ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 489–497

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2022 г. А. Н. Коненков

Рассматриваются равномерно параболические уравнения с одной пространственной переменной как дивергентного, так и недивергентного вида без младших членов. Старший коэффициент уравнения предполагается не зависящим от времени, никаких условий гладкости на него не накладывается. Устанавливается асимптотика слабого фундаментального решения и его производных по временно́й переменной любого порядка при условии, что старший коэффициент уравнения имеет слабый предел на бесконечности. Кроме того, рассматривается вопрос об асимптотической близости фундаментальных решений и скорость стабилизации производных по времени решений задачи Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122040057, EDN: BZPNYP

Введение. Рассматривается параболическое уравнение

$$p(x)\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \tag{1}$$

в котором измеримая функция p удовлетворяет условию

$$0 < \mu \leqslant p(x) \leqslant \mu^{-1} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и такова, что существуют пределы

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_0^R p(x)\,dx = a_1^2, \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int\limits_{-R}^0 p(x)\,dx = a_2^2, \quad a_1, a_2 > 0. \tag{3}$$

При выполнении условий (2) и (3) и гёльдеровости коэффициента p А.К. Гущин и В.П. Михайлов [1] получили необходимые и достаточные условия на начальную функцию, при которых решение задачи Коши для уравнения (1) стабилизируется при $t \to +\infty$. Подобные результаты для уравнений как дивергентного, так и недивергентного вида установлены Ф.О. Порпером и С.Д. Эйдельманом [2]. В.В. Жиковым [3] найдены необходимые и достаточные условия стабилизации для уравнений дивергентного вида в многомерном случае. Обзор результатов по стабилизации решений задачи Коши имеется в [4].

Для параболических уравнений дивергентного вида без младших членов первые оценки их фундаментальных решений $\Gamma(x,\xi,t,\tau)$, в которых постоянные не зависят от гладкости коэффициентов, впервые получены Дж. Нэшем [5]. Д. Аронсон [6] установил двусторонние гауссовы оценки фундаментальных решений

$$K_1(t-\tau)^{-n/2}e^{-k_1(x-\xi)^2/(t-\tau)} \leqslant \Gamma(x,\xi,t,\tau) \leqslant K_2(t-\tau)^{-n/2}e^{-k_2(x-\xi)^2/(t-\tau)}.$$

Здесь константы зависят только от размерности n уравнения и его постоянной параболичности. В работе [7] для уравнения с одной пространственной переменной без младших членов с коэффициентами, не зависящими от времени, показано, что фундаментальное решение $\Gamma(x,\xi,t,\tau) = \Gamma(x,\xi,t-\tau)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной t и справедливы оценки

$$|\partial_t^m \partial_x^l \Gamma(x,\xi,t)| \leqslant C_m t^{-(2m+l+1)/2} e^{-c_m(x-\xi)^2/t}, \quad l = 0, 1, \quad m \geqslant 0, \tag{4}$$

где постоянные C_m и c_m зависят только от постоянной параболичности. Из последнего неравенства следует, в частности, что функции $t^{n+1/2}\partial_t^n\Gamma(x,\xi,t)$ являются ограниченными в полупространстве $t>0$. В настоящей работе устанавливается, что если выполнено условие (3), то эти функции стабилизируются при $t\to+\infty$. Это даёт возможность выписать главный член асимптотики производных $\partial_t^n\Gamma(x,\xi,t)$.

1. Асимптотическая близость фундаментальных решений. Получим асимптотику фундаментального решения уравнения (1), сравнивая его с фундаментальным решением некоторого "модельного" уравнения. Поэтому сначала рассмотрим вопрос о близости фундаментальных решений двух уравнений вида (1) при больших t, если их коэффициенты в определённом смысле близки при $x\to\infty$. Асимптотическая близость решений задачи Коши изучалась в работе [2].

