)}{\geqslant} (\sqrt{2})^k\operatorname{sh}\delta = \varkappa_{k+1}. \tag{17}$$

Обозначим $\Omega_1 := \{\nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\nu) \equiv 2^{-1}\pi - a_k (\operatorname{mod}\pi)\}.$ Из непрерывности функции $\zeta_k(\cdot)$ на отрезке $\tilde{V}_k$ в силу равенства (7_k) следует существование $\gamma_0 := \inf\Omega_1$ и $\gamma_1 := \sup\Omega_1.$ В случае, когда $\zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\gamma_1),$ положим $W_k := [\alpha_k, \gamma_0]\bigcup[\gamma_1, \beta_k).$

Определим функцию $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \to \mathbb{R}$ равенствами $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu)$ для всех $\mu = \omega_k^{-1}([\alpha_k, \gamma_0]),$ $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu) + \alpha_k - \beta_k$ в случае, если $\mu \in \omega_k^{-1}([\gamma_1, \beta_k)).$

Обозначим $\tilde{\gamma}_0 := \gamma_1 + \alpha_k - \beta_k,$ $\tilde{\gamma}_1 := \gamma_0,$ $\tilde{W}_k := [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1] = \omega_{k+1} \circ \omega_k^{-1}(W_k).$ Очевидно, что функция $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \to \tilde{W}_k$ биективна, поэтому на отрезке $\tilde{W}_k$ определено обратное к ней отображение $\omega_{k+1}^{-1}(\cdot).$

Определим функцию $\hat{\zeta}_k : \tilde{W}_k \to \mathbb{R}$ равенствами $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k \circ \omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) - \zeta_k(\gamma_0) - a_k + 2^{-1}\pi,$ если $\nu \in [\alpha_k, \gamma_0],$ $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k \circ \omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) - \zeta_k(\gamma_1) - a_k - 2^{-1}\pi,$ если $\nu \in [\gamma_1, \beta_k).$ В силу равенств

$$\hat{\zeta}_k(\alpha_k) = \zeta_k(\alpha_k) - \zeta_k(\gamma_0) - a_k + 2^{-1}\pi \overset{(7_k)}{=} \zeta_k(\beta_k) - \zeta_k(\gamma_1) - a_k - 2^{-1}\pi = \lim_{\tilde{W}_k \ni \nu \to \beta_k} \hat{\zeta}_k(\nu)$$

функция $\hat{\zeta}_k(\cdot)$ непрерывна на отрезке $\tilde{W}_k.$

Если имеет место оценка $\zeta_k(\gamma_0) \geqslant \pi + \zeta_k(\alpha_k)$, то из непрерывности функции $\zeta_k(\cdot)$ на отрезке $\tilde{V}_k$ следует существование $v_0 \in [\alpha_k, \gamma_0)$, для которого выполняется равенство $\zeta_k(v_0) = \zeta_k(\gamma_0) - \pi$. Из него следует сравнение $\zeta_k(v_0) \equiv 2^{-1}\pi - a_k (\operatorname{mod} \pi)$, т.е. $\zeta_k(v_0) \in \Omega_1$, что в совокупности с неравенством $v_0 < \gamma_0$ противоречит определению числа γ_0. Поэтому справедлива оценка $\zeta_k(\gamma_0) < \pi + \zeta_k(\alpha_k)$.

Аналогично доказывается неравенство $\zeta_k(\beta_k) < \pi + \zeta_k(\gamma_1)$. Тогда имеют место соотношения $\zeta_k(\gamma_0) < \pi + \zeta_k(\alpha_k) \overset{(7_k)}{=} \zeta_k(\beta_k) < \pi + \zeta_k(\gamma_1)$. Поэтому в случае, когда $\zeta_k(\gamma_0) \neq \zeta_k(\gamma_1)$, выполняется неравенство $\zeta_k(\gamma_0) \leqslant \zeta_k(\gamma_1) - \pi$. Следовательно, существует $\tilde{\gamma}_1 := \inf\{\gamma_0 < \nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\nu) - \pi\}$.

