ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 498–508

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.4+517.988.6

РАЗРУШЕНИЕ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИКЕ, ЗАДАННОЙ УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

© 2022 г. **В. Ж. Сакбаев, А. Д. Ширяева**

Исследованы особенности динамики квантовых состояний, порождаемой фокусирующим нелинейным уравнением Шрёдингера. Установлены взаимосвязи между явлениями самофокусировки, неограниченным возрастанием градиента решения и перехода квантового состояния из чистого в смешанное. Показано, что продолжение динамики чистого квантового состояния через момент градиентного взрыва может быть реализовано с помощью частичного следа нелинейной динамики чистого состояния в расширенном гильбертовом пространстве.

DOI: 10.31857/S0374064122040069, EDN: BZUVZR

Введение. В настоящей работе исследуется эволюция множества квантовых состояний, порождаемая нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ) со степенной зависимостью потенциала от плотности вероятности состояния в координатном пространстве

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{\Delta}u(t) + \mathbf{V}(u(t))u(t), \quad t \in (0,T); \quad T \in (0,+\infty]; \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2(G). \tag{2}$$

Здесь в качестве координатного пространства G могут выступать либо пространство $\mathbb{R}^d$, либо ограниченная звёздная область d-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ с гладкой (задаваемой локально графиками бесконечно дифференцируемых функций) границей ∂G, либо d-мерный тор $\mathbb{T}^d$ $(d \in \mathbb{N})$. Пусть $\mathbf{V}(u) \equiv |u|^p$, $p \geqslant 0$. В уравнении (1) $\mathbf{\Delta}$ – оператор Лапласа $D(\mathbf{\Delta}) \to H$, областью определения которого является пространство $D(\mathbf{\Delta})$, состоящее из функций пространства Соболева $W_2^2(G)$, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Так, если $G = \mathbb{R}^d$, то $D(\mathbf{\Delta}) = W_2^2(G)$; если G – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, то $D(\mathbf{\Delta}) = \{u \in W_2^2(G) : u|_{\partial G} = 0\} \equiv \dot{W}_2^2(G)$; если $G = \mathbb{T}^d$, то $D(\mathbf{\Delta}) \subset W_2^2(G)$ в том смысле, что сужение функции из $D(\mathbf{\Delta})$ на любую локальную карту B многообразия $\mathbb{T}^d$ принадлежит пространству $W_2^2(B)$.

В работах [1–8] показано, что для малых показателей нелинейности $p \in [0, 4/d)$ задача Коши (1), (2) порождает непрерывную группу $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, нелинейных преобразований $u_0 \mapsto u(t,u_0)$, $t \in \mathbb{R}$, пространства начальных данных $H^1 = D(\sqrt{-\mathbf{\Delta}})$, которые сохраняют H-норму решения и значение функционала энергии

$$E(u) = \int\limits_G \left(-\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}\right) dx$$

на векторах $u(t,u_0) = \mathbf{U}(t)u_0$, $t \in \mathbb{R}$. Если же $p \geqslant 4/d$, то существуют такие начальные данные (2), при которых решение задачи Коши допускает явление самофокусировки за конечное время, сопровождающееся явлением градиентного взрыва решения.

Нелинейное уравнение Шрёдингера интенсивно изучалось в связи с математическим описанием явления самофокусировки волн в нелинейной оптической среде (см. [1]). Нелинейное уравнение Шрёдингера изучалось в d-мерном евклидовом пространстве и его областях, исследовались различные виды нелинейной зависимости потенциала взаимодействия от неизвестной волновой функции (см. [2, 5, 9–12]).

Как показано в работах [2, 5, 9, 10], задача Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера со степенной зависимостью нелинейного потенциала от неизвестной функции может иметь только либо единственное глобальное решение, либо локальное решение, допускающее разрушение при приближении к границе промежутка существования решения. В первом случае задача Коши определяет однопараметрическую группу преобразований пространства начальных условий, во втором случае длина промежутка существования может принимать любое положительное значение в зависимости от выбора начального условия (см. [5, 8–10]).

В работе [8] исследована связь явления разрушения решения с явлением самофокусировки [13] и явлением перехода из чистого состояния квантовой системы в смешанное состояние в случае задачи с одномерным координатным пространством. В настоящей статье изучаются обобщения этих результатов на случай многомерного координатного пространства.

В связи с возможностью разрушения чистого состояния становится естественной постановка вопроса о динамике, порождаемой нелинейным уравнением Шрёдингера в множестве смешанных квантовых состояний. Динамику смешанных квантовых состояний описывает соответствующее нелинейному уравнению Шрёдингера уравнение Лиувилля–фон Неймана (см. [14, 15]), для которого получены как условия глобального существования единственного решения задачи Коши, так и условия разрушения решения этой задачи.

Для задачи Коши, допускающей явление разрушения решения, в работах [7, 16] предложена процедура регуляризации, позволяющая аппроксимировать её направленным семейством задач Коши. *Регуляризацией* задачи Коши называется такое топологическое пространство начально-краевых задач, в котором исследуемая задача Коши представляет собой предельную точку (см. [16]). Для изучения задачи Коши (1), (2) в качестве регуляризации рассматривается однопараметрическое семейство задач Коши для нелинейных уравнений Шрёдингера, в каждой из которых функционал энергии является полуограниченным (что обеспечивает глобальную разрешимость регуляризованной задачи Коши в соответствующем энергетическому функционалу пространстве). При этом направленное семейство гамильтоновых векторных полей регуляризованных задач Коши сходится к гамильтонову векторному полю исследуемой задачи Коши на всюду плотной общей области определения этих полей. В работах [7, 8] исследована регуляризация функционала энергии исходного уравнения Шрёдингера (1) направленным семейством полуограниченных снизу функционалов энергии

$$E_\epsilon(u) = \int\limits_G \left(\frac{\epsilon}{2}|\Delta u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}\right) dx, \quad \epsilon \in (0,1), \quad \epsilon \to +0.$$

В [7, 8] установлено, что направленное семейство решений задач Коши для регуляризованных уравнений Шрёдингера сходится к решению задачи Коши (1), (2) на всём промежутке существования решения последней. На промежутках, содержащих граничные точки промежутка существования решения задачи (1), (2), установлена расходимость последовательности регуляризованных решений; за пределами промежутка существования решения задачи Коши (1), (2) направленное семейство решений задач Коши для уравнения Шрёдингера с регуляризованным оператором имеет предельное множество в пространстве $(B(H))^*$ квантовых состояний, снабжённом *-слабой топологией. Наделение множества регуляризованных задач структурой измеримого пространства позволяет определить однопараметрическое семейство мер на множестве векторных квантовых состояний и, тем самым, однопараметрическое семейство смешанных квантовых состояний.

