ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 477–488

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22

ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Л. А. Алексеева

Рассматриваются краевые задачи для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений. Такие уравнения представляют собой бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака. Исследуются монохроматические решения с фиксированной частотой колебаний. Построены фундаментальные и обобщённые решения для бикватернионных амплитуд колебаний на пространстве обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. С использованием метода обобщённых функций найдены решения биволнового уравнения в ограниченной области по известным значениям решения на границе области, даны их регулярные интегральные представления для внутренних точек и интегральное представление характеристической функции области через фундаментальное решение уравнения. На основании последней из перечисленных формул, представляющей собой бикватернионные аналоги известных формул Грина и Гаусса для эллиптических уравнений, построены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения для решения стационарных краевых задач.

DOI: 10.31857/S0374064122040045, EDN: BZLLWX

Настоящая работа связана с построением решений краевых задач для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений, которые являются бикватернионными обобщениями уравнений Максвелла и Дирака. Отметим, что кватернионное представление уравнений Максвелла началось с работы самого Максвелла и имеет довольно обширную библиографию ([1–10] и др.), в отличие от работ по построению решения краевых задач для кватернионных и бикватернионных обобщений этих уравнений. Бикватернионные волновые уравнения относятся к классу гиперболических и описывают решения гиперболических систем из восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальные решения таких уравнений и их свойства рассмотрены автором в статье [11]. Основы дифференциальной алгебры бикватернионов изложены в работе [12], обозначения из которой здесь используем.

Особый класс решений биволнового уравнения составляют *монохроматические* решения, которые описывают гармонические (синусоидальные) колебания с фиксированной частотой. Уравнение для бикватернионных амплитуд колебаний – стационарное биволновое уравнение – в этом случае становится эллиптическим. В настоящей работе развивается теория краевых задач для таких уравнений с использованием методов теории обобщённых функций. Построены фундаментальные и обобщённые решения этих уравнений на пространстве обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. Даны интегральные представления решений биволнового уравнения в ограниченной области по известным значениям решения на границе области. Построено интегральное представление характеристической функции множества через фундаментальное решение стационарного биволнового уравнения. Эти формулы являются аналогами известных формул Грина и Гаусса для уравнения Лапласа и вообще эллиптических уравнений и систем, их бикватернионным обобщением. На их основе построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения стационарных краевых задач.

1. Бикватернионы и их биградиенты. Рассмотрим бикватернионное волновое уравнение вида

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}(\tau,x)+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}(\tau,x)=\mathbf{G}(\tau,x),\quad (\tau,x)\in\mathbb{M},\tag{1}$$

в котором бикватернионы $\mathbf{B}(\tau,x)$ и $G(\tau,x)$ имеют вид

$$\mathbf{B}(\tau,x)=b(\tau,x)+B(\tau,x),\quad \mathbf{G}=g(\tau,x)+G(\tau,x),$$

структурный коэффициент $\mathbf{F} = f + F$ является постоянным бикватернионом, а $\mathbb{M} = \{(\tau, x) : \tau \in \mathbb{R}^1,\ x \in \mathbb{R}^3\}$ – пространство Минковского, где $\tau = ct$, t – время, c – скорость света. Здесь и далее используем гамильтонову скалярно-векторную запись бикватернионов, употребляя для их скалярных и векторных величин одноимённые с обозначением бикватерниона (для которого мы используем заглавные латинские буквы жирного шрифта) соответственно строчные и заглавные одинарные буквы курсивного шрифта, т.е., например, в бикватеорионе $\mathbf{F} = f + F$, величина f – скаляр, а $F = \sum_{j=1}^3 F_j e_j$ – вектор. Согласно кватернионному умножению

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{B} = (f + F) \circ (b + B) = \{fb - (F, B)\} + \{fB + bF + [F, B]\}, \tag{2}$$

где справа в скобках стоят скалярное и векторное произведения указанных векторов и векторных функций

$$(F, B) = \sum_{j=1}^{3} F_j B_j, \quad [F, B] = \sum_{k,l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} F_k B_l e_m,$$

ε_{klm} – псевдотензор Леви-Чивиты, e_m – базисные элементы алгебры бикватернионов ($m = 0, 1, 2, 3$). Предполагается, что $\mathbf{B}(\tau, x)$, $\mathbf{G}(\tau, x)$ принадлежат функциональному пространству $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$. Под таковым понимаем бикватернионы, компоненты которых принадлежат классу обобщённых комплексных функций медленного роста [13, с. 149].

В уравнении (1) дифференциальные бикватернионные операторы ∇^+ и ∇^- – *взаимные биградиенты* – имеют вид

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla,$$

$\nabla = \mathrm{grad}$. Их действие на $\mathbf{B}(\tau, x)$ определяется алгеброй бикватернионов

$$\nabla^\pm \mathbf{B} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b + B) = (\partial_\tau b \mp i(\nabla, B) + \partial_\tau B \pm i(\nabla b + [\nabla, B])) =$$
$$= (\partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B) + \partial_\tau B \pm i \operatorname{grad} b \pm i \operatorname{rot} B$$

(соответственно верхнему и нижнему знакам).