Положим $\tilde{\gamma}_0 := \sup\{\tilde{\gamma}_1 > \nu \in \tilde{V}_k : \zeta_k(\gamma_0) = \zeta_k(\nu)\}$. В этом случае обозначим $\tilde{W}_k = W_k := [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1]$ и определим функции $\omega_{k+1} : \omega_k^{-1}(W_k) \to \mathbb{R}$, $\hat{\zeta}_k : W_k \to \mathbb{R}$ равенствами $\omega_{k+1}(\mu) := \omega_k(\mu)$, $\hat{\zeta}_k(\nu) := \zeta_k(\nu) - \zeta_k(\tilde{\gamma}_0) - a_k - 2^{-1}\pi$ для всех $\mu \in \omega_k^{-1}(W_k)$, $\nu \in W_k$.

Очевидно, имеют место включения

$$\hat{\zeta}_k \in \mathrm{C}(\tilde{W}_k) \tag{18}$$

и вследствие соотношения (8_k)

$$\hat{\zeta}_k(\operatorname{int} \tilde{W}_k) \in (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k + 2^{-1}\pi). \tag{19}$$

Определим функцию $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot) : \tilde{W}_k \to [1, +\infty)$ равенством $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot) := \operatorname{sh} \ln \eta_{k+1} \circ \omega_{k+1}^{-1}(\cdot)$. В силу верных для любого $\mu \in \omega_{k+1}^{-1}(\tilde{W}_k)$ сравнений

$$\hat{\zeta}_k \circ \omega_{k+1}(\mu) \equiv \zeta_k \circ \omega_k(\mu) \overset{(6_k)}{\equiv} (\xi_k(\mu) - a_k)(\operatorname{mod} \pi) \tag{20}$$

получаем, что

$$\tilde{\eta}_{k+1}(\nu) \overset{(3),(20)}{=} \operatorname{sh}(2 \ln \tilde{\eta}_k(\nu)) |\cos(\hat{\zeta}_k(\nu) + a_k)|, \quad \nu \in \tilde{W}_k. \tag{21}$$

Так как $\cos \hat{\zeta}_k(\nu) \neq 0$, $\nu \in \operatorname{int} \tilde{W}_k$, согласно (19), то справедливо равенство

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) \overset{(4),(20)}{=} \operatorname{arctg}((\operatorname{ch}^{-1}(2 \ln \tilde{\eta}_k(\nu))) \operatorname{tg}(\hat{\zeta}_k + a_k)), \quad \nu \in \operatorname{int} \tilde{W}_k. \tag{22}$$

Из соотношений (9_k), (18) и (21) следует включение

$$\tilde{\eta}_{k+1} \in \mathrm{C}(\tilde{W}_k), \tag{23}$$

а из соотношений (9_k), (18) и (22) – включение

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1} \in \mathrm{C}(\operatorname{int} \tilde{W}_k). \tag{24}$$

В силу включения (19) и непрерывности на отрезке $\tilde{W}_k$ функции $\hat{\zeta}_k(\cdot)$ существуют числа $\gamma_2, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{W}_k$, определяемые соотношениями $\gamma_2 := \inf\{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$, $\tilde{\gamma}_2 := \sup\{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$.

Согласно неравенству (17) выполняются оценки $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_2) > \varkappa_{k+1}$, $\tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_2) > \varkappa_{k+1}$, а согласно формуле (3) – равенства $\tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_0) = \tilde{\eta}_{k+1}(\tilde{\gamma}_1) = 0$. Отсюда вследствие вытекающей из включения (23) непрерывности функции $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$ на отрезках $[\tilde{\gamma}_0, \gamma_2]$ и $[\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1]$ заключаем, что существуют $v_1 \in (\tilde{\gamma}_0, \gamma_2)$, $v_2 \in (\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1)$, для которых $\tilde{\eta}_{k+1}(v_i) = \varkappa_{k+1}$, $i = \overline{1, 2}$.