Даже для непрерывного коэффициента p уравнение (1) не имеет, вообще говоря, классического фундаментального решения. Однако для $p\in L_\infty(\mathbb{R})$ при выполнении условия равномерной параболичности (2) существует слабое фундаментальное решение Γ, причём функция $\Gamma(x,\xi,t)/p(\xi)$ является непрерывной по совокупности аргументов при $t>0$ [7].

Для уравнения (1) с коэффициентом p_i, $i=1,2$, через Γ_i обозначим его слабое фундаментальное решение.

Через δ (возможно, с индексами) будем обозначать различные функции, положительные и невозрастающие на $[0,\infty)$, такие, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t)=0$. Будем говорить, что функция f *стабилизируется к числу* A *со скоростью не меньшей чем* $\delta(t)$, если $|f(t)-A|\leqslant\delta(t)$ для всех $t\geqslant t_0>0$.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов p_1 и p_2 выполнены условие (2) и для некоторого $x\in\mathbb{R}$ оценка*

$$\left|\frac{1}{R}\int\limits_x^{x+R}(p_1(y)-p_2(y))\,dx\right|\leqslant\delta(|R|),\quad R\neq0. \tag{5}$$

Тогда для $n\geqslant0$ и $\xi\in\mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to+\infty}t^{n+1/2}(\partial_t^n\Gamma_1(x,\xi,t)/p_1(\xi)-\partial_t^n\Gamma_2(x,\xi,t)/p_2(\xi))=0.$$

Если для каждого компакта $Q\subset\mathbb{R}$ существует функция δ_Q, для которой условие (5) справедливо при всех $x\in Q$, то сходимость равномерна по (x,ξ) на компактах $K\subset\mathbb{R}^2$.

Установим предварительно несколько утверждений о стабилизации функций одного переменного.

Лемма 1. *Пусть функция $f\in C^2(0,\infty)$ удовлетворяет оценке $|f''(t)|\leqslant Mt^{-2}$ и выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=A\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty}tf'(t)=0.$$

Если $f(t)$ стабилизируется к A со скоростью не меньшей чем $\delta(t)$, то найдётся функция δ_1, определяемая лишь числом M и функцией δ, такая, что $tf'(t)$ стабилизируется к нулю со скоростью не меньшей чем $\delta_1(t)$.

Доказательство. Для $\varepsilon>0$ имеем

$$f(t+\varepsilon t)=f(t)+\varepsilon tf'(t)+\frac{\varepsilon^2t^2f''(t_1)}{2},\quad t_1\in(t,t+\varepsilon t),$$

$$|tf'(t)|\leqslant\varepsilon^{-1}|f(t+\varepsilon t)-f(t)|+\frac{\varepsilon}{2}|t^2f''(t_1)|,$$

$$|tf'(t)|\leqslant2\varepsilon^{-1}\delta(t)+\frac{\varepsilon M}{2}.$$

Минимизируя по $\varepsilon > 0$ правую часть последнего неравенства, получаем $|tf'(t)| \leqslant 2\sqrt{M\delta(t)}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция f для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ удовлетворяет оценкам $|f^{(k)}(t)| \leqslant \leqslant C_k t^{\alpha-k}$, $t > 0$, $k \geqslant 1$, и, кроме того, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-\alpha} f(t) = A$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = (\alpha)_n A, \tag{6}$$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ – убывающий факториал. Если функция $t^{-\alpha}f(t)$ стабилизируется к A со скоростью не меньшей чем $\delta(t)$, то для каждого n найдётся функция δ_n, определяемая лишь числами n, C_k, $k = 1,\dots,n+2$, и функцией δ, такая, что скорость стабилизации в (6) не меньше чем $\delta_n(t)$.