Структура настоящей работы следующая. В п. 1 приведены результаты о разрешимости задачи Коши (1), (2), о её регуляризации и поведении последовательности решений регуляризованных задач. В п. 2 установлены взаимосвязи между явлением разрушения квантового состояния с явлением градиентного взрыва задачи Коши и с явлением самофокусировки. В п. 3 регуляризация задачи Коши (1), (2) представлена как нелинейная динамика чистых состояний в расширенном гильбертовом пространстве.

1. Задача Коши и её регуляризации.

1.1. Разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера. Приведём известные результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения Шрёдингера (см. [4, 7]). Пусть выполнены приведённые во введении после условия (2) предположения относительно координатного пространства G, нелинейного потенциала $\mathbf{V}$ и оператора $\boldsymbol{\Delta}$. Обозначим через H^k область определения неотрицательного оператора $(\sqrt{-\boldsymbol{\Delta}})^k$ при $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1. H^1-*решением* задачи Коши (1), (2) на промежутке $[0, T)$ при некотором $T \in (0, +\infty]$ называется функция $u \in C([0, T), H^1)$, удовлетворяющая равенству

$$u(t) = e^{-it\boldsymbol{\Delta}} u_0 - i \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\boldsymbol{\Delta}} \mathbf{V}(u(s)) u(s)\, ds, \quad t \in [0, T).$$

Теорема 1. *Для каждого $\rho > 0$ существует $T > 0$ такое, что если $u_0 \in H^1$, $\|u_0\| \leqslant \rho$, то задача Коши имеет единственное решение $u(\,\cdot\,, u_0)$ на отрезке $[-T, T]$. При этом $\|u(t, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$, $E(u(t, u_0)) = E(u_0)$ для всех $t \in [-T, T]$.*

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant p < 4/d$. Тогда для каждого $u_0 \in H^1$ существует единственное решение задачи Коши (1), (2) на промежутке $[0, +\infty)$, причём значения этого решения ограничены в пространстве H^1.*

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 4/d$. Тогда если $u_0 \in H^3$ и $E(u_0) < 0$, то существует число $T_1(u_0) > 0$ такое, что на промежутке $[0, T_1)$ задачи Коши (1), (2) имеет единственное H^1-решение и при этом $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$.*

Случай $G = \mathbb{R}^d$ исследован в большом числе публикаций, теоремы 1–3 для него изложены в монографии [17]. Для случая $G = \mathbb{T}^d$ результаты этих теорем установлены в работах [4, 6, 15]. В случае, когда G – ограниченная звёздная относительно некоторой точки область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, теоремы 1–3 установлены в работах [7, 8].

1.2. Регуляризация задачи Коши. Неограниченность в пространстве H^1 поверхностей уровня функционала энергии $E(u)$, $u \in H^1$, служит причиной наличия градиентных взрывов решений при сверхкритических значениях параметра нелинейности p. Поэтому в качестве аппроксимации НУШ (1) рассмотрим однопараметрическое семейство нелинейных уравнений Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} u = \mathbf{L}_\epsilon u \equiv \boldsymbol{\Delta} u + |u|^p u + \epsilon \boldsymbol{\Delta}^2 u, \quad t > 0, \quad \epsilon \in (0, 1), \tag{3}$$

где $\epsilon \in (0, 1)$ – параметр регуляризации. Регуляризованный энергетический функционал при каждом значении параметра $\epsilon \in (0, 1)$ имеет вид

$$E_\epsilon(u) = \int\limits_G \left[\frac{1}{p+2} |u|^{p+2} - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\epsilon}{2} |\boldsymbol{\Delta} u|^2 \right] dx, \quad u \in H^2.$$

Тогда при каждом $\epsilon \in (0, 1)$ поверхности уровня функционала энергии ограничены в энергетическом пространстве H^2 и компактны в пространстве H^1. Задача Коши (2), (3) имеет единственное решение при каждом $u_0 \in H^2$ (см. [7, 8]).

Можно рассмотреть и другие способы регуляризации задачи Коши (1), (2). Так, в работах [9, 15] регуляризация задаётся направленным семейством задач Коши вида (1), (2), в которых степенной нелинейный потенциал заменяется на направленное семейство ограниченных нелинейных потенциалов $V_n(u) = \min(|u|^p, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$, в [9] или

$$V_\epsilon(|u|) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 |u|^{2p+4}} |u|^{p+2}, \quad \epsilon \in (0, 1), \quad \epsilon \to +0,$$

в [15]. Благодаря полуограниченности функционала энергии и сохранению на значениях решения в каждой точке его интервала существования значения функционала энергии, оказывается возможным установить равномерную по интервалу существования решения ограниченность соболевской нормы значений решения и компактность множества значений решения в пространстве Лебега.

Дальнейшее исследование поведения направленного семейства решений регуляризованных задач проводится по схеме, не зависящей от выбора регуляризации.