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида

$$\mathbf{A} \circ \nabla^\pm \mathbf{B} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B} = \mathbf{H},$$

которые приводятся к (1), если существует обратный бикватернион $\mathbf{A}^{-1}$, т.е.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^-},$$

где $\mathbf{A}^- = a - A$ – взаимный с $\mathbf{A} = a + A$ бикватернион. В этом случае, умножая (2) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем уравнение (1), в котором $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{C}$, $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{H}$.

Введём также сопряжённый к $\mathbf{A}$ бикватернион $\mathbf{A}^*$ равенством $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^-$. Здесь чертой над символом обозначается комплексное сопряжение скалярной и векторной частей бикватерниона (подробнее о дифференциальной алгебре бикватернионов см. [12]).

2. Свойства взаимных биградиентов и МД-операторов. Введём дифференциальные бикватернионные операторы

$$\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}} = \nabla^+ + \mathbf{F} = \nabla^+ + f + F, \quad \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}} = \nabla^- + \mathbf{F}^- = \nabla^- + f - F,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В соответствии с использованной выше терминологией назовём их *взаимными МД-операторами* (операторами Максвелла–Дирака). Используем далее обозначения для классических волновых операторов – даламбертиана и лапласиана соответственно:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Взаимные биградиенты и МД-операторы обладают очень полезными для приложений свойствами.

Лемма 1. *Взаимные биградиенты коммутируют между собой, и для их композиции имеет место равенство*

$$\nabla^+ \circ \nabla^- = \nabla^- \circ \nabla^+ = \Box.$$

МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^+ \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^+ = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) - 2i(F,\nabla). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно,

$$\nabla^+ \circ \nabla^- = (\partial_\tau + i\nabla) \circ (\partial_\tau - i\nabla) =$$

$$= \partial_\tau\partial_\tau - (\nabla,\nabla) - i\partial_\tau\nabla + i\partial_\tau\nabla - [\nabla,\nabla] = \nabla^- \circ \nabla^+ = \Box.$$

Аналогично получим равенства (3):

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^+ \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^- \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^+ = (\nabla^+ + f + F) \circ (\nabla^- + f - F) = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) - 2i(F,\nabla).$$

Лемма доказана.

Далее значок кватернионного умножения (композиции) между операторами опускаем.

3. Стационарные МД-операторы и их свойства. В работах [14, 15] построены фундаментальные и обобщённые решения уравнения (1) при произвольной правой части с носителем на положительной полуоси времени (нестационарные решения). Здесь построим и исследуем свойства периодических решений биволновых уравнений. В частности, рассмотрим случай гармонических колебаний с частотой ω, т.е. когда правая часть уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{G}(\tau,x) = \mathbf{G}(x)\mathrm{exp}(-i\omega\tau).$$

Здесь комплексная биамплитуда принадлежит классу обобщённых бикватернионов, компоненты которых являются обобщёнными функциями медленного роста. Решение уравнения (1) будем искать в аналогичном виде:

$$\mathbf{B}(\tau,x) = \mathbf{B}(x)\exp(-i\omega\tau).$$

В этом случае биволновое уравнение (1) для верхнего знака $(+)$ биградиента приобретает вид

$$\nabla_\omega^- \mathbf{B}(x) + i\mathbf{F} \circ \mathbf{B}(x) = i\mathbf{G}(x).$$

Здесь операторы $\nabla_\omega^\pm = \omega \pm \nabla$ назовём *ω-градиентами*, а оператор ∇ – *градиентом*:

$$\nabla\mathbf{G}(x) = -\mathrm{div}\, G(x) + \mathrm{grad}\, g(x) + \mathrm{rot}\, G(x).$$

Таким образом, для определения комплексных амплитуд (не вводя новые обозначения) мы приходим к уравнениям типа

$$\nabla_\omega^\pm \mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}. \tag{4}$$

Назовём такие уравнения *стационарными МД-уравнениями*. Соответственно введём *стационарные взаимные МД-операторы* равенствами

$$\mathbf{D}_\omega^+ = \nabla_\omega^+ + \mathbf{F}, \quad \mathbf{D}_\omega^- = \nabla_\omega^- + \mathbf{F}^-.$$

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. *Взаимные стационарные МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство*

$$\mathbf{D}_\omega^+ \mathbf{D}_\omega^- = \mathbf{D}_\omega^- \mathbf{D}_\omega^+ = \Delta + (\omega + f)^2 + (F,F) + 2(F,\nabla). \tag{5}$$

Это свойство используем далее при построении решений уравнения (4).