Доказательство проведём индукцией по n. Пусть утверждение верно для некоторого $n \geqslant 0$. Тогда функция $g(t) = t^{n-\alpha} f^{(n)}(t)$ удовлетворяет оценке $|g''(t)| \leqslant Mt^{-2}$, где M зависит лишь от n, C_k, $k = 1,\dots,n+2$, и $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = (\alpha)_n A$. По лемме 1 имеем

$$\lim_{t\to+\infty} tg'(t) = \lim_{t\to+\infty} ((n-\alpha)t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) + t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t)) = 0$$

и $|tg'(t)| \leqslant \delta_n^*(t)$, откуда следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t) = (\alpha-n) \lim_{t\to+\infty} t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = (\alpha-n)(\alpha)_n A = (\alpha)_{n+1} A,$$

причём

$$|t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t) - (\alpha)_{n+1} A| \leqslant |tg'(t)| + |n-\alpha||t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) - (\alpha)_n A| \leqslant$$
$$\leqslant \delta_n^*(t) + |n-\alpha|\delta_n(\tau) = \delta_{n+1}(t).$$

Лемма доказана.

Обозначим через $I_t^{1/2}$ оператор дробного интегрирования порядка $1/2$, т.е.

$$I_t^{1/2} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} f(\tau)\,d\tau.$$

Лемма 3. *Пусть $f \in L_\infty(0,\infty)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t) = 0.$$

Если $|f(t)| \leqslant \delta(t)$, то найдётся функция δ_1, определяемая лишь $\|f\|_{L_\infty(0,\infty)}$ и функцией δ, такая, что $t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t)$ стабилизируется со скоростью не меньшей чем $\delta_1(t)$.

Доказательство. Для $t \geqslant 4$ имеем

$$|\sqrt{\pi} t^{-1/2} I_t^{1/2} f(t)| = \left| t^{-1/2} \left(\int\limits_0^{t^{1/2}} + \int\limits_{t^{1/2}}^t \right) (t-\tau)^{-1/2} f(\tau)\,d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_{L_\infty(0,\infty)}}{(t-t^{1/2})^{1/2}} + t^{-1/2}\delta(t^{1/2}) \int\limits_{t^{1/2}}^t (t-\tau)^{-1/2}\,d\tau \leqslant \sqrt{2}\|f\|_{L_\infty(0,\infty)} t^{-1/2} + 2\delta(t^{1/2}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть функция* $f \in C^1(0,\infty)$ *удовлетворяет неравенствам* $|f^{(k)}(t)| \leqslant Ct^{-1/2-k}$, $k=0,1$, *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1/2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{1/2}f(t)=0$. *Если* $t^{-1/2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ *стабилизируется со скоростью не меньшей чем* $\delta(t)$, *то найдётся функция* δ_1, *определяемая лишь числом* C *и функцией* δ, *такая, что* $t^{1/2}f(t)$ *стабилизируется к нулю со скоростью не меньшей чем* $\delta_1(t)$.

Доказательство. Положим $g(t)=t^{-1/2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$. Тогда $|g(t)|\leqslant 2C$,

$$|g'(t)| = \left|-\frac{1}{2}t^{-1}g(t)+t^{-1/2}f(t)\right| \leqslant C_1t^{-1},$$

$$|g''(t)| = \left|\frac{3}{4}t^{-2}g(t)-t^{-3/2}f(t)+t^{-1/2}f'(t)\right| \leqslant C_2t^{-2}.$$

Согласно лемме 1 получаем

$$\lim_{t\to+\infty} tg'(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}g(t)+t^{1/2}f(t)\right)=0,$$

откуда

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1/2}f(t) = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} g(t)=0$$

и

$$|t^{1/2}f(t)| \leqslant \frac{1}{2}|g(t)|+t|g'(t)| \leqslant \frac{1}{2}\delta(t)+\delta^*(t)=\delta_1(t).$$

Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть сначала коэффициенты p_i имеют на $\mathbb{R}$ ограниченные производные любого порядка. Без ограничения общности положим $x=0$ и обозначим

$$V(\xi,t)=\Gamma_1(0,\xi,t)/p_1(\xi)-\Gamma_2(0,\xi,t)/p_2(\xi).$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} I_t^{1/2}V(1,t)=0. \tag{7}$$

Для этого воспользуемся тауберовой леммой из работы [2], утверждающей, что если функция $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам

$$|g^{(k)}(t)|\leqslant Ct^{-k}, \quad k\leqslant 2, \tag{8}$$

и для её преобразования Лапласа

$$\tilde g(t)=\mathcal{L}[g](t)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}g(t)\,dt$$