В работах [7, 8, 15] установлено, что если задача Коши (1), (2) имеет H^1-решение на промежутке $[0,T)$, то оно служит пределом последовательности решений регуляризованных задач в пространстве $C([0,T),H)$. Если же задача Коши (1), (2) не имеет H^1-решения на промежутке $[0,T)$, то направленное семейство решений регуляризованных задач не имеет предела (не имеет предельных точек) в гильбертовом пространстве чистых векторных состояний, но имеет непустое множество предельных точек в симплексе квантовых состояний в локально выпуклом банаховом пространстве $(B(H))^*$ квантовых состояний. Эти предельные точки не являются чистыми состояниями квантовой системы в исходном гильбертовом пространстве.

1.3. Решения регуляризованных задач. Пусть $\epsilon \in (0,1)$ и $l \in \mathbb{N}$. Функция $u_\epsilon \in C([0,+\infty),H^l)$ называется H^l*-решением* задачи Коши (2), (3) на полуоси $[0,+\infty)$, если она удовлетворяет уравнению

$$u_\epsilon(t) = e^{-i(\mathbf{\Delta}+\epsilon\mathbf{\Delta}^2)t}u_0 + \int\limits_0^t e^{-i(\mathbf{\Delta}+\epsilon\mathbf{\Delta}^2)(t-s)}|u_\epsilon(s)|^p u_\epsilon(s)\,ds, \quad t\in[0,+\infty).$$

Теорема 4 [8]. *Пусть $\epsilon > 0$, $p \geqslant 0$. Тогда для каждого $u_0 \in H^2$ задача Коши (2), (3) на полуоси $[0,+\infty)$ имеет единственное H^2-решение $u_\epsilon(t,u_0)$. Кроме того,*

$$N(u(t,u_0)) = N(u_0), \quad E_\epsilon(u(t,u_0)) = E(u_0), \quad u_\epsilon(t,u_0) = \mathbf{V}_\epsilon(t)u_0 \quad \text{при} \quad t\geqslant 0, \quad u_0\in H^2.$$

Предельные точки последовательности решений регуляризованных задач и частичные следы чистых состояний в расширенном пространстве описывает

Теорема 5 [8, 15]. *Пусть $u_0 \in H^2$ и выполнены условия теоремы 4. Пусть $T_1 \in (0,+\infty)$ – супремум длин интервалов, на которых H^1-решение $u(t,u_0)$, $t\in[0,T)$, задачи Коши (1), (2) существует. Тогда при любом $T\in(0,T_1)$ направленное семейство $\{u_\epsilon(t,u_0):\ t>0\}$ решений задачи (2), (3) сходится к решению $u(t,u_0)$, $t\in[0,T_1)$, задачи Коши (1), (2) в следующем смысле:*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\|u_\epsilon(t,u_0)-u(t,u_0)\|_H = 0 \quad \text{для любого} \quad T\in[0,T_1).$$

Если $p=4$ $(p=4/d)$ и $T\geqslant T_1$, то для каждой бесконечно малой последовательности $\{\epsilon_k\}$ последовательность $\{u_{\epsilon_k}\}$ расходится в пространстве $C([0,T],H)$.

2. Явления градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения состояния.

2.1. Множество квантовых состояний. Множество $\Sigma(H) = S_1((B(H))^*)\bigcap(B(H))^*_+$ квантовых состояний представляет собой пересечение единичной сферы банахова пространства $(B(H))^*$ с конусом $(B(H))^*_+$ положительных элементов пространства $(B(H))^*$.

В множестве квантовых состояний выделяется множество $\Sigma_p(H)$ чистых векторных состояний. Чистое состояние ρ_u, задаваемое единичным вектором $u\in H$, определяется как линейный непрерывный функционал $\rho_u : B(H)\to\mathbb{C}$, $\langle\rho_u,\mathbf{A}\rangle = (u,\mathbf{A}u)_H$, $\mathbf{A}\in B(H)$.

Множество состояний, непрерывных относительно σ-слабой [18, п. 2.4.3] топологии на пространстве $B(H)$, называется *множеством нормальных состояний* $\Sigma_n(H)$. Согласно теореме Глизона [19] всякое нормальное состояние задаётся на алгебре $B(H)$ как операция взятия следа произведения элемента алгебры $B(H)$ и некоторого неотрицательного ядерного оператора с единичным следом $\rho=\sum_{k=1}^\infty p_k\rho_{u_k}$, где $\{u_k\}$ – ортонормированный базис.

Лемма 1 [20]. *Для состояния ρ условие $\rho\in\Sigma_p(H)$ выполняется, если и только если $\sup\limits_{u\in S_1(H)}\langle\rho,\mathbf{P}_u\rangle = 1$. Состояние ρ является нормальным, если и только если*

$$\sup_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_f(H)}\langle\rho,\mathbf{P}\rangle = 1.$$

Здесь $\mathcal{P}_f(H)$ – множество конечномерных ортогональных проекторов, действующих в пространстве H.

Для доказательства леммы 1 достаточно воспользоваться леммой 1 работы [20], рассмотрев последовательность величин $\alpha_n = \sup\limits_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_f(H):\dim\mathbf{P}=n} \langle\rho,\mathbf{P}\rangle,\ n\in\mathbb{N}$. Тогда состояние ρ является чистым векторным, если и только если $\alpha_1 = 1$. Оно является нормальным, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 1$, откуда и следует второе утверждение леммы 1.

Множество $\Sigma_p^k = \{\rho_u : u\in S_1(H)\bigcap H^k\},\ k\in\mathbb{N}$, называется *множеством чистых соболевских состояний.*

2.2. Градиентный взрыв, самофокусировка и разрушение состояния.