4. Стационарное МД-уравнение и его обобщённые решения. Далее решения построим для верхнего знака $(+)$ уравнения (4). Для нижнего знака оно строится аналогично. Для этого используем свойство МД-операторов (5). В результате получаем

$$\mathbf{D}_\omega^- \mathbf{D}_\omega^+ \mathbf{B} = \{\Delta + (\omega + f)^2 + (F, F) + 2(F, \nabla)\}\mathbf{B} = \mathbf{D}_\omega^- \mathbf{G} = \mathbf{Q},$$

т.е. каждая компонента бикватерниона $\mathbf{B}$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta u + (\omega + f)^2 u + (F, F)u + 2(F, \nabla u) = q \tag{6}$$

с соответствующей компонентой q в правой части.

Обозначим через $\psi(x)$ фундаментальное решение уравнения (6) (при $q(x) = \delta(x)$), а через $\psi^0(x)$ решения однородного уравнения (при $q = 0$).

Далее построим решения (4) для верхнего знака $(+)$.

Теорема 1. *Решение уравнения (4) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\omega^- \psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_\omega^- \mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \tag{7}$$

если свёртка в первом слагаемом существует. Здесь $\mathbf{B}^0(x)$ *– решение однородного уравнения (4).*

Доказательство. В силу линейности уравнения достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (7). Подставим первое слагаемое в уравнение (4) и, используя (3), свойство дифференцирования свёртки и свойство дельта-функции, будем иметь

$$\mathbf{D}_\omega^+ \mathbf{D}_\omega^- (\psi * \mathbf{G}) = \{\Delta\psi + (\omega + f)^2\psi + (F, F)\psi + 2(F, \nabla\psi)\} * \mathbf{G} = \delta * \mathbf{G} = \mathbf{G},$$

$$\mathbf{D}_\omega^- \mathbf{B}^0 = 0.$$

Если $\mathbf{B}_1$ – любое решение уравнения (4), то $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}) = \mathbf{B}_2$ – решение однородного уравнения (4), следовательно, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{B}_2$. Лемма доказана.

Заметим, что свёртку в первом слагаемом, согласно правилам дифференцирования свёрток обобщённых функций [13, с.126] можно брать разными способами, что удобно при вычислении.

Теорема 2. *Бикватернион вида*

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \mathbf{D}_\omega^- \psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \psi^0 * \mathbf{D}_\omega^- \mathbf{C}^0 = \sum_{\{\psi^0(x)\}} \mathbf{D}_\omega^- (\psi^0 * \mathbf{C}^0)$$

является решением однородного уравнения (4) $(\mathbf{G} \equiv 0)$. *Здесь* $\{\psi^0(x)\}$ *– конечное множество произвольных решений однородного уравнения (6),* $\mathbf{C}^0 \in \mathbb{B}'(\mathbb{R}^3)$ *– произвольные бикватернионы, допускающие такую свёртку.*

Доказательство следует из равенства

$$\mathbf{D}_\omega^+ \mathbf{D}_\omega^- (\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{\Delta\psi^0 + (\omega + f)^2\psi^0 + (F, F)\psi^0 + 2(F, \nabla\psi^0)\} * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Следовательно, класс решений уравнения (4) определяется скалярными функциями $\psi(x)$ и $\psi^0(x)$ – решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными МД-потенциалами* решений стационарного МД-уравнения.

5. Фундаментальные решения МД-уравнения и их потенциалы. Рассмотрим фундаментальные решения (4), которые удовлетворяют уравнению

$$\nabla_\omega^+ \mathbf{U}(x) + \mathbf{F} \circ \mathbf{U}(x) = \delta(x), \tag{8}$$

правая часть которого – сингулярная дельта-функция. Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного уравнения (с нулевой правой частью).

Свойства фундаментальных решений позволяют строить частные решения уравнения (4) в виде *бикватернионной свёртки*

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} * \mathbf{U} = (g+G)*(u+U) = \left\{ g*u - \sum_{k=1}^{3} G_k * U_k \right\} + \left\{ u*G + g*U + \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} e_j (G_k * U_l) \right\},$$

где в правой части стоят покомпонентные функциональные свёртки, которые следует брать согласно правилам свёртки обобщённых функций [13, с. 126]. Условия существования таких свёрток определяют класс бикватернионов в правой части уравнения (4), для которых указанные решения существуют.

Используя формулу (7) и свойство свёрток с дельта-функцией, получаем фундаментальные решения уравнения (4) в следующем виде:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{D}_\omega^- \psi(x) * \delta(x) + \mathbf{B}^0(x) = \mathbf{D}_\omega^- \psi(x) + \mathbf{B}^0(x) = (\omega + f)\psi(x) - \operatorname{grad}\psi(x) - \psi(x) F + \mathbf{B}^0(x).$$

Определение. Назовём *функцией Грина* фундаментальное решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности:

$$\mathbf{U}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty,$$

порождённое фундаментальным решением уравнения (6), удовлетворяющим некоторым условиям излучения для расходящихся волн.