имеет место оценка

$$|\lambda\tilde g(\lambda)|\leqslant \delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re}\lambda>0, \quad |\lambda|<1, \tag{9}$$

то $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$ и $|g(t)|\leqslant\delta_2(t)$, где функция δ_2 зависит лишь от C и δ_1. Таким образом, для доказательства соотношения (7) достаточно для функции $g(t)=I_t^{1/2}V(1,t)$ установить оценки (8) и (9)

Докажем (8). С учётом равенств $\partial_t^kV(1,0)=0$, $k\geqslant 0$, имеем

$$\sqrt{\pi}\partial_t^k I_t^{1/2}V(1,t)=\sqrt{\pi}I_t^{1/2}\partial_t^kV(1,t)=\left[\int\limits_0^{t/2}+\int\limits_{t/2}^{t}\right](t-\tau)^{-1/2}\partial_\tau^kV(1,\tau)\,d\tau = J_1^k+J_2^k,$$

$$|J_1^0| \leqslant C \int\limits_0^{t/2} (t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2}\,d\tau = C_1,$$

$$|J_1^1| = \left| \int\limits_0^{t/2} (t-\tau)^{-1/2}\partial_\tau V(1,\tau)\,d\tau \right| = \left| (t/2)^{-1/2}V(1,t/2) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{t/2}(t-\tau)^{-3/2}V(1,\tau)\,d\tau \right| \leqslant C_2 t^{-1},$$

$$|J_1^2| = \left| (t/2)^{-1/2}\partial_t V(1,t/2) - \frac{1}{2}(t/2)^{-3/2}V(1,t/2) + \frac{3}{4}\int\limits_0^{t/2}(t-\tau)^{-5/2}V(1,\tau)\,d\tau \right| \leqslant C_3 t^{-2},$$

$$|J_2^k| \leqslant C \int\limits_{t/2}^{t} (t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2-k}\,d\tau = C_k' t^{-k}, \quad k \leqslant 2.$$

Докажем (9). Обозначим

$$G_i(x,\xi,\lambda) = \mathcal{L}[\Gamma_i(x,\xi,\cdot)/p_i(\xi)](\lambda), \quad i = 1,2,$$

$$\tilde{V}(\xi,\lambda) = \mathcal{L}[V(\xi,\cdot)](\lambda) = G_1(0,\xi,\lambda) - G_2(0,\xi,\lambda),$$

и для функций $u_{0i} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$U_i(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_i(0,y,\lambda)p_i(y)u_{i0}(y)\,dy, \quad i = 1,2.$$

Справедливо представление [2]

$$U_1(\lambda) - U_2(\lambda) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(0,y,\lambda)(p_1(y) - p_2(y)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(y,\xi,\lambda)p_2(\xi)u_{20}(\xi)\,d\xi\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(0,\xi,\lambda)(p_1(y)u_{10}(y) - p_2(y)u_{20}(y))\,dy.$$

Через $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\omega(\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$, обозначим дельтообразное семейство функций, в котором неотрицательная функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\,dx = 1$. Зафиксируем $\xi \in \mathbb{R}$ и положим $u_{i0}^\varepsilon(x) = \omega_\varepsilon(x-\xi)/p_i(x)$. Устремляя в предыдущем представлении ε к нулю, получаем

$$\tilde{V}(\xi,\lambda) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(0,y,\lambda)(p_1(y) - p_2(y))G_2(y,\xi,\lambda)\,dy = \lambda\Phi(\xi,\lambda).$$

Для функции Φ при $\xi \neq 0$ справедлива оценка [2]

$$|\Phi(\xi,\lambda)| \leqslant \lambda^{-3/2}\delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad |\xi| < 2|\lambda|^{-1},$$

где функция δ_1 зависит только от μ и δ. Так как $\tilde{g}(\lambda) = \mathcal{L}[I_t^{1/2}V(1,\cdot)](\lambda) = \lambda^{-1/2}\tilde{V}(1,\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ [8, гл. 2, § 7.2], то

$$|\lambda\tilde{g}(\lambda)| = |\lambda^{3/2}\Phi(1,\lambda)| \leqslant \delta_1(|\lambda|^{-1}), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad |\lambda| \leqslant 1,$$

что завершает доказательство оценки (9) и вместе с ней и соотношения (7).