Обозначим $\Omega_2 := \{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) \in [-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \ \tilde{\eta}_{k+1}(\nu) = \varkappa_{k+1}\}$, $\Omega_3 := \{\nu \in \tilde{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) \in [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi], \ \tilde{\eta}_{k+1}(\nu) = \varkappa_{k+1}\}$.

Из включений (18), (19) и равенств $\hat{\zeta}_k(\tilde{\gamma}_0) = -a_k - 2^{-1}\pi$, $\hat{\zeta}_k(\tilde{\gamma}_1) = -a_k + 2^{-1}\pi$ вытекают соотношения

$$\hat{\zeta}_k([\tilde{\gamma}_0, \gamma_2]) = [-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \tag{25}$$

$$\hat{\zeta}_k([\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1]) = [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi]. \tag{26}$$

Отсюда следует включение $v_1 \overset{(25)}{\in} \Omega_2$.

Тогда найдётся $\gamma_3 := \sup(\Omega_2 \bigcap [v_1, v_2])$. В силу очевидного неравенства $\gamma_3 \leqslant v_2$ и, как следствие, непустоты множества $[\gamma_3, v_2]$ получаем включение $v_2 \overset{(26)}{\in} \Omega_3 \bigcap [\gamma_3, v_2]$. Поэтому существует $\gamma_4 := \inf(\Omega_3 \bigcap [\gamma_3, v_2])$.

Из непрерывности функции $\hat{\zeta}_k(\cdot)$ на отрезке $\hat{W}_k := [\gamma_3, \gamma_4] \subset [v_1, v_2] \subset \operatorname{int} \tilde{W}_k$ и вытекающих из соотношения (19) включений

$$\hat{\zeta}_k(\gamma_3) \in (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \quad \hat{\zeta}_k(\gamma_4) \in [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi) \tag{27}$$

следует, что $\hat{\zeta}_k(\hat{W}_k) \supset [\hat{\zeta}_k(\gamma_3), \hat{\zeta}_k(\gamma_4)] \ni -a_k$. Поэтому множество $\Omega_4 := \{\nu \in \hat{W}_k : \hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k\}$ не пусто. Следовательно, найдутся $\gamma_5 := \inf \Omega_4$ и $\gamma_6 := \sup \Omega_4$.

Обозначим $M_{-1} := [\gamma_3, \gamma_5]$, $M_1 := [\gamma_6, \gamma_4]$. В силу непрерывности функции $\tilde{\eta}_{k+1}$ на отрезках M_{-1} и M_1 найдутся $j \in \{-1, 1\}$ и $\gamma_7 \in M_j$ такие, что $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_7) = \sup\limits_{\nu \in M_{-1} \bigcup M_1} \tilde{\eta}_{k+1}(\nu)$.

Обозначим $\tilde{M}_{-1} := [\gamma_3, \gamma_7]$, $\tilde{M}_1 := [\gamma_7, \gamma_4]$,

$$L_{-1} := [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi + \zeta_{k+1}(\gamma_3)) \times \{\varkappa_{k+1}\}, \quad L_1 := (-2^{-1}\pi + \zeta_{k+1}(\gamma_4), 2^{-1}\pi] \times \{\varkappa_{k+1}\},$$

$$\zeta_{k+1}(\nu) := \hat{\zeta}_k(\nu) + \varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu) + a_k,$$

$$h_k^i(\nu) := (\zeta_k(\nu) - i2^{-1}\pi, \operatorname{sh} \ln \tilde{\eta}_k(\nu))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \{-1, 1\}, \quad \nu \in \hat{W}_k,$$

$$C_k^j := \{h_{k+1}^j(\nu) : \nu \in \tilde{M}_j\}, \quad C_k^{3-j} := \{h_{k+1}^{3-j}(\nu) : \nu \in M_{3-j}\}.$$