Определение 2. Решение $u(\cdot,u_0)$ задачи Коши (1), (2) допускает

1) явление *градиентного взрыва*, если существует число $T_1\in(0,+\infty)$, при котором имеет место соотношение $\lim\limits_{t\to T_1-0}\|u(t,u_0)\|_{H^1} = +\infty$;

2) явление *самофокусировки* в точке $x_1\in G$, если существует число $T_1\in(0,+\infty)$ такое, что $\lim\limits_{t\to T_1-0}(M_{|x-x_1|^2}u(t,u_0),u(t,u_0))_H = 0$, где $M_{|x-x_1|^2}$ – действующий в пространстве H оператор умножения на функцию $\|x-x_1\|^2_{R^d},\ x\in G$;

3) явление *разрушения чистого состояния*, если существует такое число $T_1\in(0,+\infty)$, что $\sup\limits_{\phi\in S_1(H)}[\varliminf\limits_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}_\phi\rangle] < \|u_0\|^2_H = 1$,

4) явление *разрушения нормального состояния*, если существует число $T_1\in(0,+\infty)$ такое, что выполняется неравенство $\sup\limits_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}(H)}[\varliminf\limits_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}\rangle] < 1$.

Лемма 2. *Условие 4) равносильно следующему условию: существуют число $T_1\in(0,+\infty)$ и последовательность $\{t_k\}$ такие, что $t_k\to T_1-0$ и последовательность векторов $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится слабо в пространстве H к элементу u_*, для которого $\|u_*\|_H < \|u_0\|_H$.*

Действительно, если последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится слабо к вектору $u_*\in H$ такому, что $\|u_*\|_H<\|u_0\|_H$, то $\sup\limits_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}(H)}[\lim\limits_{k\to\infty}\langle\rho_{u(t_k,u_0)},\mathbf{P}\rangle]\leqslant\|u_*\|^2_H<1$ и выполняется условие 4).

Пусть выполняется условие 4). Докажем, что тогда существует такая последовательность чисел $\{t_k\}$, что $t_k\to T_1-0$ и последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится слабо к элементу u_*, для которого $\|u_*\|_H<\|u_0\|_H$.

Допустим противное: для любой последовательности чисел $\{t_k\}$ такой, что $t_k\to T_1-0$ и последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится слабо к некоторому элементу u_*, выполняется условие $\|u_*\|_H\geqslant\|u_0\|_H$. Тогда поскольку $\|u(t,u_0)\|=\|u_0\|$ для любого $t\in[0,T_1)$, то $\|u_*\| = \|u_0\|$. Следовательно, любая сходящаяся слабо последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ будет сходящейся по норме пространства H. Значит, ограниченная условием $\|u(t_k,u_0)\|_H = \|u_0\|_H$ последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ будет компактной не только в слабой топологии пространства H, но и в топологии нормы. Таким образом, для любой последовательности чисел $\{t_k\}$ такой, что $t_k\to T_1-0$, последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ компактна в пространстве H. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}[\varliminf\limits_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}_n\rangle] = 1$, где $\{\mathbf{P}_n\}$ – последовательность операторов проектирования на линейную оболочку первых n векторов некоторого ОНБ. Тогда $\sup\limits_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}(H)}[\varliminf\limits_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}\rangle] = 1$, а это противоречит условию 4). Лемма доказана.

Лемма 3. *Условие 3) равносильно следующему условию: функция $u(t,u_0),\ t\in[0,T_1)$, не имеет в пространстве H предела при $t\to T_1-0$.*

Действительно, если функция $u(t,u_0),\ t\in[0,T_1)$, имеет в пространстве H предел u_1 при $t\to T_1-0$, то тогда

$$\sup_{\phi\in S_1(H)}[\varliminf_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}_\phi\rangle] = \varliminf_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}_{u_1}\rangle = \lim_{t\to T_1-0}|(u(t,u_0),u_1)|^2 = \|u_0\|^2_H = 1.$$

Обратно, если $\sup\limits_{\phi\in S_1(H)}[\varliminf\limits_{t\to T_1-0}\langle\rho_{u(t,u_0)},\mathbf{P}_\phi\rangle] = 1$, то множество значений непрерывной функции $u(t,u_0)$ при $t\in[0,T_1)$ компактно в пространстве H и существует предел $u_1 = \lim\limits_{t\to T_1-0}u(t,u_0)\in H$. Лемма доказана.

Следствие. *Если решение задачи Коши (1), (2) допускает явление разрушения нормального состояния при $t \to T_1 - 0$, то оно допускает и явление разрушения чистого состояния при $t \to T_1 - 0$. Если решение задачи Коши (1), (2) допускает явление разрушения чистого состояния при $t \to T_1 - 0$, но не допускает явление разрушения нормального состояния при $t \to T_1 - 0$, то это означает, что решение $u(t, u_0)$ при $t \to T_1 - 0$ имеет в пространстве H компактное множество частичных пределов, состоящее более чем из одной точки.*

2.3. Самофокусировка и разрушение чистого состояния. Установим связи между явлениями градиентного взрыва, самофокусировки и разрушения чистого состояния.

Теорема 6. *Пусть $u_0 \in H^3$ и H^1-решение $u(t, u_0)$, $t \in [0, T_1)$, задачи Коши (1), (2) определено на интервале $[0, T_1)$ для некоторого $T_1 \in (0, +\infty)$. Тогда справедливы следующие импликации:*

c) $\Rightarrow$ b);

b) $\Rightarrow$ a), если либо $G = \mathbb{R}^1$, либо G – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей;

a) $\Rightarrow$ b), если $p = 4/d$ и $pd < 2(p+2)$.

Здесь условия a), b) и c) следующие:

a) решение допускает градиентный взрыв при $t \to T_1 - 0$;

b) решение допускает разрушение нормального состояния при $t \to T_1 - 0$;

c) решение допускает явление самофокусировки при $t \to T_1 - 0$.