По лемме 3 для функции $g(t) = I_t^{1/2} V(1,t)$ с учётом оценки (8) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1/2} I_t^{1/2} g(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{-1/2} \int\limits_0^t V(1,\tau)\,d\tau = 0.$$

Применяя последовательно леммы 4 и 2 при $\alpha = 0$, будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1/2} V(1,t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n V(1,t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

причём для каждого n скорость стабилизации не превышает некоторой функции δ_n, зависящей лишь от μ, n и δ.

Используя оценки (4), для произвольного $\xi \in \mathbb{R}$ приходим к неравенству

$$|t^{n+1/2}\partial_t^n V(\xi,t)| \leqslant |t^{n+1/2}(\partial_t^n V(\xi,t) - \partial_t^n V(1,t))| + |t^{n+1/2}\partial_t^n V(1,t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_n|\xi - 1|t^{-1/2} + \delta_n(t) \leqslant C_n(|\xi| + 1)t^{-1/2} + \delta_n(t) \equiv \delta_n^*(t). \qquad (10)$$

Если рассматривать стабилизацию для произвольного x, то в выражении для δ_n^* вместо $|\xi|$ появится $|x-\xi|$. Отсюда вытекает последнее утверждение теоремы о равномерной сходимости по (x,ξ) на компактах.

Наконец, если $p_i \in L_\infty(\mathbb{R})$, то сглаженные коэффициенты $p_i^{(m)} = p_i * \omega_{1/m}$, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условию равномерной параболичности (2) с той же постоянной μ. Для соответствующих фундаментальных решений $\Gamma_i^{(m)}$ производные $\partial_t^n \Gamma_i^{(m)}(x,\xi,t)/p_i^{(m)}(\xi)$ сходятся при $m \to \infty$ к $\partial_t^n \Gamma_i(x,\xi,t)/p_i(\xi)$ равномерно на компактах $Q \subset \mathbb{R}^3$ ([7, гл. 5, § 3, доказательство свойства 10]). Поэтому для слабых фундаментальных решений также справедливо неравенство (10). Теорема доказана.

2. Асимптотика фундаментальных решений. Установим асимптотику фундаментального решения при условии, что коэффициент p имеет слабый предел на бесконечности.

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда для* $n \geqslant 0$ *и всех* $x, \xi \in \mathbb{R}$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n+1/2} \partial_t^n \Gamma(x,\xi,t)/p(\xi) = \frac{1}{(a_1 + a_2)\Gamma(1/2 - n)}, \qquad (11)$$

причём сходимость равномерная по (x,ξ) *на компактах* $K \subset \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Пусть $Z(x,t;c) = (4\pi ct)^{-1/2} e^{-x^2/4ct}$, $c > 0$, – фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t u - c\partial_x^2 u = 0$. Положим

$$p_0(x) = \begin{cases} a_1^2, & x > 0, \\ a_2^2, & x < 0, \end{cases}$$

и обозначим через $\Gamma_0(x,\xi,t)$ фундаментальное решение оператора $L_0 u \equiv p_0(x)\partial_t u - \partial_x^2 u$. Оно имеет вид

$$\Gamma_0(x,\xi,t) = \left[Z(x-\xi,t,a_1^{-2}) + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} Z(x+\xi,t,a_1^{-2})\right]\theta(x)\theta(\xi) +$$

$$+ \left[Z(x-\xi,t,a_2^{-2}) + \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2} Z(x+\xi,t,a_2^{-2})\right]\theta(-x)\theta(-\xi) +$$