Для построения такого решения используем преобразование Фурье обобщённых функций. Переменные Фурье, соответствующие $x = (x_1, x_2, x_3)$, обозначаем $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ соответственно. Используя свойство преобразования Фурье производной [13, с. 162] $\partial/\partial x_j \leftrightarrow -i\xi_j$, получаем преобразование Фурье уравнения (6):

$$(-\|\xi\|^2 + (\omega + f^2) - 2i(F,\xi) + (F,F))\bar{\psi}(\xi) = 1,$$

которое можно записать в виде $\{-(\xi + iF, \xi + iF) + (f+\omega)^2\}\bar{\psi} = 1.$ Откуда находим преобразование Фурье скалярного потенциала

$$\bar{\psi}(\xi) = -\frac{1}{(\xi + iF, \xi + iF) - (\omega + f)^2}.$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\chi(x) + k^2\chi(x) = \delta(x), \quad \operatorname{Re} k > 0,$$

удовлетворяющим условиям излучения Зоммерфельда при $\|x\| \to \infty$:

$$\psi(x) = O(1/r), \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} \mp ik\psi = o(1/r), \quad r = \|x\|,$$

которое описывает затухающую на бесконечности сферическую волну [13, с. 203]

$$\chi(x)e^{-i\omega t} = -\frac{1}{4\pi\|x\|} e^{i(\pm k\|x\| - \omega t)}.$$

Она расходится из точки $x = 0$ для верхнего знака $(+)$, а для нижнего знака $(-)$ сходится. Им соответствуют следующие регуляризации преобразования Фурье функции $(\|\xi\|^2 - \omega^2)^{-1}$:

$$\mathtt{F}[\chi(x)] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - (\omega \pm i0)^2}.$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [13, с. 162]

$$\mathtt{F}[\chi(x)e^{i(a,x)}] = \mathtt{F}[\chi(x)](\xi + a),$$

получаем

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{\pm ik\|x\|-(F,x)}, \quad k = \omega + f.$$

Этим комплексным амплитудам соответствуют волны вида

$$\psi_+(x)e^{-i\omega\tau} = -\frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\|x\|}\exp(i((\omega+f)\|x\| - \omega\tau)),$$

$$\psi_-(x)e^{-i\omega\tau} = -\frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\|x\|}\exp(-i((\omega+f)\|x\| + \omega\tau)). \tag{9}$$

Их свойства на бесконечности зависят от структурного коэффициента $\mathbf{F} = f + F$. В частности,

$$\psi_+(x) \to 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} f \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} F = 0, \tag{10}$$

$$\psi_-(x) \to 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} f \leqslant 0, \quad \operatorname{Re} F = 0. \tag{11}$$

Эти волны расходятся на бесконечности, если

$$\operatorname{Re}(\omega + f) > 0 \quad \text{для} \quad \psi_+(x), \quad \operatorname{Re}(\omega + f) < 0 \quad \text{для} \quad \psi_-(x). \tag{12}$$

Приведённые условия – это условия излучения для скалярных МД-потенциалов. Выбираем тот из потенциалов (10), для которых они выполняются. В противном случае фундаментальные решения экспоненциально растут на бесконечности и функции Грина не существует.

Используя соответствующее представление потенциала (9) и формулу теоремы 1, находим фундаментальное решение стационарного МД-уравнения. В частности, при условиях (10), (12) для $\phi_+(x)$ получаем

$$\mathbf{U}(x) = \omega\psi(x) - \operatorname{grad}\psi(x) = -\frac{e^{i\omega - f\|x\| + i(F,x)}}{4\pi\|x\|}(\omega - iF - i(\omega + if + i\|x\|^{-1})e_x), \tag{13}$$

где $e_x = x/\|x\|$. Соответственно, используя теорему 1, с учётом (9) находим решение стационарного МД-уравнения. В частности, из неё следует

Теорема 3. *Если* $\mathbf{G}(x)$ *– регулярный бикватернион с компактным носителем, частные производные которого являются интегрируемыми функциями, то уравнение (4) имеет решение вида*

$$4\pi\mathbf{B}(x) = -\frac{e^{(i\omega - f)\|x\| - (F,x)}}{\|x\|} * \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{G}(x) =$$

$$= e^{-(F,x)} \int\limits_{\operatorname{supp}\mathbf{G}(y)} \frac{e^{(i\omega - f)\|x-y\| + (F,y)}}{\|x-y\|}\{\omega g(y) + \operatorname{div} G(y) + \omega G(y) - \operatorname{rot} G(y)\}\,dV(y) -$$

$$- e^{-(F,x)}\mathbf{F}^- \circ \int\limits_{\operatorname{supp}\mathbf{G}(y)} \frac{e^{(i\omega - f)\|x-y\| + (F,y)}}{\|x-y\|}\mathbf{G}(y)\,dV(y),$$

$dV(y) = dy_1\,dy_2\,dy_3$. *При условиях (10), (12) оно описывает порождаемые источником расходящиеся и затухающие на бесконечности волны.*

Аналогично при условиях (11), (12) вычисляется решение $\mathbf{U}(x)$ для $\psi_-(x)$ и переформулируется теорема 3.

Если носитель бикватерниона $\mathbf{G}(x)$ неограничен, то условия существования интеграла определяют условия на $\mathbf{G}$, при которых решение существует.