Доказательство.

c) $\Rightarrow$ *b)*. Докажем, что из равенства $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \int_G |x - x_0|^2 |u(t, x, u_0)|^2 \, dx = 0$ следует равенство

$$\lim_{t \to T_1 - 0} (u(t, u_0), \phi) = 0$$

для любого $\phi \in H$. Действительно, при любом $\delta > 0$ имеем

$$\lim_{t \to T_1 - 0} \int\limits_{G \setminus O_\delta(x_0)} |u(t, x, u_0)|^2 \, dx = 0.$$

Следовательно, при любом $\delta > 0$ и всех $\phi \in H$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to T_1 - 0} \int\limits_{G \setminus O_\delta(x_0)} \phi(x) u(t, x, u_0) \, dx = 0.$$

Так как $\|u(t, u_0)\|_H = \|u_0\|_H$ для любого $t \in [0, T_1)$, то последовательность $\{u(t_k, u_0)\}$ слабо компактна в пространстве H при произвольном выборе последовательности $\{t_k\}$ такой, что $t_k \to T_1 - 0$. Для произвольного частичного предела $u_* \in H$ последовательности $\{u(t_k, u_0)\}$ в слабой топологии пространства H и для каждого элемента $\phi \in H$ имеет место равенство $\lim\limits_{\delta \to +0} \int_{O_\delta(x_0)} \phi(x) u(t, x, u_0) \, dx = 0$. Поэтому слабый предел функции $u(t, u_0)$, $t \in [0, T_1)$, при $t \to T_1 - 0$ существует и равен нулю. Следовательно, $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \langle \rho_{u(t, u_0)}, \mathbf{P} \rangle = 0$ для любого конечномерного ортогонального проектора $\mathbf{P}$ и, значит, при $t \to T_1 - 0$ происходит разрушение нормального состояния.

b) $\Rightarrow$ *a)*. Пусть решение допускает разрушение нормального состояния при $t \to T_1 - 0$. Тогда, согласно лемме 2, существует последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k \to T_1 - 0$ и последовательность $\{u(t_k, u_0)\}$ сходится слабо в H к элементу $u_* \in H$, при этом $\|u_*\| < \|u_0\|$. Покажем, что тогда выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t, u_0)\|_{H^1} = +\infty$.

Действительно, пусть последовательность $\{u(t_k, u_0)\}$ сходится слабо в H к элементу $u_* \in$ $\in H$ и пусть $\|u_0\|^2 - \|u_*\|^2 = \sigma > 0$.

Предположим, что G – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Тогда оператор Лапласа $\mathbf{\Delta}$ имеет дискретный спектр (см. [21, теорема 8.4]). Пусть $\{e_k\}$ – собственный ОНБ в пространстве H.

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}(u(t_k,u_0),e_k)=(u_*,e_k)$ при каждом $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, для каждого $N\in\mathbb{N}$ существует $T_2\in(0,T_1)$ такое, что при любом $t\in(T_2,T_1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{N}|(u(t,u_0),e_k)_H|^2\leqslant\|u_*\|_H^2+\frac{\sigma^2}{2},$$

поэтому

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}|(u(t,u_0),e_k)_H|^2\geqslant\|u_0\|^2-\|u_*\|_H^2-\frac{\sigma^2}{2}=\frac{\sigma^2}{2}.$$

Значит, для любого $N\in\mathbb{N}$ существует $T_2\in(0,T_1)$ такое, что при любом $t\in(T_2,T_1)$ выполняется неравенство $\|u(t,u_0)\|_{W_2^1}\geqslant\sigma^2\lambda_N/2$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to T_1-0}\|u(t,u_0)\|_{H^1}=+\infty$.

Пусть $G=\mathbb{R}$. Докажем, что выполняется условие a). Предположим противное: существует такая последовательность $\{t_k\}$, что $t_k\to T_1-0$ и $\varliminf\limits_{k\to\infty}\|u(t_k,u_0)\|_{H_1}<\infty$. Тогда последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ ограничена в пространстве H^1 и в силу теоремы о компактности вложения пространства H^1 в пространство H (при $d=1$) компактна в пространстве H. Это противоречит разрушению нормального состояния в силу леммы 2.

$a)\Rightarrow b$). Пусть $p=4/d$ и $\lim\limits_{t\to T_1-0}\|u(t,u_0)\|_{H^1}=+\infty$. Докажем, что тогда ни для какой последовательности чисел $\{t_k\}$ такой, что $t_k\to T_1-0$, последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ не является сходящейся в пространстве H (и потому в силу леммы решение допускает явление разрушения нормального состояния). Для этого используем подход работы [9]. Предположим противное: существует последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k\to T_1-0$ и последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится в пространстве H. Согласно теореме 1 для каждого $k\in\mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t_k,u_0)\|_H^2=E(u_0)+\frac{1}{p+2}\|u(t_k,u_0)\|_{p+2}^{p+2}.$$

Согласно неравенству Гальярдо–Ниренберга (см. [22]), если $dp<2(p+2)$, то оценка

$$\|u(t,u_0)\|_{p+2}\leqslant C\|u(t,u_0)\|_2^{1-\alpha}\|u(t,u_0)\|_{H^1}^{\alpha},$$

где $\alpha=dp/(2(p+2))$, справедлива при всех $t\in[0,T_1)$ (здесь константа C не зависит от $u(t,u_0)$). Так как $p=4/d$, то $\alpha(p+2)=2$. Следовательно, для любых $m,n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\|u(t_n,u_0)\|_{p+2}^{p+2}\leqslant(\|u(t_m,u_0)\|_{p+2}+\|u(t_n,u_0)-u(t_m,u_0)\|_{p+2})^{p+2}\leqslant$$

$$\leqslant c_p(\|u(t_m,u_0)\|_{p+2}^{p+2}+\|u(t_n,u_0)-u(t_m,u_0)\|_{p+2}^{p+2})\leqslant$$

$$\leqslant c_p\|u(t_m,u_0)\|_{p+2}^{p+2}+c_pC\|u_m(t,u_0)-u_n(t,u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)}\|u_m(t,u_0)-u_n(t,u_0)\|_{H^1}^2.$$