Вследствие неравенства (17) выполняется оценка $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_5) > \varkappa_{k+1}$. Отсюда, поскольку для любого $\gamma \in (\gamma_3, \gamma_4)$ имеет место неравенство $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma) \neq \varkappa_{k+1}$, в силу непрерывности на отрезке $[\gamma_3, \gamma_4]$ функции $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$ верна оценка

$$\tilde{\eta}_{k+1}(\nu) > \varkappa_{k+1}, \quad \nu \in (\gamma_3, \gamma_4). \tag{28}$$

Положим $h := C_k^j$, $u := C_k^{3-j} \bigcup L_{3-j}$, $\mathfrak{a} := \varkappa_{k+1}$, $\mathfrak{b} := \operatorname{sh} \ln \tilde{\eta}_k(\gamma_7)$, $\mathfrak{c} := -\pi/2$, $\mathfrak{d} := \pi/2$.

Из включений (19) и (27) следуют соотношения

$$\hat{\zeta}_k(M_{-1}) \subset (-a_k - 2^{-1}\pi, -a_k], \quad \hat{\zeta}_k(M_1) \subset [-a_k, -a_k + 2^{-1}\pi). \tag{29}$$

Отсюда в силу сравнения (20) вытекает равенство

$$\hat{\zeta}_k(\nu) = -a_k + \tilde{\xi}_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\nu), \quad \nu \in M_{-1} \bigcup M_1. \tag{30}$$

Тогда вследствие включений (29) и равенства (22) получаем соотношения

$$\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M_{-1}) \subset (-2^{-1}\pi, 0], \quad \varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M_1) \subset [0, 2^{-1}\pi). \tag{31}$$

Включения (29) и (31) в свою очередь влекут за собой соотношения $\zeta_{k+1}(M_{-1}) \subset [-\pi, 0]$, $\zeta_{k+1}(M_1) \subset [0, \pi]$. Отсюда имеем включения $C_k^j, C_k^{3-j} \subset [-2^{-1}\pi, 2^{-1}\pi] \times \mathbb{R}$. Из них в силу неравенства (27) получаем, что $h, u \subset E(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$. При этом вследствие включений (18), (23) и (24) h и u – непрерывные кривые. Кроме того, очевидно, выполняются все равенства в условиях леммы 2. Тогда в силу неё существует вектор $r = (r_1, r_2)^{\mathrm{T}} \in h \bigcap u$.

Для любого $l \in \{3, 4\}$ из непрерывности на отрезке $\tilde{W}_k$ функций $\hat{\zeta}_k(\cdot)$ и $\tilde{\eta}_{k+1}(\cdot)$ следует замкнутость множеств Ω_2 и Ω_3. Поэтому верны включения $\gamma_l \in \Omega_{l-1}$, откуда вытекает равенство $\tilde{\eta}_{k+1}(\gamma_l) = \varkappa_{k+1}$. Таким образом, в случае, если $\mu = \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l)$, оценка (17) не верна.

Следовательно, для таких μ не выполняется неравенство (11). Отсюда в силу равенства (30) имеем соотношения

$$|\zeta_{k+1}(\gamma_l)| \overset{(30)}{=} |\varphi_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l) + \tilde{\xi}_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(\gamma_l)| \geqslant \pi/2, \quad l \in \{3,4\}. \tag{32}$$

Из них вытекают включения

$$L_{-1} \subset [-2^{-1}\pi, 0) \times \mathbb{R}, \quad L_1 \subset (0, 2^{-1}\pi] \times \mathbb{R}. \tag{33}$$

Если $r_2 = \varkappa_{k+1}$, то, поскольку $r \in C_k^j$, из включений (27) следует соотношение $r \in \in \{h_{k+1}^{-1}(\gamma_3), h_{k+1}^1(\gamma_4)\}$. Поэтому в силу неравенств (32) выполняются оценки

$$jr_1 = j\zeta_k(\gamma_{(7+j)/2}) - 2^{-1}\pi \leqslant 0.$$

Отсюда вследствие включений (33) получаем, что $r \notin L_{3-j}$. Это же соотношение верно и в случае, когда $r_2 \neq \varkappa_{k+1}$.