Бикватернион $\mathbf{G}$ может быть сингулярным. В этом случае следует использовать первое равенство в (7), взять свёртку по правилам нахождения свёртки в пространстве обобщённых функций [13, с. 132], а затем подействовать МД-оператором.

6. Построение аналога формулы Грина методом обобщённых функций. Под таковым аналогом мы понимаем представление решения уравнения в ограниченной области $S^- \subset \subset \mathbb{R}^3$ по его граничным значениям на границе S по аналогии с представлением решения уравнения Лапласа по граничным значениям решения и его производных [13, с. 252]. Для этого используем характеристическую функцию этой области $H_s^-(x)$. Её производная в пространстве обобщённых функций имеет вид

$$\partial_j H_S^-(x) = -n_j(x)\delta_S(x),$$

где сингулярная обобщённая функция $n_j(x)\delta_S(x)$ – простой слой на поверхности S, а $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ – внешняя единичная нормаль к S.

Введём регулярный бикватернион

$$\hat{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{B}(x)H_S^-(x),$$

равный решению уравнения (4) в этой области с её границей, а вне их равный нулю. Обобщённые частные производные этого бикватерниона в пространстве $\mathbb{B}'(\mathbb{R}^3)$ представляются в виде [13, с. 104]

$$\partial_j \hat{\mathbf{B}}(x) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_j} H_S^-(x) - \mathbf{B}_S(x) n_j(x)\delta_S(x), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь первое слагаемое справа – классическая частная производная бикватерниона, $\mathbf{B}_S(x)$ – значения бикватерниона $\mathbf{B}(x)$ на S. С учётом представления (14) получаем

$$\nabla_\omega^+ \hat{\mathbf{B}}(x) = \{(\omega - \operatorname{div} B(x)) + \omega B(x) + (\operatorname{grad} b(x) +$$

$$+ \operatorname{rot} B(x))\} H_S^-(x) + \{(n(x), B) - bn(x) - [n(x), B]\}\delta_s(x).$$

Тогда действие МД-операторов на этот бикватернион в пространстве обобщённых бикватернионов примет вид

$$\nabla_\omega^+ \hat{\mathbf{B}}(x) + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{G}(x) H_S^-(x) + i\{(n(x), B_S(x)) - b_S(x) n(x) - [n(x), B_S(x)]\}\delta_S(x) =$$

$$= \hat{\mathbf{G}}(x) - (n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x), \tag{14}$$

где $\mathbf{B}_S(x) = b_s(x) + B_S(x)$. Введём сингулярный бикватернион простого слоя

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(x) = -(n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x) = i\{n(x), B_s(x) - b_s n(x) - [n(x), B_s(x)]\}\delta_S(x).$$

Здесь $(-n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))$ – плотность простого слоя на S. В результате приходим к уравнению вида

$$\nabla^+ \hat{\mathbf{B}}(x) + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}}(x) = \hat{\mathbf{G}}(x) + \hat{\mathbf{\Gamma}}(x).$$

Бикватернионная свёртка правой части этого уравнения с функцией Грина, согласно теореме 1, является решением уравнения (4):

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{G}} + \mathbf{U} * \hat{\mathbf{\Gamma}}.$$

Первое слагаемое $\hat{\mathbf{B}}_1$ вычисляется по формуле теоремы 3. Вычисляя второе слагаемое $\hat{\mathbf{B}}_2$, имеем

$$\hat{\mathbf{B}}_2(x) = \mathbf{U}(x) * \hat{\mathbf{\Gamma}}(x) = \left\{ -\frac{e^{(i\omega - f)\|x\| + j(F,x)}}{4\pi\|x\|}(\omega - iF - (i\omega - f - \|x\|^{-1})e_x) \right\} * (n(x) \circ \mathbf{B}_S(x))\delta_S(x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left\{ -\frac{e^{(i\omega - f)\|x-y\| + i(F,x)}}{\|x-y\|} (\omega - iF - (i\omega - f - \|x-y\|^{-1}) e_{x-y}) \right\} * (n(y) \circ \mathbf{B}_S(y))\, dS(y).$$

Здесь и далее $e_{y-x} = (y-x)/\|x-y\|$.

Результат сформулируем в виде теоремы, которая является аналогом формулы Грина для эллиптических уравнений и систем.

Теорема 4. *Если $G(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то решение стационарного МД-уравнения (4) определяется своими граничными значениями на S формулой*

$$4\pi \mathbf{B}(x) H_S^-(x) = -e^{i(F,x)} \int\limits_S \frac{e^{(i\omega - f)r - i(F,y)}}{r} \{\omega - iF + (i\omega - f) e_{y-x}\} \circ \{(n(y) \circ \mathbf{B}_S(y))\}\, dS(y) -$$

$$- e^{i(F,x)} \int\limits_S \frac{e^{(i\omega - f)r - i(F,y)}}{r^2} e_{y-x} \circ \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\}\, dS(y) + \hat{\mathbf{B}}_1(x), \quad r = \|x-y\|.$$

Заметим, что для всех $x \notin S$ подынтегральные функции интегрируемы и интегралы существуют.