Таким образом, получаем, что при всех $m,n\in\mathbb{N}$ и при $p=4/d$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t_n,u_0)\|_H^2\leqslant E(u_0)+\frac{1}{p+2}[c_p\|u(t_m,u_0)\|_{p+2}^{p+2}+2c_pC\|u_m(t,u_0)-u_n(t,u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)}\times$$

$$\times(\|\nabla u_m(t,u_0)\|_H^2+\|\nabla u_n(t,u_0)\|_H^2+\|u_m(t,u_0)\|_H^2+\|u_n(t,u_0)\|_H^2)].$$

По предположению последовательность $\{u(t_k,u_0)\}$ сходится в пространстве L_2. Так как $\alpha\in\in(0,1)$, то существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что для любых $n,m\geqslant N$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{p+2}c_pC\|u_m(t,u_0)-u_n(t,u_0)\|_2^{(p+2)(1-\alpha)}<\frac{1}{4}.$$

Значит, существует константа $B > 0$ такая, что для любого $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t_n,u_0)\|_H^2 \leqslant B + \frac{1}{4}\|\nabla u(t_n,u_0)\|_H^2.$$

Но это неравенство противоречит условию а) $\lim\limits_{t\to T_1-0}\|u(t,u_0)\|_{H^1} = +\infty$. Теорема доказана.

3. Продолжение динамики через момент разрушения состояния.

3.1. Динамика множества квантовых состояний. Обозначим через $\mathbf{T}$ группу преобразований множества соболевских состояний

$$\Sigma_p^k(H) = \{\rho_u : u \in H^k,\ \ \|u\|_H = 1\}, \tag{4}$$

порождаемую уравнением Шрёдингера.

Если $p \in [0, 4/d)$, то группа $\mathbf{T}$ действует на элемент $\rho_u \in \Sigma_p^1(H)$ согласно правилу

$$\mathbf{T}\rho_u = \rho_{u(t,u_0)}, \quad \rho_u \in \Sigma_p^1(H).$$

Динамика нормального смешанного состояния задаётся (см. [15]) уравнением Лиувилля–фон Неймана со следующей нелинейной зависимостью потенциала от состояния:

$$i\frac{d}{dt}\rho(t) = [\mathbf{\Delta} + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0; \tag{5}$$

$$\rho(+0) = \rho_0, \quad \rho_0 \in \Sigma(H), \tag{6}$$

$$\mathbf{f}(\rho(t))\phi(x) = (w_{\rho(t)}(x))^{p/2}\phi(x), \quad \phi \in H,$$

где $w_{\rho(t)}(x) = \sum_{k=1}^\infty p_k(t)|u_k(t,x)|^2$, $t \geqslant 0$, $x \in G$, если

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^\infty p_k(t)\rho_{u_k(t)}.$$

Регуляризованная динамика нормальных квантовых состояний может быть задана для соболевских состояний Σ_p^2 (см. (4)) с помощью регуляризованного нелинейного уравнения Лиувилля–фон Неймана (см. [14, 15])

$$i\frac{d}{dt}\rho(t) = [\epsilon\mathbf{\Delta}^2 + \mathbf{\Delta} + \mathbf{f}(\rho(t)), \rho(t)], \quad t > 0. \tag{7}$$

Если $p \geqslant 0$, $\epsilon > 0$, то группа $\mathbf{T}_\epsilon$ действует на произвольный элемент $\rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H)$ согласно правилу (здесь полугруппа преобразований $\mathbf{V}_\epsilon$ определена в теореме 4)

$$\mathbf{T}_\epsilon\rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}, \quad t \geqslant 0, \quad \rho_{u_0} \in \Sigma_p^2(H).$$

Исследуем сходимость и дадим описание множества предельных точек обобщённой последовательности $\rho_\epsilon(t,\rho_{u_0})$ при $\epsilon \to 0$ в слабой-* топологии пространства $(B(H))^*$. Пусть $\mathcal{A}^*$ – σ-алгебра подмножеств, порождённая семейством функционалов $\{\Phi_{\mathbf{A}} : \rho \mapsto \rho(\mathbf{A}) | \, \mathbf{A} \in B(H)\}$ на множестве $\Sigma(H)$.

Пусть $W_0(0,1)$ – множество неотрицательных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $((0,1), 2^{(0,1)})$, сконцентрированных в произвольном интервале $(0,\delta)$, $\delta > 0$, и нормализованных условием $\nu((0,1)) = 1$. Здесь $2^{(0,1)}$ – σ-алгебра всех подмножеств интервала $(0,1)$.

Фиксируем некоторое $u_0 \in H^2$. Тогда множество решений регуляризованных задач Коши (2), (3) вместе с мерой ν на измеримом пространстве $((0,1), 2^{(0,1)})$ задают случайный процесс со значениями в множестве чистых состояний $\Sigma_p(H)$, рассматриваемом как измеримое пространство $(\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$:

$$\rho_{\mathbf{V}_\cdot(\cdot)u_0} : (0,1) \times \mathbb{R} \to \Sigma_p(H); \quad (\epsilon, t) \mapsto \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}. \tag{8}$$

3.2. Квантовые состояния и меры на единичной сфере $S_1(H)$.

Лемма 4 [23]. *Для любого $\rho \in \Sigma(H)$ существует такая нормированная мера $\nu : 2^{S_1(H)} \to \to [0,1]$, что*

$$\langle \rho, \mathbf{A}\rangle = \int\limits_{S_1(H)} (u, \mathbf{A}u)\, d\nu(u) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{A} \in B(H). \tag{9}$$

Если мера ν в равенстве (9) счётно-аддитивна, то состояние ρ является нормальным.

Таким образом, квантовые состояния являются математическими ожиданиями случайных величин со значениями в измеримом пространстве чистых состояний $(\Sigma_p(H), \mathcal{A}^*)$.