Таким образом, в обоих случаях справедливо включение $r \in C_k^{3-j}$. Поэтому найдутся такие $\gamma_8 \in [\gamma_3, \gamma_5]$ и $\gamma_9 \in [\gamma_6, \gamma_4]$, для которых справедливо равенство

$$h_{k+1}^{-1}(\gamma_8) = h_{k+1}^1(\gamma_9). \tag{34}$$

Положим $\tilde{V}_{k+1} := [\gamma_8, \gamma_9]$, $V_{k+1} := \omega_{k+1}^{-1}(\tilde{V}_{k+1})$.

Тогда вследствие включений (18) и (24) функция ζ_{k+1} непрерывна на $\tilde{V}_{k+1}$. Кроме того, из равенства (30) вытекает сравнение (6_{k+1}), а в силу равенства (34) справедливо сравнение (7_{k+1}). При этом из оценки (28) следует неравенство (10_{k+1}).

По индукции с учётом вытекающего из включения (23) соотношения (9_{k+1}) получаем, что оценка (10_k) справедлива при всех $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и любого отрезка $M \subset \tilde{V}_k$ найдутся отрезки $f_{k,i}(M) \subset \tilde{V}_1$, $i = \overline{1, 2^{k-1}}$, такие, что

$$\omega_1 \circ \omega_k^{-1}(M) = \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k,i}(M). \tag{35_k}$$

Для любого отрезка $M \subset \tilde{V}_{k+1}$ существуют отрезки $g_{k,i}(M) \subset \tilde{V}_k$, $i = \overline{1,2}$, для которых

$$\omega_k \circ \omega_{k+1}^{-1}(M) = \bigcup_{i=1}^{2} g_{k,i}(M). \tag{36}$$

Положим $f_{k+1,i}(M) := f_{k,i}(g_{k,1}(M))$, $f_{k+1,2^{k-1}+i}(M) := f_{k,i}(g_{k,2}(M))$, $i = \overline{1, 2^{k-1}}$.

Тогда из равенств (35_k) и (36) следуют соотношения

$$\omega_1 \circ \omega_{k+1}^{-1}(M) \overset{(36)}{=} \bigcup_{i=1}^{2} \omega_1 \circ \omega_k^{-1}(g_{k,i}(M)) \overset{(35_k)}{=} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k+1,i}(M).$$

Таким образом, равенство (35_{k+1}) выполняется. По индукции, учитывая очевидное равенство (35_1), получаем, что равенство (35_k) справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$.

Поэтому, поскольку $V_{k+1} \subset V_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$V_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_k = \operatorname*{Lim}_{k\to+\infty} V_k \overset{(35_k)}{=} \operatorname*{Lim}_{k\to+\infty} \omega_1^{-1}\biggl(\bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} f_{k,i}(\tilde{V}_k)\biggr).$$

Следовательно, $\omega_1(V_\infty)$ является пределом последовательности вложенных друг в друга замкнутых множеств, что влечёт за собой его не пустоту.

Тогда в силу леммы 1 для любого $\mu \in V_\infty$ справедливы оценки

$$\|X_{A_\mu}(2^n - 1, 0)\| \overset{(5_n)}{=} \eta_n \overset{(10_n)}{>} \exp(2^{n/2-1}) \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липницкий А.В.* Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М., 2014. С. 171–177.
2. *Липницкий А.В.* О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 3. С. 270–277.
3. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.
4. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983.
5. *Миллионщиков В.М.* Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 569.
6. *Липницкий А.В.* О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1615–1620.
7. *Барабанов Е.А.* Сингулярные показатели и критерии правильности линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 147–157.
8. *Maehara R.* The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem // The American Math. Monthly. 1984. V. 91. № 10. P. 641–643.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 13.12.2021 г.
После доработки 07.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.