Однако для граничных точек $x \in S$ второй интеграл содержит неинтегрируемую на S особенность при $x = y$ порядка r^{-2}. Исследование предельных свойств этого интегрального представления приводит к сингулярным граничным интегральным уравнениям (СГИУ), которые являются разрешающими для краевых задач для уравнения (4). Заметим также, что и для граничных точек формула сохраняет тот же вид, если положить, что $H_S^-(x) = 1/2$ на границе S. Только в этом случае интеграл следует брать в смысле главного значения. Для доказательства этого факта дадим вначале представление функции $H_S^-(x)$ через функцию Грина уравнения (4).

7. Представление характеристической функции множества S^-. Аналог формулы Гаусса. Хорошо известна формула Гаусса, которая представляет характеристическую функцию множества S^- через значения фундаментального решения уравнения Лапласа и его нормальной производной на границе S [13, с. 412]. Построим аналогичную формулу, используя функцию Грина стационарного МД-уравнения. Для этого свернём уравнение для фундаментального решения (8) с $H_S^-(x)$, воспользуемся свойством свёрток с дельта-функцией и производных свёрток обобщённых функций. В результате получим

$$H_S^-(x) = \nabla_\omega^+ \mathbf{U}(x) * H_S^-(x) + (\mathbf{F} \circ \mathbf{U}(x)) * H_S^-(x) = (\omega + \mathbf{F}) \circ \mathbf{U}(x) * H_S^-(x) - \mathbf{U}(x) * n(x) \delta_S(x) =$$

$$= (\omega + \mathbf{F}) \circ \int\limits_{S^-} \mathbf{U}(x-y)\, dV(y) - \int\limits_S \mathbf{U}(x-y) \circ n(y) dS(y).$$

Эта формула имеет следующее интегральное представление.

Лемма 3. *Характеристическая функция множества S^-, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова S, представима в виде*

$$4\pi H_S^-(x) = (\omega + \mathbf{F}) \circ \int\limits_{S^-} \frac{e^{(i\omega - f)r + i(F, x-y)}}{r} (\omega - \{F + (i\omega - f - r^{-1}) e_{x-y}\})\, dV(y) -$$

$$- \int\limits_S \frac{e^{(i\omega - f)r + i(F, x-y)}}{r} (\omega - \{iF + (i\omega - f) e_{x-y}\}) \circ n(y)\, dS(y) -$$

$$- \int\limits_S \frac{e^{(i\omega - f)r + i(F, x-y)}}{r^2} e_{y-x} \circ n(y)\, dS(y). \tag{15}$$

Для $x \notin S$ все интегралы регулярные, а для $x \in S$ второй интеграл является сингулярным и берётся в смысле главного значения. На границе, по определению, $H_S^-(x) = 1/2$.

Доказательство. Формула (15) вытекает непосредственно из представления функции Грина (13). Если $x \notin S$, то все подынтегральные функции непрерывные, а множество интегрирования ограничено, поэтому интегралы существуют и для таких x являются непрерывными и дифференцируемыми функциями.

Для $x \in S$ первый интеграл в формуле (15) имеет слабую сингулярность порядка $1/r^2$, интегрируемую при $y = x$, так как интеграл берётся по трёхмерному множеству. Второй поверхностный интеграл также имеет слабую интегрируемую сингулярность порядка $1/r$. Однако у третьего поверхностного интеграла особенность порядка $1/r^2$ является сильной и, вообще говоря, неинтегрируемой:

$$I(x) = \int\limits_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} e_{x-y} \circ n(y)\, dS(y) = \int\limits_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{e_{y-x}, n(y) - [e_{y-x}, n(y)]\}\, dS(y).$$

Вычислим его значение при $x \to x^* \in S$. Обозначим ε-окрестность точки x^* на поверхности S через $O_\varepsilon(x^*) = \{y \in S : \|y - x^*\| < \varepsilon\}$.

Пусть $x \in S$, $x - x^* = -\varepsilon_1 n(x^*)$. Разобьём этот интеграл на два. Тогда

$$I(x) = -\int\limits_{S\setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{x-y} n(y)) - [e_{x-y} n(y)]\}\, dS(y) -$$

$$-\int\limits_{S\setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{x-y} n(y)) - [e_{x-y} n(y)]\}\, dS(y) \underset{x\to x^*}{\to} I(x^*, \varepsilon),$$

$$I(x^*, \varepsilon) = -\int\limits_{S\setminus O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r(x^*,y)(F,x^*-y)}}{r^2} \{(e_{x^*-y} n(y)) - [e_{x^*-y} n(y)]\}\, dS(y) -$$

$$-\lim_{x\to x^*} \int\limits_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r^2} \{(e_{y-x}, n(y)) - [e_{x-y} n(y)]\}\, dS(y).$$

Здесь первое слагаемое будет регулярным для всех x, в том числе для x на поверхности, так как подынтегральные функции непрерывны в области интегрирования. При $x \in S$ и $\varepsilon \to 0$ оно стремится к интегралу в смысле главного значения, который существует в силу того, что $e_{x-y} = -e_{y-x}$.