3.3. Случайный процесс, продолжающий решение через момент градиентного взрыва. Пусть $(E, \mathcal{A}, \nu)$ – измеримое пространство с мерой, причём $E = (0,1)$, $\mathcal{A} = 2^{(0,1)}$, $\nu \in W_0(0,1)$. Тогда, согласно (8), при каждом $u_0 \in H^2$ и каждом $t \geqslant 0$ определена случайная величина

$$\rho_{\mathbf{V}_\cdot(t)u_0} : (E, \mathcal{A}, \nu) \to (\Sigma(H), \mathcal{A}^*).$$

Следовательно, в силу теоремы 4 направленное семейство задач Коши (2), (3) определяет случайный процесс $\mathcal{T}$ со значениями в пространстве непрерывных отображений множества $\Sigma_p^2(H)$ в себя:

$$\mathcal{T} : E \times [0, +\infty) \to C(\Sigma_p^2(H), \Sigma_p^2(H)); \quad \mathcal{T}_\epsilon(t)\rho_{u_0} = \rho_{\mathbf{V}_\epsilon(t)u_0}.$$

Среднее значение такого случайного процесса задаётся равенством

$$\mathrm{M}\mathcal{T} = \mathcal{T}^\nu, \quad \text{где} \quad \mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \mathrm{M}(\rho_{u_\epsilon(t,u_0)}) = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int\limits_E \rho_{u_\epsilon(t,u_0)}\, d\nu(\epsilon), \quad t \geqslant 0;$$

$$\langle \rho^\nu(t, \rho_{u_0}), \mathbf{A}\rangle = \int\limits_E \langle \rho_{u_\epsilon(t,u_0)}, \mathbf{A}\rangle\, d\nu(\epsilon) \quad \text{для любого} \quad \mathbf{A} \in B(H).$$

Теорема 7 [8, 9]. *Пусть $\nu \in W_0(0,1)$ и $u_0 \in H^2$, а $[0, T_1)$ – промежуток существования H^1-решения задачи Коши (1), (2).*

Тогда среднее значение случайного процесса $\rho_{u_\epsilon(t,u_0)}$, $t \geqslant 0$, определяет однопараметрическое семейство квантовых состояний

$$\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \rho^\nu(t, \rho_{u_0}); \quad \rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \int\limits_{(0,1)} \rho_{u_\epsilon(t,u_0)}\, d\nu(\epsilon), \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

При этом семейство преобразований (10) обладает следующими свойствами:
i) $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) = \rho_{u(t,u_0)}$ для всех $t \in [0, T_1)$;
ii) $\rho^\nu(t, \rho_{u_0}) \in \Sigma(H)$ для всех $t > T_1$, если $T_1 < +\infty$;
iii) $\rho^\nu(T_1, \rho_{u_0}) \notin \Sigma_n(H)$, если $p = 4/d$ и $T_1 < +\infty$.

3.4. Нелинейная динамика чистого состояния в расширенном пространстве. Покажем, что однопараметрическое семейство преобразований квантовых состояний (10) представимо как частичный след группы нелинейных преобразований множества чистых состояний в расширенном гильбертовом пространстве.

В качестве расширенного гильбертова пространства рассмотрим пространство

$$\mathcal{H} = L_2((0,1), 2^{(0,1)}, \nu, H)$$

квадратично интегрируемых по Петтису относительно меры ν отображений $(0,1) \to H$.

Начальному условию (2) соответствует следующий вектор расширенного пространства:

$$U_0(\epsilon) = u_0, \quad \epsilon \in (0,1), \tag{11}$$

а регуляризованная динамика задаётся однопараметрической группой преобразований расширенного пространства

$$\mathcal{U}(t)U_0(\epsilon) = u_\epsilon(t, u_0), \quad t \geqslant 0, \quad \epsilon \in (0,1). \tag{12}$$

Согласно теореме 4 однопараметрическое семейство операторов $\mathcal{U}(t),\ t \geqslant 0,$ корректно определено равенством (12) на подпространстве $\mathcal{H}^2$ пространства $\mathcal{H},$ состоящем из отображений $(0,1) \to H^2.$ Тем самым на множестве чистых состояний $\Sigma_p^2(\mathcal{H}) = \{\rho_{U_0} : U_0 \in \mathcal{H}^2\}$ задана однопараметрическая группа преобразований $\mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t),\ t \geqslant 0,$ действующих по правилу

$$\mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t)\rho_U = \mathcal{U}(t)\rho_U\mathcal{U}(t)^* = \rho_{\mathcal{U}(t)U}, \quad t \geqslant 0, \quad U \in \mathcal{H}^2.$$

В алгебре ограниченных операторов $B(\mathcal{H})$ выделим подалгебру $\mathcal{A}_H = \{\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{I}_{(0,1)} : \ \mathbf{A} \in B(H)\}$ операторов, действующих согласно равенству

$$(V, \mathbf{A} \bigotimes \mathbf{I}_{(0,1)}U) = \int\limits_{(0,1)} (V(\epsilon), \mathbf{A}U(\epsilon))\, d\nu(\epsilon) \quad \text{для любых} \quad U, V \in \mathcal{H}. \tag{13}$$

Теорема 8. *Пусть $\nu \in W_0(E)$. Тогда для произвольного $u_0 \in H^2$ справедливо соотношение*

$$\langle \mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0}, \mathbf{A}\rangle = (\mathcal{U}(t), \mathbf{A} \bigotimes \mathbf{I}_{0,1}\mathcal{U}(t)U_0)_{\mathcal{H}}, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{A} \in B(H),$$

где вектор $U_0 \in \mathcal{H}$ определён равенством (11).

Утверждение теоремы 8 следует из теоремы 7 и определения (13) подалгебры $\mathcal{A}_H$.