$$+ \frac{2a_2^2}{a_1(a_1 + a_2)} Z(x - a_2\xi/a_1, t, a_1^{-2})\theta(x)\theta(-\xi) + \frac{2a_1^2}{a_2(a_1 + a_2)} Z(x - a_1\xi/a_2, t, a_2^{-2})\theta(-x)\theta(\xi),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Это равенство получено с помощью преобразования Лапласа и решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Непосредственно проверяется, что функция Γ_0 является слабым фундаментальным решением для оператора L_0 в смысле работы [7]. Кроме того, доопределив по непрерывности $\Gamma_0(x,\xi,t)/p_0(\xi)$ при $x=0$ и $\xi=0$, получим непрерывную в $\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$ функцию, причём

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1/2}\Gamma_0(x,\xi,t)/p_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)}$$

равномерно по (x,ξ) на компактах.

Для $d>0$ функция

$$\delta_d(R)=\sup_{\substack{-d\leqslant x\leqslant d\\ |T|>R}}\left|\frac{1}{T}\int\limits_x^{x+T}(p(y)-p_0(y))\,dy\right|$$

является невозрастающей, стремится к нулю при $R\to\infty$ и не превосходит некоторой функции $\tilde\delta$, зависящей только от μ, d и δ [1].

По теореме 1 имеем

$$\lim_{t\to+\infty} t^{1/2}\Gamma(x,\xi,t)/p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)}$$

и сходимость равномерная на компактах. Из леммы 2 при $\alpha=-1/2$ теперь следует, что выполнено соотношение (11) при $n\geqslant 1$, так как $(-1/2)_n/\sqrt{\pi}=1/\Gamma(1/2-n)$. Теорема доказана.

Поскольку $(t^{-1/2})^{(n)}=\sqrt{\pi}/(\Gamma(1/2-n)t^{n+1/2})$, из предыдущей теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление*

$$\Gamma(x,\xi,t)/p(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)t^{1/2}}+H(x,\xi,t),$$

где

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n+1/2}\partial_t^n H(x,\xi,t)=0,\quad n\geqslant 0,$$

равномерно по (x,ξ) на компактах.

Следствие 2. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление*

$$\Gamma(x,\xi,t)/p(\xi)=\frac{g(x,\xi,t)}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)t^{1/2}},$$

где

$$\lim_{t\to+\infty} g(x,\xi,t)=1\quad \text{и}\quad \lim_{t\to+\infty} t^n\partial_t^n g(x,\xi,t)=0,\quad n\in\mathbb{N},$$

равномерно по (x,ξ) на компактах.

Доказательство. Положим $f(t)=t^{1/2}\Gamma(x,\xi,t)/p(\xi)$. Из оценки (4) вытекает, что $|f^{(n)}(t)|\leqslant C_nt^{-n}$, $n\geqslant 0$, и по теореме 2 – что $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=(\sqrt{\pi}(a_1+a_2))^{-1}$. Применяя лемму 2 при $\alpha=0$, получаем $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n\partial_t^n f(t)=0$. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь уравнение дивергентного вида

$$\partial_t u-\partial_x(p(x)\partial_x u)=0 \tag{12}$$

и обозначим его фундаментальное решение через $\tilde\Gamma(x,\xi,t)$.

Теорема 3. *Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда для $n\geqslant 0$ и всех $x,\xi\in\mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n+1/2}\partial_t^n\tilde\Gamma(x,\xi,t)=\frac{1}{(a_1+a_2)\Gamma(1/2-n)},$$

причём сходимость равномерная по (x,ξ) на компактах $K\subset\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Для гладкого коэффициента p заменой $x \mapsto q(x) = \int_0^x dy/p(y)$ уравнение (12) сводится к уравнению недивергентного вида (1) с коэффициентом $p_1(x) = p(q^{-1}(x))$, где q^{-1} – обратная к q функция. Обозначим его фундаментальное решение через $\Gamma(x,\xi,t)$. Справедливо равенство [2]

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi,t) = \Gamma(q(x), q(\xi), t)/p_1(q(\xi)). \tag{13}$$