Пусть $x - x^* = -\varepsilon_1 n(x^*)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Вычислим второе слагаемое. Заметим, что

$$\int\limits_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y - x^2)} (e_{y-x}, n(y))\, dS(y) = \Omega(x) + O(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 2\pi,$$

где $\Omega(x)$ – телесный угол, который доставляет конус с вершиной в точке x и с образующими, проходящими через границу окрестности $O_\varepsilon(x^*)$.

Далее, поскольку $n(y) \to n(x^*)$ при $\varepsilon \to 0$ и при всех $x \notin S$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y - x)^2} [e_{y-x}, n(y)]\, dS(y) = \int\limits_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{(1 + O(\varepsilon))}{(y - x)^2} [n(x^*), n(y)]\, dS(y) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{O_\varepsilon(x^*)} \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{(y - x)^2} [e_{y-x}, n(y)]\, dS(y) = 0.$$

С учётом этого, суммируя, получаем

$$\lim_{x\to x^*}\int\limits_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r}(-\omega+\{iF+(i\omega-f-r^{-1})e_{y-x}\})\circ n(y)\,dS(y)=$$

$$=\mathrm{V.P.}\int\limits_S \frac{e^{(i\omega-f)r+i(F,x-y)}}{r}(-\omega+\{iF+(i\omega-f-r^{-1})e_{y-x}\})\circ n(y)\,dS(y)+2\pi.$$

Так как $4\pi H_S^-(x)=4\pi$ для $x\in S^-$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $x\to S$ и перенося 2π в левую часть, приходим с учётом предыдущего, согласно определению функции $H_S^-(x)$ на границе, к формуле (15). Теорема доказана.

Если положить $\mathbf{F}=0$, то отсюда, как следствие, получим аналог формулы Гаусса через фундаментальное решение стационарного обобщённого уравнения Максвелла (ОУМ).

Следствие 1. *Характеристическая функция множества S^-, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова S, представима в виде*

$$4\pi H_S^-(x)=\omega\int\limits_{S^-}\frac{e^{i\omega r}}{r}(\omega+\{i(\omega-r^{-1})e_{y-x}\})\,dV(y)-\int\limits_S\frac{e^{i\omega r}}{r}(\omega+i(\omega-r^{-1})e_{y-x})\circ n(y)\,dV(y).$$

Если здесь положить $\omega=0$, то отсюда, как следствие, получим аналог формулы Гаусса через фундаментальное решение статического ОУМ.

Следствие 2. *Характеристическая функция множества S^-, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова S, представима в виде*

$$4\pi H_S^-(x)=-\int\limits_S\frac{e_{y-x}\circ n(y)}{r^2}\,dS(y)=\int\limits_S\frac{(e_{y-x},n(y))}{r^2}\,dS(y)-\int\limits_S\frac{[e_{y-x},n(y)]}{r^2}\,dS(y).$$

Скалярная часть этого равенства

$$4\pi H_S^-(x)=\int\limits_S\frac{(e_{y-x},n(y))}{r^2}\,dS(y)$$

– это формула Гаусса, а векторная часть равна нулю:

$$\int\limits_S\frac{[e_{y-x},n(y)]}{r^2}\,dS(y)=0.$$

Здесь для $x\in S$ интегралы берутся в смысле главного значения.

8. Сингулярные граничные интегральные уравнения. Следствием теоремы 4 и леммы 3 является

Теорема 5. *Если бикватернион $\boldsymbol{G}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то существуют решения уравнения (4), при этом все они удовлетворяют граничному интегральному уравнению*

$$2\pi\mathbf{B}_S(x)=\omega\int\limits_{y\in S^-}\|y\|^{-1}e^{ik\|y\|-(F,y)}\mathbf{G}(x-y)\,dV(y)-\int\limits_{y\in S^-}r^{-1}e^{ikr-(F,x-y)}\nabla\mathbf{G}(y)\,dV(y)+$$

$$+e^{-(F,x)}\mathbf{F}^-\circ\left\{\int\limits_{y\in S^-}r^{-1}e^{ikr+(F,y)}\mathbf{G}(y)\,dV(y)-\int\limits_S r^{-1}e^{ikr+(F,y)}n(y)\circ\mathbf{B}_S(y)\,dV(y)\right\}+$$

$$+\omega\int\limits_S r^{-1}e^{ikr+(F,y)}n(y)\circ\mathbf{B}_S(y)\,dV(y)-\mathrm{V.P.}\int\limits_S\{n(y)\circ\mathbf{B}_S(y)\}\circ\nabla\frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\,dS(y).\qquad(16)$$