Таким образом, однопараметрическое семейство $\mathcal{T}^\nu(t),\ t \geqslant 0,$ динамических преобразований множества квантовых состояний $\Sigma(H),$ служащее продолжением решения задачи Коши (1), (2), является частичным следом группы $\mathbb{T}_{\mathcal{U}},\ t \in \mathbb{R},$ задаваемым сужением на подалгебру $\mathcal{A}_H,$ т.е. $\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0} = \mathbb{T}_{\mathcal{U}}(t)\rho_U|_{\mathcal{A}_H}, \quad t \geqslant 0.$

Решение задачи Коши (1), (2) продолжается на полуось $[0, +\infty)$ посредством случайного процесса $\mathcal{T}\rho_{u_0} : E \times [0, +\infty) \to \Sigma_2(H).$ Математическое ожидание продолжения решения случайным процессом представляет собой продолжение решения однопараметрическим семейством квантовых состояний $\mathcal{T}^\nu(t)\rho_{u_0},\ t \geqslant 0.$

Однопараметрическое семейство операторов $\mathcal{T}^\nu(t),\ t \geqslant 0,$ не является полугруппой. Однопараметрическое семейство усреднённых отображений множества состояний в себя изучалось в работе [24] в связи с задачей продолжения решения сингулярного линейного уравнения Шрёдингера с симметричным линейным оператором $\mathbf{L}$ вместо самосопряжённого гамильтониана. Для предельного семейства $\mathcal{T}^\nu(t),\ t \geqslant 0,$ динамических преобразований множества состояний на C^*-подалгебрах алгебры ограниченных линейных операторов в [24] получено разложение Краусса в выпуклую комбинацию двух полугрупп. Также в этой работе установлена сходимость последовательности итераций $\{(\mathcal{T}^\nu(t/n))^n\}$ к предельной полугруппе линейных преобразований множества состояний на C^*-подалгебре. В силу теоремы Наймарка существует расширение симметрического оператора $\mathbf{L}$ до самосопряжённого оператора в расширенном пространстве такое, что предельное семейство $\mathcal{T}^\nu(t),\ t \geqslant 0,$ динамических преобразований множества состояний исходной квантовой системы является частичным следом унитарной динамики в расширенном пространстве на специальную подалгебру операторов, изоморфную алгебре операторов в исходном пространстве. Нелинейным аналогом теоремы Наймарка является полученное в теореме 8 расширение семейства преобразований $\mathcal{T}^\nu(t)$ до группы преобразований $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ подпространства $\mathcal{H}^2$ в расширенном пространстве $\mathcal{H}$ [25].

Заключение. В первой части статьи установлены взаимосвязи между явлениями самофокусировки, неограниченным возрастанием градиента решения и перехода квантового состояния из чистого в смешанное. Во второй части показано, что продолжение динамики чистого квантового состояния через момент градиентного взрыва может быть реализовано с помощью частичного следа нелинейной динамики чистого состояния в расширенном гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Таланов В.И.* О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в журн. эксп. и теор. физики. 1964. Т. 2. № 5. С. 218–222.
2. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 4. P. 1794–1797.
3. *Ginibre J., Velo G.* On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case // J. Funkt. Anal. 1979. V. 32. № 1. P. 1–32.
4. *Bourgain J.* Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures // Commun. Math. Phys. 1994. V. 66. P. 1–26.
5. *Zhidkov P.E.* Korteweg de Vries and nonlinear Schrödinger equations: qualitative theory // Lect. Not. Math. V. 1756. Berlin, 2001.
6. *Colliander J., Keel M., Staffilani G., Takaoka H., Tao T.* Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation // Math. Res. Lett. 2002. V. 9. № 5–6. P. 659–682.
7. *Сакбаев В.Ж.* Градиентный взрыв решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера // Тр. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 171–187.
8. *Efremova L.S., Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh.* Phase flow generated by Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation and dynamical mappings of quantum states // Lobachevski J. of Math. 2019. T. 40. № 10. C. 1455–1469.
9. *Merle F., Tsutsumi Y.* L_2 convergence of blow-up solutions for nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity // J. of Differ. Equat. 1990. V. 84. P. 205–214.
10. *Насибов Ш.М.* О коллапсе решений задачи Коши для кубического эволюционного уравнения Шрёдингера // Мат. заметки. 2019. Т. 105. № 1. С. 76–83.
11. *Насибов Ш.М.* Нелинейное эволюционное уравнение Шрёдингера в сверхкритическом случае // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 209. № 3. С. 427–437.
12. *Tsvetkov N.* Invariant measures for the defocusing nonlinear Schrödinger equation // Annales de l'Institute Fourier. 2008. V. 58. № 7. P. 2543–2604.
13. *Амосов А.А., Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Коробкин В.В., Прохоров А.М., Серов Р.В.* Самофокусировка волновых пучков с платообразным распределением интенсивности // Письма в журн. эксп. и теор. физики. 1979. Т. 30. № 2. С. 119–122.
14. *Spohn H.* Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Berlin, 1991.
15. *Grekhneva A.D., Sakbaev V.Zh.* Dynamics of a set of quantum states generated by a nonlinear Liouville–von Neumann equation // Comp. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. № 8. P. 1337–1347.
16. *Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж.* Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // Теор. и мат. физика. 2015. Т. 185. № 2. С. 252–271.
17. *Linares F., Ponce G.* Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. New York, 2009.
18. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М., 1982.
19. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М., 2008.
20. *Sakbaev V.Zh.* On the variational description of the trajectories of averaging quantum dynamical maps // P-adic, Ultrametric Anal. 2012. V. 4. № 2. P. 115–129.
21. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. М., 2003.
22. *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2011.
23. *Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж.* Геометрические свойства систем векторных состояний и разложение состояний в интегралы Петтиса // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 4. С. 1–14.
24. *Волович И.В., Сакбаев В.Ж.* О квантовой динамике на C^*-алгебрах // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 33–47.
25. *Amosov G.G., Sakbaev V.Zh., Smolyanov O.G.* Linear and nonlinear liftings of states of quantum systems // Rus. J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 4. P. 417–427.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Лётно-исследовательский институт
им. М.М. Громова, г. Жуковский

Поступила в редакцию 11.02.2022 г.
После доработки 11.02.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.