Для коэффициента $p \in L_\infty(\mathbb{R})$ рассмотрим его приближение гладкими функциями $p_\varepsilon = p * \omega_\varepsilon$. Учитывая равномерную сходимость фундаментальных решений к соответствующим слабым фундаментальным решениям при $\varepsilon \to 0+$ на компактах $Q \subset \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ [7], заключаем, что равенство (13) справедливо и для слабых фундаментальных решений. Требуемое утверждение вытекает теперь из теоремы 2. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление*

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)t^{1/2}} + H(x,\xi,t),$$

где

$$\lim_{t\to+\infty} t^{n+1/2}\partial_t^n H(x,\xi,t) = 0, \quad n \geqslant 0,$$

равномерно по (x,ξ) на компактах.

Следствие 4. *Пусть для уравнения (12) выполнены условия (2) и (3). Тогда имеет место представление*

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi,t) = \frac{g(x,\xi,t)}{\sqrt{\pi}(a_1+a_2)t^{1/2}},$$

где

$$\lim_{t\to+\infty} g(x,\xi,t) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} t^n\partial_t^n g(x,\xi,t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно по (x,ξ) на компактах.

Уже пример фундаментального решения $Z(x,t;c)$ уравнения теплопроводности показывает, что в утверждениях этого пункта нельзя заменить равномерную сходимость на компактах на равномерную сходимость во всей плоскости.

3. Скорость стабилизации производных решения задачи Коши. Отметим ещё стабилизацию функций $t^n\partial_t^n u$, $n \geqslant 1$, для ограниченного решения u задачи Коши

$$Lu = 0, \quad u|_{t=0} = \psi \in L_\infty(\mathbb{R}), \tag{14}$$

если имеется стабилизация самого решения. Существование у коэффициента p предельных средних (3) при этом не предполагается.

Теорема 4. *Пусть для уравнения (1) выполнено условие (2), а функция u является ограниченным в $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ решением задачи (14). Если*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x_0,t) = 0$$

для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{t\to+\infty} t^n\partial_t^n u(x,t) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \geqslant 1$, где сходимость равномерная на компактах $K \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Так как решение задачи Коши (14) единственно в классе ограниченных функций [7], то оно представляется в виде потенциала Пуассона:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t)\psi(y)\,dy.$$

Используя оценку (4) для фундаментального решения, получаем

$$|\partial_t^n u(x,t)| \leqslant \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\partial_t^n \Gamma(x,y,t)|\,dy \leqslant C_n \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} t^{-n}, \quad n \geqslant 0.$$

Утверждение теоремы для точки x_0 следует теперь из леммы 2 при $\alpha = 0$:

$$|\partial_t^n u(x_0,t)| \leqslant \delta_n(t).$$

Для произвольного x имеем

$$|\partial_x \partial_t^n u(x,t)| \leqslant \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\partial_x \partial_t^n \Gamma(x,y,t)|\,dy \leqslant C_n' \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} t^{-n-1/2}$$

и

$$t^n |\partial_t^n u(x,t)| \leqslant t^n(|\partial_t^n u(x,t) - \partial_t^n u(x_0,t)| + |\partial_t^n u(x_0,t)|) \leqslant C_n' |x-x_0| t^{-1/2} \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \delta_n(t).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с одной пространственной переменной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 181–202.
2. *Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д.* Асимптотическое поведение классических и обобщенных решений одномерных параболических уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1978. Т. 36. С. 85–130.
3. *Жиков В.В.* О стабилизации решений параболических уравнений // Мат. сб. 1977. Т. 104 (146). № 4 (12). С. 597–616.
4. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 4 (364). С. 145–212.
5. *Nach J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. № 4. P. 931–954.
6. *Aronson D.G.* Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 890–896.
7. *Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д.* Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. Вып. 3 (237). С. 107–156.
8. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Рязанский государственный университет
им. С.А. Есенина

Поступила в редакцию 14.06.2020 г.
После доработки 14.06.2020 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.