Доказательство. Вычислим сингулярное слагаемое в формуле (16) при $x \in S^-$ с учётом формулы (15) для внутренних точек. Имеем

$$\int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) =$$

$$= \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) + \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) =$$

$$= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) + \nabla \int_S \left\{ \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) \right\} dS(y) =$$

$$= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) + \int_S \left\{ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r} n(y) \right\} dS(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*) =$$

$$= \int_S \{n(y)(\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x-y)}}{r}\, dS(y) + 4\pi \mathbf{B}_S(x^*).$$

Здесь $x^* \in S.$ Переходя в первом слагаемом получившегося выражения к пределу при $x \to x^*,$ с учётом формулы (15) для граничных точек, получаем

$$\lim_{x \to x^*} \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r}\, dS(y) =$$

$$= \int_S \{n(y) \circ (\mathbf{B}_S(y) - \mathbf{B}_S(x^*))\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} =$$

$$= \text{V.P.} \int_S n(y) \circ \mathbf{B}_S(y) \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} - \text{V.P.} \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(x^*)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} =$$

$$= \text{V.P.} \int_S \{n(y) \circ \mathbf{B}_S(y)\} \circ \nabla \frac{e^{ikr-(F,x^*-y)}}{r} - 2\pi \mathbf{B}_S(x^*).$$

Переходя в формуле теоремы 4 к пределу при $x \to x^*,$ с учётом этих соотношений приходим к формуле (16). Теорема доказана.

Заключение. Построенное в теореме 5 граничное бикватернионное уравнение эквивалентно четырём сингулярным граничным интегральным уравнениям для четырёх комплексных компонент, которые связывают их с его значением на границе. Значения на границе определяются значениями восьми действительных функций, определяющих действительную и мнимую части на границе. Следовательно, на границе из восьми граничных функций можно задавать только четыре. Остальные четыре определяются решением системы из четырёх СГИУ, которые являются разрешающими для краевых задач для стационарного МД-уравнения (4).

При $\mathbf{F} = 0$ получим СГИУ и решения стационарных краевых задач для ОУМ [12]. При $\mathbf{F} = if$ получим СГИУ и решения стационарных краевых задач для уравнений Дирака [14, 15].

Если исследуется периодический по времени процесс под действием периодических внешних источников возмущений, то, разлагая решение и действие источников в ряды Фурье по времени, получим рассмотренные здесь задачи для каждой гармоники ряда. Сумма решений для каждой гармоники ряда даст решение периодической по времени задачи.

Если положить $\omega = 0,$ то эти формулы дают решения статических краевых задач для уравнений Максвелла и Дирака.

Так как уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, то построенные решения могут использоваться для решения краевых задач электродинамики и теории поля при исследовании периодических по времени решений для электромагнитных (ЭМ) полей и элементарных частиц. В этом случае граничные условия задаются, исходя из физических представлений об исследуемом процессе.

Полученные представления могут использоваться в экспериментах, поскольку зачастую полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая соответствующее СГИУ.

Заметим также, что трансформация электрогравимагнитных (ЭГМ) зарядов и токов под действием внешних электрогравимагнитных полей описывается бикватернионными дифференциальными уравнениями вида (1) (см. [16, 17]). Построенные решения можно использовать для решения краевых задач в ЭГМ-полях.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (гранты AP09261033, AP09258948).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W.R.* On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions // Proc. of the Royal Irish Academy (Nov 13, 1843). P. 424–434.
2. *Edmonds J.D.* Eight Maxwell equations as one quaternionic // Amer. J. Phys. 1978. V. 46. № 4. P. 430.
3. *Шпилькер Г.Л.* Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1359–1363.
4. *Rodrigues Jr. W.A., Capelas de Oliviera E.* Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin Clifford bundles // Int. J. of Theor. Phys. 1990. V. 29. P. 397–412.
5. *Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D.* Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. 1992. V. 3. P. 207–220.
6. *Adler S.L.* Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York, 1995.
7. *De Leo S., Rodrigues Jr. W.A.* Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions // Int. J. Theor. Phys. 1997. V. 36. P. 2725–2757.
8. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. Т. 1. № 1. С. 111–127.
9. *Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M.* Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations // Apeiron. 2005. V. 12. № 4. P. 371.
10. *Марчук Н.Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М.; Ижевск, 2009.
11. *Алексеева Л.А.* Бикватернионные волновые уравнения и свойства их обобщённых решений // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 614–624.
12. *Alexeyeva L.A.* Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. 2012. V. 7. № 1. P. 19–39.
13. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
14. *Алексеева Л.А.* Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // Мат. журн. 2011. Т. 11. № 1. С. 30–38.
15. *Alexeyeva L.A.* Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // Progress in Analysis. Moscow, 2013. Proc. of the 8th Congress of ISAAC (Moscow, Aug 22–27, 2011). P. 153–161.
16. *Alexeyeva L.A.* Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // J. of Phys. Math. 2009. V. 1. Art. ID S090604.
17. *Alexeyeva L.A.* Biquaternionic form of laws of electro-gravimagnetic charges and currents interactions // J. of Modern Phys. 2016. V. 7. P. 1351–1358.

Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
г. Алматы

Поступила в редакцию 28.11.2021 г.
После доработки 30.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.